

УДК 551.46

ЭФФЕКТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Дворянинов Г.С.

Морской Гидрофизический Институт НАН Украины,

Капитанская 2, Севастополь, Украина, 99011

E-mail: @alpha.mhi.iuf.net.sebastopol

Рассмотрена проблема возникновения осреднённых (стационарных) потоков в вязкой жидкости, индуцированных нелинейными волновыми возмущениями. Получены уравнения движения для волнового и индуцированного полей. Обсуждается физический механизм возникновения стационарного переноса. Показано, что его скорости по параметру нелинейности на порядок меньше, чем скорости волнового движения, и экспоненциально затухают вне пограничного слоя у поверхности жидкости, по которой распространяется волна. В случае плоского движения для индуцированного стационарного переноса получено решение в общем виде.

Введение. Нелинейные и вязкие эффекты в гидродинамических волнах проявляются, в частности, в возникновении направленного осреднённого переноса энергии, импульса, тепла и масс. Эти потоки не являются следствием волн, как это трактовалось в [1-3], они появляются одновременно с самими волновыми возмущениями как следствие сопротивления среды попытке вывести её из предшествующего состояния (например, – покоя). Она в силу свойства инертности не может мгновенно подстраиваться под воздействие внешних сил (возмущений), требуется время адаптации, так как любое возмущение, и соответствующее – приспособление, распространяются с конечной скоростью. Поэтому, если внешнее воздействие изменяется во времени, то реакция среды всё время запаздывает, эффект отставания в изменчивости её динамики, интегрируясь, накапливается в некоторое осреднённое состояние из предыдущих реакций, и отклик в данный момент оказывается, естественно, другим, чем, если бы подстройка происходила мгновенно. Причем, чем возмущение более высокой частоты, тем большее запаздывание реакции на него. Итак, накопление (интегрирование и осреднение) энергии и передача части её в большие временные масштабы движения является следствием инерционного эффекта, который в природе есть фундаментальное свойство, согласно которому ничто не может изменяться с бесконечной скоростью. И в связи с этим среда вынуждена переводить часть энергии в некоторые медленные масштабы. По существу, инерционность (нелинейность) движения связана с релятивистским эффектом.

В [4] строго получены основные уравнения, соотношения и масштабные оценки, описывающие динамику волнового и стационарного

полей, генерируемых в жидкости волнами. В [1-3] и др., где исследовались совместные вязкие и нелинейные эффекты, возникающие под воздействием волн, в частности, генерация среднего переноса масс, получены результаты, не соответствующие выводам теории [4]. Из решений, представленных в этих работах, следует парадоксальный вывод, что поверхностные волны даже бесконечно малой амплитуды при нелинейном движении возбуждают стационарные течения с бесконечно большими скоростями. При этом они растут линейно при удалении от источника энергии – поверхностных волн! Как будет показано ниже, эти выводы являются следствием неаккуратного вывода соответствующих уравнений и противоречивой постановки задачи, когда в уравнениях движения учитываются турбулентные напряжения в жидкости, а при формулировании граничных условий рассматривается ламинарный случай. Кроме того, опускается из виду факт, что турбулентные пульсации, а значит и напряжения, обусловлены как полем волновых скоростей, так и полем индуцированного стационарного течения, и функциональное поведение этих частей напряжений в зависимости от пространственных координат, вообще говоря, разное.

Уравнения движения нелинейной волновой динамики в жидкости. При исследовании динамики волновых возмущений жидкости будем исходить из общих уравнений гидромеханики [4]

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

где U_i – компоненты скорости, P – давление, ν – коэффициент молекулярной вязкости; t – время, x_i – пространственные координаты и принято обычное правило суммирования по индексам (иногда называемое правилом Эйнштейна), которые изменяются от единицы до трёх, а $\partial/\partial x_j$ – операторы взятия частной производной.

В общем случае динамические характеристики состоят из суммы средних величин, величин, флуктуирующих с частотой волн, и высокочастотных случайных (турбулентных) пульсаций. Поэтому представим

$$\{U_i, P\} = \{\bar{U}_i, \bar{P}\} + \{\tilde{U}_i, \tilde{P}\} + \{U'_i, P'\} \quad (3)$$

и примем такие свойства осреднения по времени и по ансамблю:

$$\begin{aligned}
\bar{f}' &= 0, \quad \tilde{f} = 0, \quad \langle f' \rangle = 0, \quad \overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}, \\
\langle \tilde{f}g \rangle &= \tilde{f} \langle g \rangle, \quad \langle \bar{f}g \rangle = \bar{f} \langle g \rangle, \\
\langle \bar{f} \rangle &= \bar{f}, \quad \overline{\tilde{f}g'} = \langle \tilde{f}g' \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

В (4) $\bar{f}$ – среднее значение, осреднённое за период волн (или за бесконечное время), $\tilde{f}$ – флуктуирующая с частотой волн часть, f' – турбулентные пульсации, $\langle f \rangle$ – осреднение по ансамблю, которое предполагает осреднение по большому числу реализаций, имеющих одинаковую фазу по отношению к волновым колебаниям, так что

$$\langle f \rangle = \bar{f} + \tilde{f}. \tag{5}$$

Из (2) – (4) следует, что

$$\partial_i \bar{U}_i = \partial_i \tilde{U}_i = \partial_i U'_i = 0, \tag{6}$$

где для компактности записи, оператор взятия частных производных переобозначен как оператор ∂_i .

После подстановки (3) в (1) и осреднения по ансамблю, получим уравнения турбулентного движения при волновых его возмущениях

$$\begin{aligned}
&\partial_i \tilde{U}_i + \bar{U}_j \partial_j \bar{U}_i + \bar{U}_j \partial_j \tilde{U}_i + \tilde{U}_j \partial_j \bar{U}_i + \partial_j \langle U'_i U'_j \rangle + \\
&+ \partial_j (\tilde{U}_i \tilde{U}_j) = -(\partial_i \bar{P} + \partial_i \tilde{P}) + \nu (\partial_j \partial_j \bar{U}_i + \partial_j \partial_j \tilde{U}_i).
\end{aligned} \tag{7}$$

Усреднение по времени (7) даёт уравнения для среднего поля в турбулентном движении

$$\bar{U}_j \partial_j \bar{U}_i = -\partial_i \bar{P} + \nu \partial_j \partial_j \bar{U}_i - [\partial_j (\overline{U'_i U'_j}) + \partial_j (\overline{\tilde{U}_i \tilde{U}_j})]. \tag{8}$$

Член в квадратных скобках представляет собой полные напряжения Рейнольдса, в которых последнее слагаемое $\tilde{\tau} \equiv -(\overline{\tilde{U}_i \tilde{U}_j})$ является стационарной, не зависящей от времени, их добавкой, обусловленной волновой составляющей поля скорости, а $\tau' \equiv -(\overline{U'_i U'_j})$ турбулентными пульсациями. Наличие первого члена делает уравнения отличными от обычных, описывающих средний турбулентный поток, не подверженный волновым возмущениям, и определяет отток энергии из волновой части в среднее движение, о чём говорилось выше. Кроме того, важно, что и во втором члене теперь «сидит» вклад волн.

Это принципиальные отличия, имеющие место и во всех других соотношениях и уравнениях, полученных ниже. Эффекты, связанные с ними, будут рассмотрены.

Вычитая (8) из (7), имеем уравнения, описывающие динамику волновой части поля скорости

$$\begin{aligned} \partial_i \tilde{U}_i + [\bar{U}_j \partial_j \tilde{U}_i + U_j \partial_j \bar{U}_i] = -\partial_i \tilde{P} + \nu \partial_j \partial_i \tilde{U}_i - \\ - \partial_j (\tilde{U}_i \tilde{U}_j - \overline{\tilde{U}_i \tilde{U}_j}) - \partial_j (< U'_i U'_j > - \overline{U'_i U'_j}). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (9), (6) незамкнуты, так как член

$$\tau'_{ij} \equiv -< U'_i U'_j > + \overline{U'_i U'_j} \quad (10)$$

неизвестен. Однако τ'_{ij} имеет ясный физический смысл. Он представляет собой разность турбулентных напряжений Рейнольдса при наличии и отсутствии волн.

Так как неизвестно, каким образом найти τ'_{ij} или выразить их через скорости, описание волновых возмущений оказывается принципиально сложной задачей, требующей дополнительных гипотез. Существенно здесь и то, что каждая из систем уравнений (7)-(9), как это легко видеть, не является независимой; они являются частью всей системы (7)-(9), так как сцеплены входящими в них общими членами, что ещё более усложняет проблему.

Важную оценку τ'_{ij} можно получить следующим образом. Вычтем (7) из (1). Умножая получившиеся уравнения для U'_i на U'_j , а уравнения для U'_j на U'_i , и суммируя их, получим уравнения относительно напряжений Рейнольдса. Осредняя уже их независимо по ансамблю, а затем беря разность результатов этих осреднений, получим уравнения для τ'_{ij}

$$\begin{aligned} D_t \tau'_{ij} + \tilde{U}_\alpha \partial_\alpha \tau'_{ij} + \tau'_{j\alpha} \partial_\alpha \bar{U}_i + \tau'_{i\alpha} \partial_\alpha (\bar{U}_j + \tilde{U}_j) + \tau'_{j\alpha} \partial_\alpha \tilde{U}_i - \\ - \overline{\tau'_{j\alpha} \partial_\alpha \tilde{U}_i} - \overline{\tau'_{i\alpha} \partial_\alpha \tilde{U}_j} - \overline{\tilde{U}_\alpha \partial_\alpha \tau'_{ij}} = \\ = -\{\tilde{U}_\alpha \partial_\alpha \overline{U'_i U'_j} + \overline{U'_j U'_\alpha} \partial_\alpha \tilde{U}_i + \overline{U'_i U'_\alpha} \partial_\alpha \tilde{U}_j\} + \\ + \partial_\alpha (\overline{U'_i U'_j U'_\alpha}) - \partial_\alpha < U'_i U'_j U'_\alpha > - < U'_j \partial_i P' > + \\ + \overline{U'_j \partial_i P'} - < U'_i \partial_j P' > + \overline{U'_i \partial_j P'} + \\ + \nu [\partial_\alpha \partial_\alpha \tau'_{ij} - 2 < \partial_\alpha U'_i \partial_\alpha U'_j > + 2 \partial_\alpha \overline{U'_i \partial_\alpha U'_j}], \end{aligned} \quad (11)$$

где оператор $\bar{D}_t \equiv \partial_t + \bar{U}_j \partial_j$.

В (11) члены, стоящие в фигурных скобках, имеют тот же порядок величины, что и волновое движение, т.е. $O(\tilde{U}_i)$. Следовательно волновые возмущения напряжений Рейнольдса могут быть значительны, а именно иметь порядок самих волновых скоростей, которые и вызывают их появление. Поэтому при исследовании динамики волновых возмущений

величинами $\tilde{\tau}_{ij}'$, входящими в (9), в общем случае пренебрегать нельзя. Более того, как будет показано, учёт их приводит к верному решению проблемы.

Заметим, что экспериментальные исследования также дают значительные их величины [3].

Порядок скорости индуцируемого волнами среднего потока. Покажем, что индуцируемая волнами (из (9) теперь ясно, что её возникновение связано с волновыми напряжениями Рейнольдса как общее следствие вязкости и инертности жидкости) средняя скорость, имеет порядок крутизны волн в масштабе волновых скоростей. Действительно, выберем за характерный пространственный и временной масштабы для волнового движения соответственно k^{-1} (волновое число) и ω^{-1} (величину, обратную частоте волн); для волновой скорости – величину $a\omega$, где a – амплитуда возвышения поверхности. Это обычные, естественные масштабы [1-4]. Для индуцированной скорости масштаб неизвестен. Поэтому положим его равным $m(a\omega)$, где m – некоторый множитель, подлежащий определению.

Рассмотрим ламинарный случай, что не повлияет на величину масштаба. Обезразмеривая уравнения (9), получим

$$\begin{aligned} \partial_i \tilde{U}_i + m\varepsilon [\bar{U}_j \partial_j \tilde{U}_i + \tilde{U}_j \partial_j \bar{U}_i] = \\ = -\partial_i \tilde{P} + \alpha^2 \partial_j \partial_j \tilde{U}_i + \varepsilon [\partial_j (\tilde{U}_i \tilde{U}_j) - \tilde{U}_i \tilde{U}_j], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varepsilon = ak$, $\alpha = (vk^2 / \omega)^{1/2}$ – соответственно параметры нелинейности и вязкости. Первый из них – крутизна волн. Заметим, что, если рассматривать турбулентный случай и воспользоваться на основе полуэмпирической теории турбулентности обычной связью для напряжений Рейнольдса и тензором сдвига скоростей через коэффициенты турбулентного обмена, то в параметре α вместо v войдёт сумма молекулярного и турбулентного коэффициентов обмена. Всё остальное останется точно таким же.

Наличие α^2 при старших производных в (12) означает существование нестационарного пограничного слоя толщины $O(\alpha)$ и, как следствие, экспоненциальное затухание вне пограничного слоя нестационарной завихренности. Следовательно, силовой член $\partial_j (\tilde{U}_i \tilde{U}_j)$, ответственный за возникновение индуцированной волновыми напряжениями стационарной скорости, см. (8), также затухает вне слоя толщиной $O(\alpha)$. Уже это говорит в пользу того, что она должна быстро затухать при удалении от источника – поверхностных волн.

Обезразмерив (8), можно убедиться, что перед членом $\partial_j \partial_j \bar{U}_i$ появляется масштабный множитель $m\alpha^2/\epsilon$. Поэтому, чтобы уравновесить член $\partial_j (\bar{U}_i \bar{U}_j)$ в пограничном слое, его необходимо выбирать равным α^2 , т.е. $m\alpha^2/\epsilon = \alpha^2$. Откуда получаем $m = \epsilon$.

Итак, индуцированный волнами стационарный поток, имеет скорости, характерная величина которых определяется произведением характерной величины самих волновых скоростей и крутизны волн. А так как реально ϵ (кроме некоторых капиллярных волн) всегда много меньше единицы, то и *скорости стационарного движения, индуцированного волнами, должны быть не только ограничены, но, по крайней мере, на порядок, меньше скоростей волнового поля*. Этот результат получен абсолютно строго, без каких-либо ограничений на свойства движения, каких-либо упрощений, или приближений. Он – общ. Если при теоретическом исследовании этой проблемы порядок скоростей индуцированного поля получается большим, чем $\epsilon(a\omega)$, как это было в [1-3], то такая модель или теория, некорректны.

Граничные условия и зависимость от глубины скоростей индуцированной стационарной части поля. Итак, вязкость жидкости при нелинейных волновых возмущениях приводит к появлению стационарных течений – полей индуцированного движения – следующего порядка малости по параметру нелинейности волнового поля в сравнении с его скоростями. Эта проблема исследовалась, как указывалось, в [1-3]. В них получались скорости индуцируемых течений, напротив, превосходящие на много порядков амплитуды волновых скоростей, а в работах Ефимова и Гришина [2,3] и др. – бесконечно возрастающие с глубиной течения, т.е. там, где источника для них нет, так как завихренность волнового поля и само оно, являющиеся первопричиной их возникновения, исчезают, да и существует вязкая диссипация. Ещё раз подчеркнём, что согласно строгим выводам п.2, эти скорости обязаны быть на порядок меньше скоростей волнового поля. Если бы авторы этих работ рассмотрели более общую задачу, учитывая и перенос тепла волнами, то в их подходе получился бы абсурдный результат увеличения и температуры с глубиной до бесконечности.

В указанных работах при формулировании динамического условия отсутствия касательных напряжений на поверхности жидкости не были строго выделены составляющие напряжений, обусловленные разными механизмами. Более того, при выводе этого условия [3, с. 149], напряжения в жидкости принимались теми, что справедливы лишь для случая ламинарного движения без наличия волновых возмущений! В то же время в самих уравнениях движения [3, с. 147] учитывались турбулентные напряжения. Всё это и приводило к указанным выше результатам.

Когда рассматривается лишь некоторое среднее движение и турбулентные пульсации, полные касательные напряжения в жидкости представляют сумму вязких напряжений сдвига $\nu \partial_j U_i$ и напряжений Рейнольдса $\langle U_i' U_j' \rangle$

$$\tau_{ij} = \nu \partial_j \bar{U}_i + \langle U_i' U_j' \rangle. \quad (13)$$

Тензор напряжения Рейнольдса обычно связывают на основе гипотезы полуэмпирической теории турбулентности [5] с тензором деформации средних скоростей через коэффициенты турбулентного обмена. Предполагая изотропность, $\langle U_i' U_j' \rangle$ выражают как

$$-\langle U_i' U_j' \rangle = A_{ij} (\partial_j \bar{U}_i + \partial_i \bar{U}_j), \quad (13)^*$$

где A_{ij} – коэффициенты турбулентного обмена. Так и делалось в указанных работах, не учитывая при этом, что в данном случае кроме пульсационного существует ещё два поля: волновое и индуцированное. Стоит заметить, что изучался не абстрактный средний поток, включающий в себя и волновое движение, а тот и только тот, что сам генерировался волновым возмущением, волновым полем. И он, сам являясь его следствием, не мог включать в себя волновое поле.

Как отмечалось в п.1, чтобы выразить разность турбулентных напряжений при наличии и отсутствии волн, требуется введение дополнительных гипотез. На самом деле при рассмотрении нашей задачи эту трудность можно обойти.

Полные касательные напряжения в жидкости в этом случае, как следует из (7), имеют вид

$$\tau_{ij}^{пол} = \nu (\partial_j \bar{U}_i + \partial_i \bar{U}_j) - [\langle U_i' U_j' \rangle + \langle \tilde{U}_i \tilde{U}_j \rangle]. \quad (14)$$

Отличие (14) от (12) очевидно и имеет ясный смысл, который уже обсуждён. Здесь $\tau_{ij}^{пол}$ – полные напряжения, причём, $\langle U_i' U_j' \rangle$ содержат вклад в турбулентные напряжения как волнового поля, так и индуцированного среднего.

На границе раздела при взаимодействии с внешней средой в силу третьего закона Ньютона величина напряжений в жидкости должны равняться величине напряжений внешнего воздействия: $T^{вн} = \tau_{ij}^{пол}$. Если же его нет, то $\tau_{ij}^{пол} = 0$, и соответственно для индуцированного потока (усреднив по времени (14)) имеем

$$\nu \partial_j \bar{U}_i - [\langle U_i' U_j' \rangle + \langle \tilde{U}_i \tilde{U}_j \rangle] = 0 \quad \text{при } \xi, \quad (15)$$

а вычитая (15) из (14), будем иметь его для волновой части движения. Впрочем, эти соотношения можно было бы последовательно выписать из (8) и (9). Заметим, что ξ означает границу, уравнение которой необходимо задавать.

Дополнительным условием на границе, как всегда, является требование непротекания через неё, т.е. отсутствие нормальной к поверхности составляющей скорости $\vec{U}_n = 0$. На дне же справедливы условия прилипания: $\vec{U} = 0$, а при бесконечной глубине – обращение в ноль скоростей (условия затухания).

Покажем теперь, что скорости индуцированного поверхностными волнами потока удовлетворяют условию затухания при удалении от границы, по которой распространяются эти волны. Как и в работах [1-3], для простоты рассмотрим плоский случай и волновое возвышение поверхности ξ зададим обычным представлением: $\xi = a \cos(kx - \omega t)$, где a – амплитуда k – волновое число, а ω – частота волны.

Чтобы результаты были сопоставимы, рассмотрим случай плоского движения жидкости бесконечной глубины и воспользуемся декартовой системой координат, хотя в криволинейной, связанной с волнами, проблема с граничными условиями сильно упрощается. Координаты (x, z) совпадают соответственно с направлением распространения поверхностной волны и ускорением силы тяжести.

Важно, что турбулентные напряжения, входящие в (8), и другие осреднённые уравнения и соотношения обусловлены не только сдвигом среднего поля, которое само индуцируется волновым возмущением, но в первую очередь – сдвигом именно волновой части течений. Поэтому они представляют собой сумму двух составляющих, одна из которых связана с индуцированным полем, а вторая – с волновым:

$(U_i' U_j') = (\overline{U_i' U_j'})_- + (U_i' U_j')_{\sim}$. Нижние индексы $(-)$ и $(\sim)$ указывают, каким из полей обусловлены пульсации.

Первое слагаемое, как обычно, на основе полуэмпирической теории турбулентности можно выразить через градиенты среднего поля и коэффициенты турбулентного обмена [5]. Что касается второго, то, как указывалось в п.1, здесь необходимы дополнительные гипотезы, хотя возможно использовать и этот же полуэмпирический подход.

Принимая во внимание последнее соотношение, записывая уравнения (8) в дивергентном виде с использованием (6), и учитывая, что при периодическом возмущении $\bar{\partial}_t = \bar{\partial}_x \equiv 0$, имеем уравнение, описывающие осреднённую реакцию жидкости на волновые возмущения в данном случае

$$\alpha^2 \partial_{zz} \bar{U} = \partial_z [\overline{(U'W')}_\sim + (\widetilde{UW})]. \quad (16)$$

Здесь U и W компоненты скорости вдоль координат x и z соответственно

Вдоль вертикальной координаты среднее движение отсутствует уравнение вдоль неё обращается в ноль тождественно В (16) турбулентные напряжения теперь представляют лишь член, обусловленный только флуктуациями волновой составляющей поля скорости

Понятно, что рассматривается установившийся случай и произведено обезразмеривание величин с характерными масштабами, указанными в п.2; α – тот же малый параметр, однако в него вместо коэффициента молекулярной вязкости входит теперь сумма его и коэффициента турбулентного обмена, связывающего тензор деформации индуцированных течений и тензор турбулентных напряжений, обусловленных этими течениями.

Из (14) также получаем полные касательные напряжения, действующие в индуцированном поле

$$\tau_{xz}^{pol} = \alpha \partial_z \bar{U} - [\overline{(U'W')}_\sim + (\widetilde{UW})]. \quad (17)$$

И здесь в α вместо n входит сумма коэффициентов обмена, а пульсации, так же, как и в (16), обусловлены только волновыми скоростями

Рассматривается случай свободного движения, когда внешние напряжения отсутствуют $T^{en} = 0$. Тогда на границе, т.е. при $z = \xi$, как указывалось, и $T^{en} = \tau_{ij}^{pol}$

Решение (16) имеет вид

$$\alpha \bar{U}(z) = \int [\overline{(U'W')}_\sim + (\widetilde{UW})] dz + c_1 z + c_2, \quad (18)$$

где константы c_1 и c_2 подлежат определению, а первый член под интегралом есть турбулентные напряжения, обусловленные лишь непосредственно волновыми скоростями

Точное граничное условие на поверхности жидкости в декартовой системе координат получить невозможно. Более того, его невозможно получить и с приемлемой точностью, так как невозмущённая граница по половине волнового периода находится в разных средах: то в воздухе, то в воде. При разложении в ряд граничного условия относительно невозмущённой границы, вносится ошибка порядка крутизны волн, т.е. такой же величины, что и отыскиваемые скорости, что делает решение непригодным. При бесконечном же удалении от неё граничное условие физически естественно: там движение должно затухать. Следовательно,

выполняется условие стремления скорости к нулю на бесконечной глубине

$$\bar{U} = 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Тогда, учитывая, как показано в п.2, да и во многих работах, например, в [1-4], что скорости волнового поля и его завихренность вне вязкого пограничного слоя толщиной $O(\alpha)$ экспоненциально затухают, а $U'_\sim$ и $W'_\sim$, определяющие первый подынтегральный член, являются их флуктуациями и, стало быть, по необходимости вне его также затухают экспоненциально входящие под интеграл функции удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t, x, z) &\leq f_1 e^{-m_1 z}; & \tilde{W}(t, x, z) &\leq f_2 e^{-m_2 z} \\ U'_\sim(t, x, z) &\leq f'_1 e^{-m'_1 z}; & W'_\sim(t, x, z) &\leq f'_2 e^{-m'_2 z} \end{aligned} \quad (20)$$

в которых f_1, f_2, f'_1, f'_2 — максимально возможные во всей области движения амплитуды волновых скоростей и их пульсаций, а m_1, m_2, m'_1, m'_2 — наименьшие параметры, определяющие степень (скорость) затухания скоростей и их флуктуаций с глубиной. Тогда интеграл удовлетворяет такому неравенству

$$\int [(\overline{U'W'})_\sim + (\tilde{U}\tilde{W})] dz < -\frac{f_1 f_2}{m_1 + m_2} e^{-(m_1 + m_2)z} - \frac{f'_1 f'_2}{m'_1 + m'_2} e^{-(m'_1 + m'_2)z} \quad (21)$$

и при $z \rightarrow \infty$ стремится к нулю быстрее, чем правая часть (21). Откуда следует, что для того, чтобы решение (18) удовлетворяло условиям (19), входящие в него константы должны быть равны нулю. Следовательно $c_1 = c_2 = 0$ и решение, пригодное по всей глубине жидкости, окончательно имеет вид:

$$\bar{U}(z) = \frac{1}{\alpha} \int [(\overline{U'W'})_\sim + (\tilde{U}\tilde{W})] dz. \quad (22)$$

Но как только что было показано, интеграл уже вне вязкого пограничного слоя экспоненциально затухает, а, стало быть, и стационарное течение, индуцированное волновыми возмущениями в жидкости вследствие её инертности, сосредоточено в основном в пределах этого слоя, а вне его также затухает экспоненциально. Что и требовалось доказать.

Отметим принципиально важный момент. А именно: если бы изначально, до получения решения, полные напряжения в жидкости не были аккуратно разделены по механизмам, ответственным за их возникновения, как это было в [2,3], то член $(\overline{U'W'})$ под интегралом в решении (18) представлял бы смесь турбулентных пульсаций, обусловленную всеми причинами сразу, а не только волновыми, и его поведение с глубиной не

было бы известным. Как следствие, он бы не затухал экспоненциально при удалении от поверхности жидкости, и удовлетворить условию (19) было бы невозможно.

Решения конкретных задач для индуцированной скорости получить нетрудно, предварительно вычислив волновое поле скоростей, подставив в (20) и взяв интеграл. В частности, такие задачи рассмотрены в [1-4].

В заключение заметим следующее. Возникает такой вопрос. Получено решение для индуцированного волновыми возмущениями стационарного переноса (течения), удовлетворяющего уравнениям движения и естественному условию затухания его с глубиной и обращения в ноль на бесконечности. А удовлетворяет ли оно динамическому условию на поверхности?

Если задача внутренне непротиворечива и физически верна, то должно выполняться и это условие. Полное напряжение в любой точке жидкости, в том числе и на самой границе, определяется выражением (17). Продифференцировав (22) по z , положив $\tau_{xz}^{пол} = 0$ и сравнивая с (17), нетрудно убедиться, что динамическое условие выполняется. Это лишнее подтверждение тому, что и в уравнениях и в граничных условиях нужно точно учитывать *полные напряжения*, которые возникают в случае турбулентного движения жидкости при волновых её возмущениях.

Наконец, отметим, что математика, — полученные соотношения и решение, лишь подчёркивают физику возникновения индуцированных течений как невозможность среды подстраиваться мгновенно, — она переводит часть волновой энергии в стационарные потоки. Решение (22) и демонстрирует, что индуцированное течение возникает в результате сброса в область бесконечного временного масштаба части возмущающего жидкость импульса волнового поля, причем эта реакция интегральная. В аккумуляции энергии участвуют как непосредственно волновые напряжения, так и индуцированные волнами турбулентные

Библиографический список

1. Lonquet-Higgins M.S. Mass-transport in water waves / M.S. Lonquet-Higgins // Philos. Trans. Roy. Soc. — 1953. — № 903. — P. 535–581.
2. Ефимов В.В. Динамика поверхностных волн при учёте турбулентного характера движения / В.В. Ефимов, Г.А. Гришин // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. — 1972. — Т. 8. — № 1. — С. 52–56.
3. Ефимов В.В. Динамика волновых процессов в пограничных слоях атмосферы и океана / В.В. Ефимов. — Киев: Наук. думка, 1981. — 253 с.
4. Дворянинов Г.С. Эффекты волн в пограничных слоях атмосферы и океана / Г.С. Дворянинов. — Киев: Наук. думка, 1982. — 176 с.
5. Монин А.С. Статистическая гидромеханика Ч. 1. / А.С. Монин, А.М. Яглом. — М.: Наука, 1965. — 640 с.

Поступила в редакцию 23.02.2002 г.