

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ АЛГОРИТМИЗАЦИИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДУНКАНА И РИККАТИ

Рассматривается алгоритмизация численного интегрирования уравнений Дункана и Риккати. Предлагается эффективный способ вычисления их матричных правых частей на основе скалярных представлений составляющих модели стохастической дифференциальной системы (уравнения состояния и/или уравнения измерения), либо её модифицированного варианта.

Большинство современных производственных процессов, в том числе в металлургии, в химической и нефтехимической промышленности [1], характеризуются непрерывностью, большой мощностью, а также сложным характером взаимодействия составляющих их энергетических и материальных потоков. Жёсткие и постоянно продолжающиеся повышаться требования к качеству производимой продукции, с одной стороны, а с другой, – к безопасности персонала, к сохранности оборудования, к экологической безопасности производственного процесса обуславливают необходимость оптимизации технологических процессов (ТП) и применения для управления ими сложных автоматических (автоматизированных) систем.

Теоретической базой для оптимизации современных производственных процессов, разработки современных систем автоматического (автоматизированного) управления ТП являются численные методы оптимизации [2] и методы современной теории автоматического управления, в том числе методы оптимального управления (наблюдения) [3]. В общем случае задача оптимизации производственного процесса на основе любого из этих методов предполагает стохастическую постановку [1].

Реализация любого численного метода оптимизации в стохастической постановке при алгоритмическом определении критерия оптимальности предполагает на каждой итерации решение задачи статистического анализа автоматической (автоматизированной) системы управления ТП (АСУТП).

Применение метода корреляционного анализа [3] для статистического анализа АСУТП на основе её стохастической нестационарной линейной непрерывной модели состояния означает численное интегрирование двух обыкновенных несвязанных детерминированных дифференциальных уравнений. Первое из них – уравнение математического ожидания вектора состояния модели, второе – уравнение его дисперсионной матрицы (ДМ). Уравнение ДМ вектора состояния нестационарной линейной непрерывной модели по определению и есть уравнение Дункана [3].

Уравнение Риккати [3] является обязательным элементом математического описания оптимальных линейных регулятора и наблюдателя АСУТП, модель которой допускает представление в виде системы стохастических нестационарных линейных уравнений состояния и измерения [3]. При этом различают два варианта уравнения Риккати: уравнение Риккати оптимального линейного наблюдателя и уравнение Риккати оптимального линейного регулятора. Заметим, что известное свойство дуальности [3] задач построения оптимального линейного управления и наблюдения не означает совпадения этих вариантов уравнения Риккати с точностью до обозначения матриц коэффициентов исходной и дуальной [3] моделей АСУТП. Поэтому проблематика эффективной алгоритмизации рассматривается для обоих вариантов уравнения Риккати.

Уравнения Дункана и Риккати – обыкновенные матричные соответственно детерминированные линейное и нелинейное дифференциальные уравнения. На практике задача их решения формулируется как задача Коши [2]. При этом, для уравнения Дункана – формулируется как начальная задача Коши [2, 3], для уравнения Риккати наблюдателя – и как начальная, и как конечная задача [2, 3], для уравнения Риккати регулятора – как конечная задача [2, 3]. И в том, и в другом случае, детерминированный характер уравнений Дункана и Риккати обуславливает возможность эффективного применения для их решения обычных явных численных методов интегрирования [2].

Реализация алгоритма интегрирования любого обыкновенного дифференциального уравнения на основе любого численного метода предполагает многократное вычисление его правой части. Для уравнений Дункана и Риккати это означает многократное вычисление произведений матриц. Каждое из этих матричных произведений содержит сомножителем либо одну из двух матриц коэффициентов уравнения состояния, либо матрицу коэффициентов уравнения измерения. Чаще всего, матрицы коэффициентов уравнений модели в значительной степени разреженные. Поэтому, применение для вычисления произведений матриц алгоритмов, основанных на матричной операции умножения, приводит к большим неоправданным вычислительным затратам на реализацию алгоритма численного интегрирования и поэтому весьма неэффективно.

Переход от матричного к скалярному представлению правых частей уравнений Дункана и Риккати позволяет при их вычислении исключить выполнение операций умножения на нулевые компоненты матриц коэффициентов модели. Однако при практическом применении такого подхода процесс получения таких скалярных представлений оказывается весьма трудоёмким, что особенно неприемлемо с нашей точки зрения, должен быть заново выполнен каждый раз для каждой АСУТП или частично повторен в режиме редактирования при любом изменении в модели АСУТП. Кроме того, каждый раз этот процесс сопряжён с выполнением громоздких аналитических преобразований и, следовательно, с очевидно высокой вероятностью возникновения весьма трудно диагностируемых при реализации алгоритмических ошибок.

Целью статьи является рассмотрение метода вычисления правой части матричных уравнений Дункана и Риккати, позволяющего без применения матричной операции умножения построить эффективный алгоритм вычисления либо её матричных произведений, либо лишь элементов её матричных произведений – суть также матричных произведений. Метод позволяет свести вычисление этих матричных произведений к последовательному многократному вычислению скалярного представления либо одной из составляющих правой части уравнения состояния и/или уравнения измерения, либо одной из составляющих модифицированных правых частей этих уравнений.

Представим правую часть $\mathbf{r}[\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t]$ дифференциального уравнения состояния АСУТП в виде суммы двух составляющих

$$\mathbf{r}[\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t] = \mathbf{r}_x[\mathbf{x}, t] + \mathbf{r}_\omega[\boldsymbol{\omega}, t] ;$$

где t – независимая переменная интегрирования;

$$\mathbf{r}_x[\mathbf{x}, t] = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) ;$$

(1)

$$\mathbf{r}_\omega[\boldsymbol{\omega}, t] = \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\omega}(t) ,$$

(2)

а $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{C}(t)$ – матричные коэффициенты соответствующих размерностей. При этом первая составляющая зависит только от вектора состояния $\mathbf{x}(t)$, а вторая – только от случайного возмущения $\boldsymbol{\omega}(t)$ с матрицей интенсивностей $\mathbf{Q}_\omega(t)$.

Матричные произведения в правой части уравнения Дункана вычисляются на основе скалярных представлений двух составляющих (1) и (2). Заметим, что скалярная форма составляющих позволяет устранить в их представлениях все произведения компонентов векторов $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\omega}$ на нулевые компоненты матриц коэффициентов $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{C}(t)$ соответственно. Матричные произведения в правой части уравнения Дункана вычисляются по столбцам. Причём, первое $\mathbf{A}(t) \mathbf{C}_x(t)$ и второе $[\mathbf{A}(t) \mathbf{C}_x(t)]^T$ матричные произведения вычисляются на основе составляющей (1), а третье $\mathbf{C}(t) \mathbf{Q}_\omega(t) \mathbf{C}^T(t)$ – на основе составляющей (2).

Для вычисления по столбцам первого и второго матричных произведений столбцы ДМ $\mathbf{C}_x(t)$ последовательно подставляют вместо вектора $\mathbf{x}$ в скалярное представление (1). Каждый раз $\mathbf{r}_x[\mathbf{x}, t]$ получится равным соответствующему столбцу первого матричного произведения.

Вычисление по столбцам третьего матричного произведения основывается на его эквивалентном преобразовании к виду

$$\mathbf{C}(t) \mathbf{Q}_\omega(t) \mathbf{C}^T(t) = \mathbf{C}(t) [\mathbf{C}(t) \mathbf{Q}_\omega(t)]^T$$

и выполняться в два этапа.

На первом этапе, для вычисления по столбцам матричного произведения $\mathbf{C}(t) \mathbf{Q}_\omega(t)$, столбцы матрицы $\mathbf{Q}_\omega(t)$ последовательно подставляют вместо вектора $\boldsymbol{\omega}$ в скалярное представление (2). Каждый раз $\mathbf{r}_\omega[\boldsymbol{\omega}, t]$ получается равным соответствующему столбцу матричного произведения $\mathbf{C}(t) \mathbf{Q}_\omega(t)$.

На втором этапе, для вычисления по столбцам третьего матричного произведения $\mathbf{C}(t) \mathbf{Q}_\omega(t) \mathbf{C}^T(t)$ в целом, столбцы вычисленной на первом этапе и затем транспонированной матрицы $[\mathbf{C}(t) \mathbf{Q}_\omega(t)]^T$ последовательно подставляют вместо вектора $\boldsymbol{\omega}$ в скалярное представление той же составляющей (2). Каждый раз $\mathbf{r}_\omega[\boldsymbol{\omega}, t]$ получается равным соответствующему столбцу искомого третьего матричного произведения.

Представим теперь и составляющую правой части $\mathbf{r}_x[\mathbf{x}, t]$ дифференциального уравнения состояния в виде суммы двух составляющих

$$\mathbf{r}_x[\mathbf{x}, t] = \mathbf{r}_A[\mathbf{x}, t] + \mathbf{r}_B[\mathbf{u}, t] ,$$

где $\mathbf{r}_A[\mathbf{x}, t] = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t)$,

(3)

$$\mathbf{r}_B[\mathbf{u}, t] = \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) ,$$

а правую часть $\mathbf{r}_z[\mathbf{x}, t]$ уравнения измерения как

$$\mathbf{r}_z[\mathbf{x}, t] = \mathbf{r}_D[\mathbf{x}, t] + \xi(t) ,$$

где $\mathbf{r}_D[\mathbf{x}, t] = \mathbf{D}(t) \mathbf{x}(t)$.

(4)

Первая составляющая $\mathbf{r}_z[\mathbf{x}, t]$ зависит только от вектора состояния $\mathbf{x}(t)$, а вторая представляет собой шум измерений $\xi(t)$.

Матричные произведения в правой части уравнения Риккати наблюдателя вычисляются на основе скалярных представлений трёх составляющих: (2 – 4). Скалярная форма составляющих исключает в их представлениях все произведения нулевых компонентов матриц коэффициентов $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ и $\mathbf{C}(t)$ на компоненты вектора $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\omega}$ соответственно. Матричные произведения в правой части уравнения Риккати наблюдателя вычисляются по

столбцам. Причём, первое $\mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t)$ и второе $[\mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t)]^T$ матричные произведения вычисляются на основе составляющей (3), третье $\mathbf{C}(t)\mathbf{Q}_\omega(t)\mathbf{C}^T(t)$ – на основе составляющей (2), а четвёртое $\mathbf{Q}(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{Q}_\xi^{-1}(t)\mathbf{D}(t)\mathbf{Q}(t)$ – на основе составляющей (4).

Легко увидеть, что первое $\mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t)$ и второе $[\mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t)]^T$ матричные произведения совпадают с соответствующими матричными произведениями уравнения Дункана с точностью до обозначения второго матричного сомножителя. Поэтому при вычислении по столбцам $\mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t)$ вместо вектора $\mathbf{x}$ в скалярное представление той же составляющей (3) последовательно подставляют столбцы уже не матрицы $\mathbf{Q}_\omega(t)$, а ковариационной матрицы ошибок измерений $\mathbf{Q}(t)$. Каждый раз вычисленное значение $\mathbf{r}_A[\mathbf{x}, t]$ получится равным соответствующему столбцу первого матричного произведения $\mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t)$.

Третье матричное произведение $\mathbf{C}(t)\mathbf{Q}_\omega(t)\mathbf{C}^T(t)$ совпадает в точности с соответствующим произведением уравнения Дункана. Поэтому его вычисление выполняется таким же, описанным ранее образом.

