

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.213.2

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЛОТНОСТЯМИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАЗЛИЧНОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ МНОГОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Допенко С.В.

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

Дан общий метод определения частичных (маргинальных) распределений любого числа переменных для многомерных негауссовских случайных величин, рассмотренных в работе [1]. Исследована возможность распространения исходных распределений на большее число измерений, найдены условия, при которых это возможно, и выведены соответствующие соотношения.

Пусть N -мерная непрерывная случайная величина $\xi_N^T = (\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, \xi_N)$ задана своей N -мерной плотностью вероятностей вида [1]:

$$p_N(\mathbf{x}_N) = \frac{1}{C_N} f_N\left(\sqrt{\mathbf{x}_N^T A_N \mathbf{x}_N}\right), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_N$ есть N -мерный вектор-столбец, A_N – квадратная симметрическая положительно определенная матрица размера $N \times N$, T – знак транспонирования. Неотрицательную функцию $f_N(t)$, определенную для $t \geq 0$, будем называть базовой для данной N -мерной плотности вероятностей. Из условия нормировки выражения (1) коэффициент C_N определяется как

$$C_N = \frac{2\pi^{N/2} v_{N-1}(N)}{\Gamma(N/2) \sqrt{\det A_N}}, \quad (2)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Базовая функция $f_N(t)$ такова, что ее любой начальный момент n -го порядка

$$v_n(N) = \int_0^\infty x^n f_N(x) dx, \quad (3)$$

необходим для дальнейших расчетов, имеет конечное значение..

В формуле (1) вектор-строка $\mathbf{x}_N^T$ имеет N компонент $\mathbf{x}_N^T = (x_1, \dots, x_N)$. Если же требуется получить плотность вероятностей для случайной величины ξ_{N-1}^T , состоящей из $N-1$ компонент, необходимо

в котором $J_\nu(x)$ – функции Бесселя и производится однократное, а не N -кратное интегрирование. Интеграл в его правой части представляет собой преобразование Ханкеля функции $x^{(N-2)/2} f_N(x)$. Обратное ему преобразование есть

$$f_N(r_N) = v_{N-1}(N) [\Gamma(N/2) (2r_N)]^{\frac{N}{2}-1} \int_0^\infty \varphi_N(\theta) J_{\frac{N}{2}-1}(r_N \theta) \theta^{\frac{N}{2}} d\theta. \quad (7)$$

В двух последних соотношениях обозначены скалярные величины

$$\alpha_N = \sqrt{\mathbf{\bar{\theta}}_N^T A_N^{-1} \mathbf{\bar{\theta}}_N}, \quad r_N = \sqrt{\mathbf{\bar{x}}_N^T A_N \mathbf{\bar{x}}_N}. \quad (8)$$

Входящая в них матрица A_N^{-1} представима в виде [1]

$$A_N^{-1} = q_N W_N R_N W_N^T, \quad (9)$$

где

$$R_N = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

– матрица коэффициентов корреляции между составляющими вектора $\mathbf{\bar{\xi}}_N^T$,

$$W_N = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N \end{pmatrix} \quad (11)$$

– квадратная диагональная матрица N -го порядка, которая определяется только среднеквадратическими значениями σ_i компонент вектора $\mathbf{\bar{\xi}}_N^T$,

$$q_N = N v_{N-1}(N) / v_{N+1}(N) \quad (12)$$

– коэффициент, выражаемый через моменты (3).

Если в формулах (8) и (6) положить $\theta_{N-m+1} = \dots = \theta_N = 0$ и матрицу A_N заменить на матрицу A_{N-m} , то, согласно соотношению (5), выражение (6) превратится в $(N-m)$ -мерную характеристическую функцию случайной величины $\mathbf{\bar{\xi}}_{N-m}^T$

$$\varphi_{N-m}(\alpha_{N-m}) = \Gamma(N/2) v_{N-1}^{-1}(N) (2/\alpha_{N-m})^{\frac{N}{2}-1} \int_0^\infty f_N(x) J_{\frac{N}{2}-1}(\alpha_{N-m} x) x^{\frac{N}{2}} dx, \quad (13)$$

где, в соответствии с (8) и (9), $\alpha_{N-m} = \sqrt{\mathbf{\bar{\theta}}_{N-m}^T A_{N-m}^{-1} \mathbf{\bar{\theta}}_{N-m}}$.

Аналогично выражению (9) для любых $M \leq N$ можно записать

$$A_M^{-1} = q_M W_M R_M W_M^T. \quad (14)$$

Заменив в формуле (7) N на $N-m$ и подставив в нее Φ_{N-m} в форме (13), получим

$$f_{N-m}(r_{N-m}) = \frac{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(N/2) n_{N-m-1}(N-m)}{\Gamma[(N-m)/2] n_{N-1}(N) r_{N-m}^2} \int_0^\infty f_N(x) F_{N-m}(x) x^{\frac{N}{2}} dx, \quad (15)$$

где

$$F_{N-m}(x) = \int_0^\infty J_{\frac{N-m-1}{2}}(r_{N-m}\theta) J_{\frac{N-1}{2}}(x\theta) \theta^{1-\frac{m}{2}} d\theta.$$

Воспользуемся значением интеграла [3]

$$\int_0^\infty J_\mu(at) J_\nu(bt) t^{\mu-\nu+1} dt = \begin{cases} 0 & \text{при } b < a, \\ \frac{2^{\mu-\nu+1} a^\mu (b^2 - a^2)^{\nu-\mu-1}}{\Gamma(\nu-\mu) b^\nu} & \text{при } b > a, \end{cases} \quad (\operatorname{Re} \nu > \operatorname{Re} \mu > -1).$$

Отсюда

$$F_{N-m}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < r_{N-m}, \\ \frac{2^{1-\frac{m}{2}} r_{N-m}^{\frac{N-m-1}{2}}}{\Gamma(m/2) x^{\frac{N-1}{2}}} (x^2 - r_{N-m}^2)^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \geq r_{N-m}, \end{cases}$$

соотношение (15) принимает вид

$$f_{N-m}(r_{N-m}) = D_{N-m} \Phi_{N-m}(r_{N-m}), \quad (16)$$

где

$$D_{N-m} = \frac{2 \Gamma(N/2) v_{N-m-1}(N-m)}{\Gamma[(N-m)/2] \Gamma(m/2) v_{N-1}(N)}, \quad (17)$$

и

$$\Phi_{N-m}(r_{N-m}) = \int_{r_{N-m}}^\infty f_N(x) (x^2 - r_{N-m}^2)^{\frac{m-1}{2}} x dx. \quad (18)$$

Формула (16) выражает $(N-m)$ -мерную функцию $f_{N-m}(\vec{x}_{N-m})$ через N -мерную $f_N(\vec{x}_N)$. Произведем в (18) замену переменных $t^2 = x^2 - r_{N-m}^2$:

$$\Phi_{N-m}(r_{N-m}) = \int_0^\infty t^{m-1} f_N(\sqrt{r_{N-m}^2 + t^2}) dt. \quad (19)$$

Из соотношений (16) и (19) имеем

$$f_{N-m}(r_{N-m}) = D_{N-m} \int_0^{\infty} t^{m-1} f_N \left(\sqrt{r_{N-m}^2 + t^2} \right) dt. \quad (20)$$

Формулы (20) и (1) решают задачу нахождения плотности вероятностей случайной величины с числом измерений, на m единиц меньшим исходного. Здесь следует иметь в виду, что, согласно (14) и второй формуле (8),

$$r_{N-m}^2 = q_{N-m}^{-1} (U_{N-m} \mathbf{r}_{N-m})^T R_{N-m}^{-1} (U_{N-m} \mathbf{r}_{N-m}), \quad (21)$$

где диагональная матрица $U_{N-m} = W_{N-m}^{-1} [1]$ и W_{N-m} находится по формуле (11). Интеграл в (19) всегда неотрицателен и, если существует момент $v_{N+1}(N)$, конечен.

Итак, из найденных выражений следует, что $(N-m)$ -мерная плотность вероятностей $p_{N-m}(\mathbf{r}_{N-m})$ многомерной величины $\mathbf{\xi}_{N-m}^T = (\xi_1, \dots, \xi_{N-m})$ пропорциональна выражению (19), которое стоит в правой части формулы (16). Поэтому по аналогии с формулой (1) эту плотность, т.е. $(N-m)$ -мерное маргинальное распределение, можно записать в виде

$$p_{N-m}(\mathbf{r}_{N-m}) = \Phi_{N-m}(r_{N-m}) / Q_{N-m}. \quad (22)$$

Входящий сюда неизвестный коэффициент Q_{N-m} определим из условия нормировки методом, описанным в [1],

$$Q_{N-m} = \frac{2\pi^{\frac{N-m}{2}} \mu_{N-m-1}}{\Gamma[(N-m)/2] \sqrt{\det A_{N-m}}}.$$

Начальный момент порядка $N-m-1$ функции $\Phi_{N-m}(x)$ есть

$$\mu_{N-m-1} = \int_0^{\infty} x^{N-m-1} \Phi_{N-m}(x) dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{N-m-1} t^{m-1} f_N \left(\sqrt{x^2 + t^2} \right) dx dt.$$

Переход к полярным координатам и интегрирование дают

$$\mu_{N-m-1} = 2^{-1} v_{N-1}(N) \Gamma(m/2) \Gamma[(N-m)/2] / \Gamma(N/2),$$

где $v_n(N)$ определяется формулой (3). Кроме того, учитывая формулу (9), имеем

$$Q_{N-m} = \frac{v_{N-1}(N) \Gamma(m/2) \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{N-m} \sqrt{(\pi q_{N-m})^{N-m} \det R_{N-m}}}{\Gamma(N/2)}.$$

Подставляя эту величину в (22), находим выражение для $(N-m)$ -мерной плотности вероятностей в виде

$$p_{N-m}(\mathbf{r}_{N-m}) = \frac{\Gamma(N/2) \Phi_{N-m}(r_{N-m})}{v_{N-1}(N) \Gamma(m/2) \sqrt{(\pi q_{N-m})^{N-m} \det R_{N-m}} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{N-m}}. \quad (23)$$

Здесь $\Phi_{N-m}(r_{N-m})$ определяется формулой (19), а r_{N-m}^2 – формулой (21).

В формулы (21) и последующие входит коэффициент

$$q_{N-m} = (N-m) \frac{v_{N-m-1}(N-m)}{v_{N-m+1}(N-m)}, \quad (24)$$

который получается из (12) заменой N на $N-m$. Преобразуем его. Учтем, что согласно формуле (3),

$$v_{N-m-1}(N-m) = \int_0^\infty x^{N-m-1} f_{N-m}(x) dx, \quad v_{N-m+1}(N-m) = \int_0^\infty x^{N-m+1} f_{N-m}(x) dx.$$

Подстановка сюда (20), переход к полярным координатам и интегрирование дают

$$\begin{aligned} v_{N-m-1}(N-m) &= D_{N-m} \frac{\Gamma(m/2)\Gamma[(N-m)/2]}{2\Gamma(N/2)} v_{N-1}(N), \\ v_{N-m+1}(N-m) &= D_{N-m} \frac{N-m}{N} \frac{\Gamma(m/2)\Gamma[(N-m)/2]}{2\Gamma(N/2)} v_{N+1}(N). \end{aligned} \quad (25)$$

Комбинируя эти соотношения и (24), находим, что коэффициент q_{N-m} не зависит от m :

$$q_{N-m} = N \frac{n_{N-1}(N)}{n_{N+1}(N)} = q_N.$$

Поэтому во всех приведенных формулах можно q_{N-m} заменить на q_N .

Подставляя (25) в правую часть (17), видим, что выражение (17) представляет собой тождество, справедливое при любых $D_{N-m} \neq 0$. В дальнейшем для простоты будем считать $D_{N-m} = 1$. При этом, согласно (19) и (20), имеем

$$\Phi_{N-m}(r_{N-m}) = f_{N-m}(r_{N-m}) = \int_0^\infty t^{m-1} f_N(\sqrt{r_{N-m}^2 + t^2}) dt, \quad (26)$$

и формула (23) окончательно принимает вид

$$p_{N-m}(\mathbf{x}_{N-m}) = \frac{\Gamma(N/2) f_{N-m}(r_{N-m})}{v_{N-1}(N) \Gamma(m/2) \sqrt{(\pi q_N)^{N-m} \det R_{N-m} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{N-m}}}, \quad (27)$$

где

$$r_{N-m}^2 = q_N^{-1} (U_{N-m} \mathbf{x}_{N-m})^T R_{N-m}^{-1} (U_{N-m} \mathbf{x}_{N-m}). \quad (28)$$

В силу указанных выше свойств функции $f_{N-m}(x)$ это распределение существует для всех $0 \leq m \leq N-1$.

Выбрав $m = N-1$, из (27) получаем, в частности, одномерную плотность вероятностей любой из компонент ξ_i вектора $\overset{1}{\xi}_N$:

$$p_1(x_1) = \frac{\Gamma(N/2)}{v_{N-1}(N) \Gamma[(N-1)/2] \sqrt{\pi q_N \sigma_1}} \int_0^\infty t^{N-2} f_N(\sqrt{q_N^{-1} x_1^2 / \sigma_1^2 + t^2}) dt.$$

Отсюда следует, что вид одномерных плотностей вероятностей одинаков для всех случайных величин ξ_i . Отличие состоит только в значениях их дисперсий σ_i^2 .

Положив $m = N - 2$, из формулы (27) находим плотность распределения вероятностей двумерного вектора $\xi_2 = (\xi_i, \xi_j)$, соответствующего N -мерному вектору $\xi_N = (\xi_1, \dots, \xi_N)$:

$$p_2(x_i, x_j) = \frac{(N-2) f_2(r_2)}{2\pi q_N v_{N-1}(N) \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\det R_2}}. \quad (29)$$

Сюда входит двумерная корреляционная матрица (10)

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{ij} \\ \rho_{ji} & 1 \end{bmatrix},$$

где $\rho_{ij} = \rho_{ji} = \rho$ – коэффициент корреляции величин ξ_i и ξ_j . Поэтому $\det R_2 = 1 - \rho^2$.

Далее, из (26) имеем

$$f_2(r_2) = \int_0^\infty t^{N-2} f_N(\sqrt{r_2^2 + t^2}) dt$$

и квадрат аргумента этой функции, согласно (28), есть

$$r_2^2 = \frac{(x_i/\sigma_i)^2 - 2\rho(x_i x_j/\sigma_i \sigma_j) + (x_j/\sigma_j)^2}{q_N(1-\rho^2)}.$$

Для разных пар случайных величин ξ_i и ξ_j вектора ξ_N ($i \neq j$) плотность распределения вектора (ξ_i, ξ_j) имеет вид (29), а отличие состоит только в величинах дисперсий σ_i^2 , σ_j^2 и коэффициента корреляции ρ_{ij} .

Продолжая эти рассуждения, нетрудно убедиться, что для данной базовой функции $f_N(t)$ будут одинаковыми по форме все трехмерные распределения, все четырехмерные и т.д. Числовые параметры этих распределений в общем случае различны, но коэффициенты корреляции ρ_{ij} между одной и той же парой величин ξ_i и ξ_j в разных распределениях имеют одно и то же значение.

Теперь допустим, что известны все N -мерные распределения некоторых случайных величин ξ_N из множества случайных величин ξ_L , где $L > N$, и эти распределения обладают только что перечисленными

свойствами. Возникает вопрос: можно ли по этим N -мерным распределениям построить их общее L -мерное распределение вероятностей? Иными словами, если выше решалась задача получения из распределения большего числа измерений распределений меньшего их числа, то теперь вопрос состоит в возможности решения обратной задачи – получения распределения большего числа измерений, охватывающего все распределения меньшего числа измерений.

Дадим ответ на этот вопрос. Обратимся к соотношению (26). Заменим в нем N на $N+1$, положим $m = 2$ и обозначим $r_{N-1} = x$:

$$f_{N-1}(x) = \int_0^{\infty} t f_{N+1}(\sqrt{x^2 + t^2}) dt .$$

Применим к левой и правой частям этого равенства оператор $d/(xdx)$. Деля естественное предположение что $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{N+1}(x) = 0$, получаем выражение

$$f_{N+1}(x) = -\frac{d}{xdx} f_{N-1}(x), \quad (30)$$

позволяющее определить по функции $f_{N-1}(x)$ для N -мерной случайной величины функцию $f_{N+1}(x)$ для соответствующей ей $(N+1)$ -мерной случайной величины. Нахождение нормирующего множителя C_{N+1} по формуле, аналогичной (2), не составляет труда.

Формула (30) позволяет увеличивать размерность плотности распределения только на две единицы. Дадим способ их увеличения на нечетное число единиц.

Положим в (26) $m = 1$ и $r_{N-1} = x$:

$$f_{N-1}(x) = \int_0^{\infty} f_N(\sqrt{x^2 + t^2}) dt . \quad (31)$$

Выполним преобразование Ханкеля нулевого порядка [4] функции $f_N(x)$:

$$\tilde{f}_N(u) = \int_0^{\infty} f_N(x) J_0(ux) x dx .$$

Подставим обратное ему преобразование

$$f_N(x) = \int_0^{\infty} \tilde{f}_N(u) J_0(xu) u du$$

в интеграл правой части выражения (31), поменяем порядок интегрирования и воспользуемся соотношениями [5]

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha \sqrt{x^2 + z^2}) dx = \sqrt{\frac{\pi z}{2\alpha}} J_{-\frac{1}{2}}(\alpha z), \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z).$$

Найдем

$$f_{N-1}(x) = \int_0^{\infty} \tilde{f}_N(u) \cos(xu) du.$$

Это – косинус-преобразование Фурье преобразования Ханкеля функции $f_N(x)$. Подставив его в уравнение (31), приведем последнее к виду

$$\int_0^{\infty} \tilde{f}_N(u) \cos(xu) du = f_{N-1}(x).$$

Произведем здесь замену N на $N+1$ и выполним обратное косинус-преобразование Фурье этого уравнения:

$$\tilde{f}_{N+1}(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_N(x) \cos(ux) dx. \quad (32)$$

Функция $f_{N+1}(x)$, соответствующая плотности распределения вероятностей с числом измерений, на единицу большим, чем исходная $f_N(x)$, находится из (32) применением обратного преобразования Ханкеля. Если результаты всех преобразований конечны и неотрицательны, то искомая плотность распределения вероятностей имеет смысл. При выполнении этих условий применение к найденной функции $f_{N+1}(x)$ соотношения (30) позволяет увеличивать размерность плотности распределения на любое нечетное количество единиц.

Библиографический список

1. Доценко С.В. Модель многомерного распределения вероятностей. / С.В. Доценко/ Вестн. СевГТУ. Сер. Информатика, электроника, связь: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2001. — Вып. 31. — С. 25–34.
2. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королько, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин — М.: Наука, 1985. — 640 с.
3. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М.: ФМ, 1966. — 295 с.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М.: ИЛ, 1955. — 667 с.
5. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М.: ФМ, 1962. — 1100 с.

Поступила в редакцию 5.11.2001 г.