

УДК 519.873

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ПРОФИЛАКТИКИ

Глеч С.Г., Обжерин Ю.Е., Песчанский А.И.

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sevastopol.ua

Построена полумарковская модель с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний двухкомпонентной системы с учетом проведения профилактики при отключении неработающей ТЯ. Получены приближенные выражения для основных стационарных характеристик надежности, получены стоимостные функционалы.

Опишем функционирование рассматриваемой двухкомпонентной системы. Система состоит из двух последовательных технологических ячеек (ТЯ1 и ТЯ2), представленных на рисунке 1, работающих взаимозависимо: при отказе одной ТЯ вторая отключается. Время безотказной работы ячеек – случайные величины (СВ) α_1 и α_2 с функциями распределения (ФР) $F_1(t)$, $F_2(t)$; время восстановления ячеек – СВ β_1 и β_2 с ФР $G_1(t)$, $G_2(t)$. В случайные моменты времени (через промежутки времени α_3 с ФР $F_3(t)$ проводится профилактика, время проведения профилактики – СВ β_3 с ФР $G_3(t)$. При этом профилактика проводится только в том случае, если момент профилактики попал на момент работы обеих ячеек. После проведения профилактики свойства ячеек (ячейки) полностью обновляются. СВ α_1 , α_2 , α_3 , β_1 , β_2 , β_3 предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания и дисперсии; у ФР $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$, $G_3(t)$ существуют плотности $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$.

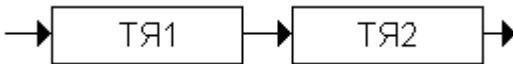
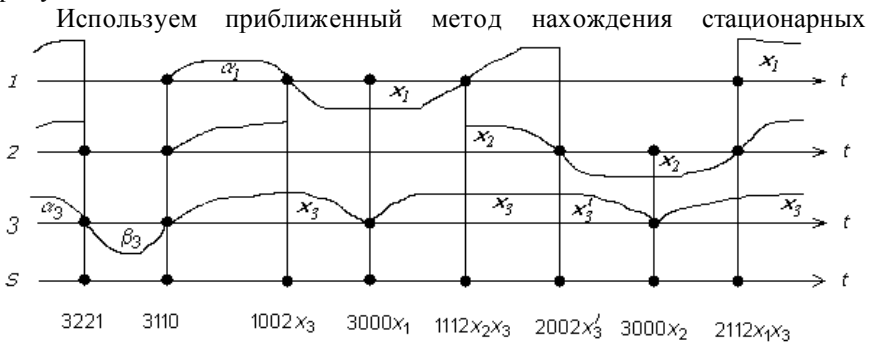


Рисунок 1 – Структурная схема двухкомпонентной технологической системы

Для описания функционирования исходной системы введем следующее пространство полумарковских состояний

$$E = \{i \bar{d} : i = 1, 2, 3; \bar{d} = (d_1, d_2, d_3); \bar{x} = (x_1, x_2, x_3)\},$$

где i – номер устройства, изменившего свое состояние последним; координата d_k вектора $\bar{d}$ фиксирует состояние устройства k : (для ячеек: $d_{1,2}=1$ – работа, $d_{1,2}=0$ – восстановление, $d_{1,2}=2$ – профилактика; для профилактики: $d_3=1$ – проводится, $d_3=0$ – не проводится, $d_3=2$ – ожидание профилактики). Значение компоненты x_k вектора $\bar{x}$ является время, оставшееся до момента изменения состояния устройства k . Временная диаграмма функционирования исходной системы приведена на рисунке 2.



характеристик системы, основанный на алгоритме фазового укрупнения [1,2].

Выберем опорную систему S_0 . Предположим, что у системы времена безотказной работы значительно больше соответствующих времен восстановления и времени проведения профилактики. Это приводит к тому, что опорной системой S_0 будет система, которая восстанавливается мгновенно и имеет мгновенную профилактику. Таким образом, опорная система имеет пространство состояний

$$E = \{3221, 3110, 1002x_3, 1112x_2x_3, 2002x_3, 2112x_1x_3\},$$

где

- 3221 – началась профилактика, работа ТЯ1 и ТЯ2 прервана; мгновенное состояние;
- 3110 – профилактика завершилась, работа ТЯ1 и ТЯ2 началась сначала;
- 1002 x_3 – ТЯ1 завершила работу, началось ее восстановление; ТЯ2 отключается до момента восстановления ТