

УДК 628.543.52

А.И. Бохонский, Н.И. Варминская

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ КАК КРИТЕРИЙ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСНЫМ ДВИЖЕНИЕМ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ

Показано, что принцип действия Гамильтона–Остроградского может быть использован как критерий оптимальности для поиска управления переносным движением упругодеформируемого объекта. Дан пример управления движением системы с одной степенью свободы.

Любое движение (абсолютно твердого либо деформируемого твердого тела, системы твердых тел) оптимально в смысле существования (известного либо требующего установления в результате исследований) некоторого критерия оптимальности. В ряде случаев сам принцип действия может рассматриваться как критерий оптимальности. На возможность использования принципа действия (в форме Лагранжа) как критерия оптимальности движения жесткопластических рам при произвольном импульсном воздействии обращено внимание в [1], когда этот критерий использовался для поиска формы движения из числа возможных.

В [2], например, показано, что сухое трение при исследовании свободных колебаний упругой системы может рассматриваться как неизвестное релейное управление, которое находится с использованием принципа максимума и критерия быстрого действия либо действия. При анализе движения тела с сухим трением само сухое трение может рассматриваться как оптимальное релейное управление, которое находится с использованием принципа максимума,

а в качестве критерия оптимальности принимается быстрое действие $\left(\int_0^{t_1} dt = \min \right)$ либо даже оказывается возможным

использование принципа действия.

Цель исследований – теоретическое обоснование существования такого оптимального управления переносным движением упругого объекта (из исходного в конечное состояния абсолютного покоя), при котором допускаются колебания объекта только на временном интервале движения.

Для обоснования существования оптимального управления переносным движением упругого объекта в данном случае привлекается принцип действия Гамильтона–Остроградского, который означает, что и для неконсервативной (управляемой) системы действие

$$J = \int_0^{t_1} (T - \Pi + A^e) dt \quad (1)$$

в истинном переносном оптимальном движении принимает стационарное значение.

Например, для упругой системы с одной степенью свободы кинетическая энергия в переносном движении в произвольный момент времени $T = mV_e^2/2$, где m – масса объекта; V_e – скорость переносного движения в произвольный момент времени. Потенциальная энергия, накапливаемая в результате оптимального (быстрого) переносного движения упругодеформируемого объекта $\Pi = cS_e^2/2n^2$, где c – коэффициент жесткости; S_e – перемещение объекта (в переносном движении) в произвольный момент времени; $n = t_1/t_c$, где t_1 – общее время движения; t_c – период свободных колебаний объекта.

По существу с помощью параметра n в данном случае учитывается доля деформирования упругого объекта за счет энергии оптимального переносного движения. Чем выше собственная частота ω колебаний объекта ($t_c = 2\pi/\omega$), т.е. чем выше жесткость упругой связи, тем меньше потенциальная энергия деформации, накопленная в результате достаточно быстрого переносного движения.

Работа управляющего воздействия в произвольный момент времени $A^e = U_e^* S_e$, где $U_e^* = mS_e^* p^2$, а $S_e^* = V_{cp} t = Lt/t_1$; L – общее перемещение объекта за все время движения t_1 ; $V_{cp} = L/t_1$ – средняя скорость движения.

После подстановки выражений для T , Π и A^e в (1) функционал принимает вид:

$$J = \int_0^{t_1} \left(\frac{mV_e^2}{2} - \frac{cS_e^2}{2n^2} + \frac{mLp^3}{2\pi} t S_e \right) dt. \quad (2)$$

Для функционала (2), который в общем виде для данного случая записывается как $\int_0^{t_1} F(S_e, \dot{S}_e, t) dt$, уравнение

Эйлера $F_{S_e} - \frac{d}{dt} F_{\dot{S}_e} = 0$, т.е. после ряда преобразований следует

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} + p^2 S_e = \frac{Lp^3}{2\pi} t. \quad (3)$$

Из решения уравнения (3) с учетом начальных условий $S_e(0) = 0$ и $\dot{S}_e(0) = V_e(0) = 0$ (движение из состояния абсолютного покоя) получаем

$$S_e(t) = L(pt - \sin pt)/2\pi,$$

и тогда

$$V_e(t) = \dot{S}_e(t) = Lp(1 - \cos pt)/2\pi; \quad U_e(t) = \ddot{S}_e(t) = Lp^2 \sin pt/2\pi. \quad (4)$$

Функции $S_e(t)$, $V_e(t)$ и $U_e(t)$ удовлетворяют краевым условиям переносного движения $U_e(0) = 0$, $U_e(t_1) = 0$, $V_e(0) = 0$, $S_e(0) = 0$ и следующим дополнительным краевым условиям на правом конце, которые можно представить в виде моментных соотношений

$$\int_0^{t_1} U_e(t) dt = 0; \quad \int_0^{t_1} V_e(t) dt = L.$$

В относительном движении дифференциальное уравнение упругого осциллятора

$$\ddot{x}_r(t) + \omega^2 x_r(t) = -Lp^2 \sin pt/2\pi$$

и его решение при нулевых начальных условиях ($x_r(0) = 0$, $\dot{x}_r(0) = 0$) имеет вид:

$$x_r(t) = \frac{Lp^2}{2\pi(\omega^2 - p^2)} \left(\frac{p}{\omega} \sin \omega t - \sin pt \right)$$