Вычисление по столбцам матричных элементов $\mathbf{D}(t)\mathbf{Q}(t)$ и $[\mathbf{D}(t)\mathbf{Q}(t)]^T$ четвёртого матричного произведения выполняется аналогично вычислению произведения $\mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t)$. Для вычисления по столбцам первого из них столбцы матрицы $\mathbf{Q}(t)$ последовательно подставляют вместо вектора $\mathbf{x}$ в скалярное представление (4). Каждый раз вычисленное значение $\mathbf{r}_D[\mathbf{x}, t]$ получится равным соответствующему столбцу первого элемента матричного произведения. Окончательно четвёртое матричное произведение $\mathbf{Q}(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{Q}_\xi^{-1}(t)\mathbf{D}(t)\mathbf{Q}(t)$ вычисляется как произведение предварительно вычисленных матричных элементов $\mathbf{D}(t)\mathbf{Q}(t)$, $[\mathbf{D}(t)\mathbf{Q}(t)]^T$ и матрицы $\mathbf{Q}_\xi^{-1}(t)$, обратной матрице интенсивности $\mathbf{Q}_\xi(t)$ шума измерений $\xi(t)$. В частном случае, если возможно аналитическое представление матрицы $\mathbf{Q}_\xi^{-1}(t)$, вычисление произведения предварительно вычисленных матричных элементов возможно организовать на основе скалярного представления дополнительной составляющей $\mathbf{r}[\xi, t] = \mathbf{Q}_\xi^{-1}(t)\xi(t)$ аналогичным вычислению третьего матричного произведения и описанным ранее образом.

Матричные произведения в правой части уравнения Риккати регулятора тоже вычисляются на основе скалярных представлений, только модификаций $\tilde{\mathbf{r}}_A[\tilde{\mathbf{x}}, t]$, $\tilde{\mathbf{r}}_B[\tilde{\mathbf{u}}, t]$ и $\tilde{\mathbf{r}}_D[\mathbf{z}, t]$ тех же составляющих $\mathbf{r}_A[\mathbf{x}, t]$, $\mathbf{r}_B[\mathbf{x}, t]$ и $\mathbf{r}_D[\mathbf{x}, t]$ соответственно вида:

$$\tilde{\mathbf{r}}_A[\tilde{\mathbf{x}}, t] = \mathbf{A}^T(t)\mathbf{r}_A[\mathbf{x}, t] = \mathbf{A}^T(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^T(t)\tilde{\mathbf{x}}(t), \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_B[\tilde{\mathbf{u}}, t] = \mathbf{B}^T(t)\mathbf{r}_B[\mathbf{u}, t] = \mathbf{B}^T(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T(t)\tilde{\mathbf{u}}(t), \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_D[\mathbf{z}, t] = \mathbf{D}^T(t)\mathbf{r}_D[\mathbf{x}, t] = \mathbf{D}^T(t)\mathbf{D}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}^T(t)\mathbf{z}(t). \quad (7)$$

Как и прежде, скалярная форма модификаций составляющих (5 – 7) позволяет опустить в их представлениях все произведения компонентов векторов $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{z}$ на нулевые компоненты матриц коэффициентов $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ соответственно. Матричные произведения в правой части уравнения Риккати регулятора вычисляются по столбцам. Причём, первое $\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)$ и второе $[\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)]^T$ матричные произведения вычисляются на основе составляющей (5), третье $\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}_u^{-1}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$ – на основе составляющей (6), а четвёртое $\mathbf{D}^T(t)\mathbf{R}_z(t)\mathbf{D}(t)$ – на основе (7).

Для вычисления первого $\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)$ и второго $[\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)]^T$ матричных произведений столбцы матрицы $\mathbf{P}(t)$ последовательно подставляют вместо вектора $\tilde{\mathbf{x}}$ в скалярное представление (5). Каждый раз $\tilde{\mathbf{r}}_A[\tilde{\mathbf{x}}, t]$ получится равным соответствующему столбцу первого матричного произведения.

Вычисление элементов $\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$ и $[\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)]^T$ третьего матричного произведения выполняется аналогично. Для вычисления первого из них столбцы матрицы $\mathbf{P}(t)$ последовательно подставляют вместо вектора $\tilde{\mathbf{u}}$ в скалярное представление (6). Каждый раз $\tilde{\mathbf{r}}_B[\tilde{\mathbf{u}}, t]$ получится равным соответствующему столбцу первого элемента матричного произведения. Окончательно третье матричное произведение $\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}_u^{-1}\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$ вычисляется как произведение предварительно вычисленных матричных элементов $\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$, $[\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)]^T$ и матрицы $\mathbf{R}_u^{-1}(t)$, обратной весовой матрице $\mathbf{R}_u(t)$ квадратичной формы $\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}_u(t)\mathbf{u}(t)$ интегрального критерия оптимальности. В частном случае, если возможно аналитическое представление матрицы $\mathbf{R}_u^{-1}(t)$, вычисление произведения предварительно вычисленных матричных элементов возможно реализовать на основе скалярного представления дополнительной составляющей $\mathbf{r}[\mathbf{u}(t), t] = \mathbf{R}_u^{-1}(t)\mathbf{u}(t)$. Способ реализации полностью аналогичен предложенному для матричного произведения $\mathbf{Q}(t)\mathbf{D}^T(t)\mathbf{Q}_\xi^{-1}(t)\mathbf{D}(t)\mathbf{Q}(t)$ уравнения Риккати наблюдателя.

Вычисление по столбцам четвёртого $\mathbf{D}^T(t) \mathbf{R}_z(t) \mathbf{D}(t)$ матричного произведения выполняется в два этапа и основывается на его эквивалентном преобразовании к виду

$$\mathbf{D}^T(t) \mathbf{R}_z(t) \mathbf{D}(t) = \mathbf{D}^T(t) [\mathbf{D}^T(t) \mathbf{R}_z(t)]^T.$$

На первом этапе для вычисления матричного произведения $\mathbf{D}^T(t) \mathbf{R}_z(t)$ столбцы весовой, по определению симметричной, матрицы $\mathbf{R}_z(t)$ квадратичной формы $\mathbf{z}^T(t) \mathbf{R}_z(t) \mathbf{z}(t)$ интегрального критерия оптимальности последовательно подставляют вместо вектора $\mathbf{z}$ в скалярное представление (7). Каждый раз $\tilde{\mathbf{r}}_D[\mathbf{z}, t]$ получится равным соответствующему столбцу матричного произведения $\mathbf{D}^T(t) \mathbf{R}_z(t)$.

На втором этапе, для вычисления матричного произведения $\mathbf{D}^T(t) \mathbf{R}_z(t) \mathbf{D}(t)$, столбцы вычисленной на первом этапе, и, затем транспонированной матрицы $[\mathbf{D}^T(t) \mathbf{R}_z(t)]^T$ последовательно подставляют вместо вектора $\mathbf{z}$ в то же скалярное представление (7). Каждый раз $\tilde{\mathbf{r}}_D[\mathbf{z}, t]$ получится равным соответствующему столбцу искомого четвёртого матричного произведения.

Алгоритмизация вычисления матричных правых частей уравнений Дункана и Риккати на основе описанного метода позволяет снизить вычислительные затраты на реализацию алгоритмов их численного интегрирования и, как следствие, в целом на реализацию как алгоритмов корреляционного анализа и синтеза, так и алгоритмов оптимальных линейных наблюдателя и регулятора.

Определим оценку вычислительных затрат на реализацию численного алгоритма как число операций «типа умножения», а величины относительной разреженности матриц коэффициентов $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$ – как $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C, \alpha_D$ соответственно. Легко показать, что тогда относительное снижение вычислительных затрат при вычислении правой части уравнения Дункана по сравнению с алгоритмом на основе матричной операции умножения составит величину $(\alpha_A + 2\alpha_C)/3$. Очевидно, что относительное снижение вычислительных затрат всегда будет не меньше, чем $2\alpha_C/3$. При этом для большинства приложений выполняется соотношение $\alpha_C \gg \alpha_A$. В этом случае, относительное снижение вычислительных затрат для уравнения Дункана будет значительно превышать величину α_A .

Для уравнений Риккати наблюдателя и регулятора при аналитическом представлении матриц $\mathbf{Q}_\xi^{-1}(t)$ и $\mathbf{R}_u^{-1}(t)$ относительное снижение вычислительных затрат составит величины $(\alpha_A + \alpha_D)/4$ и $(\alpha_A + 2\alpha_D + \alpha_B)/6$ соответственно. Иначе, даже при обращении $n \times n$ – матрицы $\mathbf{Q}_\xi(t)$ и $m \times m$ – матрицы $\mathbf{R}_u(t)$ на основе предложенного [4] эффективного LU – алгоритма, относительное снижение вычислительных затрат составит уже меньшие величины $(\alpha_A + \alpha_D)/(n+4)$ и $(\alpha_A + 2\alpha_D + \alpha_B)/(m+6)$ соответственно. Очевидно, что в этом случае относительное снижение вычислительных затрат для уравнений Риккати наблюдателя и регулятора будет тем меньше, чем больше n и m .

Так как вычислительные затраты при реализации алгоритма численного интегрирования уравнений Дункана и Риккати в основном обусловлены именно затратами на вычисление их правых частей, приведённые оценки справедливы и для реализации в целом алгоритмов их численного интегрирования.

Очевидно, что в процессе вычисления матричных произведений $\mathbf{Q}(t) \mathbf{D}^T(t) \mathbf{Q}_\xi^{-1}(t) \mathbf{D}(t) \mathbf{Q}(t)$ и $\mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}_u^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t)$ уравнений Риккати вычисляются и сами матричные коэффициенты усиления $\mathbf{Q}(t) \mathbf{D}^T(t) \mathbf{Q}_\xi^{-1}(t)$ и $\mathbf{R}_u^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t)$ [3] оптимальных линейного наблюдателя и линейного регулятора соответственно. Поэтому приведённые оценки снижения вычислительных затрат при реализации предлагаемого метода в полной мере справедливы и для реализации в целом алгоритмов оптимальных линейных наблюдателя и регулятора.

Очевидно, что предложенный метод эффективной алгоритмизации численного интегрирования обоих вариантов матричного дифференциального уравнения Риккати применим и для алгоритмизации численного решения соответствующих алгебраических уравнений Риккати [3], т.е. и для определения установившихся решений дифференциальных уравнений Риккати.

Рассмотренные же аспекты эффективной алгоритмизации численного интегрирования уравнения Дункана в такой же мере актуальны и для линеаризованных в гауссовском и в негауссовском приближении [3] аналогов уравнения Дункана, соответствующих нелинейной непрерывной стохастической модели состояния. Однако, в нелинейном случае метод, предложенный для уравнения Дункана, предполагает необходимость его обобщения. Поэтому очевидно, что рассмотрение аналогичных аспектов алгоритмизации для линеаризованных уравнений вероятностных моментов нелинейной модели состояния представляется естественным продолжением выполненных исследований.

Дальнейшие исследования будут направлены на рассмотрение аналогичных аспектов эффективной алгоритмизации и для матричных уравнений вероятностных моментов второго порядка стохастической нелинейной дискретной системы.

1. Рей У. Методы управления технологическими процессами / У. Рей. — М.: Мир, 1983. — 368 с.
2. Хофер Э. Численные методы оптимизации / Э. Хофер, Р. Лундерштедт. — М.: Машиностроение, 1981. — 192 с.
3. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
4. Тришкин С.А. Об одном эффективном LU-алгоритме обращения матрицы / С.А. Тришкин, В.В. Захаров // Системы автоматизации и автоматическое управление: Материалы науч.- техн. конф.: В 2х т., Севастополь, 17 – 18 мая 2006 г. — Севастополь, 2006. — Т.2. — С.46 – 49.

Поступила в редакцию 15.11.2006 г.