Моментные соотношения на правом конце, которые означают равенство нулю перемещения и скорости относительного движения (отсутствие колебаний упругого осциллятора) при $t = t_1$ записываются в виде:

$$\int_0^{t_1} U_e(t) \cos \omega t dt = 0; \quad \int_0^{t_1} U_e(t) \sin \omega t dt = 0. \quad (5)$$

Соотношения (5) с учетом (4) и $p = \omega/n$, $t_1 = 2\pi/p$ преобразуются в систему трансцендентных уравнений:

$$\cos 2n\pi - 1 = 0, \quad \sin 2n\pi = 0. \quad (6)$$

Система (6) с учетом исключения резонанса в движении имеет решение: $n = 2, 3, 4, \dots$ Следует отметить, что

для всех кососимметричных управлений, для которых $\int_0^{t_1} U_e(t) dt = 0$, $U_e(0) = 0$ и $U_e(t_1) = 0$ существуют такие n ,

когда за время t_1 происходит перемещение упругого объекта из исходного в конечное состояние абсолютного покоя.

Пример. Исходные данные: $L = 1$ м; $p = 1$ с⁻¹; $\omega = 2$ с⁻¹; $t_1 = 2\pi/p = 2\pi$ с; ускорение переносного движения $u_e(t) = \sin t/2\pi$. Дифференциальное уравнение относительного движения (колебаний упругой системы) записывается в виде:

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + 4x_r = -\frac{1}{2\pi} \sin t. \quad (7)$$

Для исследования динамики сложного движения деформируемого объекта представляет практический интерес использование Simulink как эффективного инструмента визуального моделирования. На рисунке 1 изображена блок-схема динамики относительного движения упругой системы с одной степенью свободы, которая включает: Sine Wave, State-Space и Scope. Блок Sine Wave формирует синусоидальный сигнал с заданной частотой ($p = 1$ с⁻¹), амплитудой ускорения ($1/2\pi$ м/с²) и равным нулю смещением. Блок State-Space формирует управляемый динамический объект, который в общем случае описывается системой линейных неоднородных уравнений в пространстве состояний

В соответствии с исходными данными для уравнения (7) матрицы A , B , C , D имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

В блоке (рисунок 1) используются переменные: x – вектор состояний; u – вектор входных воздействий; y – вектор выходных сигналов.

Блок Scope осуществляет построение графиков сигналов в функции времени. На рисунке 2 изображены графики перемещения и скорости объекта на временном интервале $t_1 \geq t \geq 0$.

Управление $u_e(t)$ переносным движением упругого объекта с исходного в конечное состояния абсолютного покоя, при котором выполняются моментные соотношения в относительном и переносном движениях, реализуется за минимальное время, которое в данном случае $t_1 = 2\pi$ с. Принцип действия как критерий оптимальности позволяет синтезировать управления переносным движением объектов с конечным числом степеней свободы.

Предполагается использование Simulink для исследования динамики управления с обратной связью движением деформируемых объектов при учете случайных воздействий, что

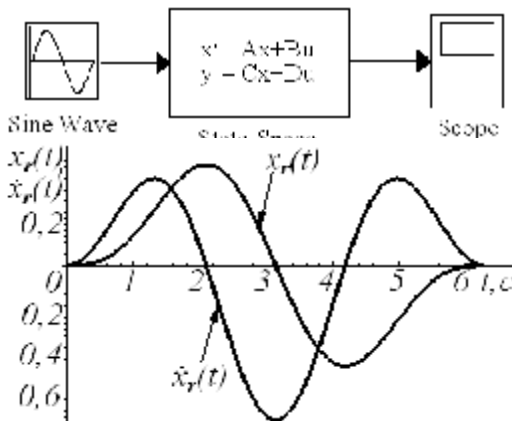


Рисунок 2 – Графики перемещения x_r и скорости $\dot{x}_r$ в относительном движении

составит предмет дальнейших исследований в данном направлении.

Библиографический список

1. Бохонский А.И. Оптимальное проектирование жесткопластических рам при сейсмической нагрузке / А.И. Бохонский, О.П. Бузанова // Сопротивление материалов и теория сооружений Респ. межвед. науч.-техн. сб. — К., 1977. — Вып. XXX. — С. 64–69.
2. Бохонский А.И. Анализ движения твердого тела с сухим трением / А.И. Бохонский, Е.В. Исаева // Вестн. СевГТУ. Сер. Физика и математика: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2004. — Вып. 59. — С. 115–121.

Поступила в редакцию 21.07.2006 г.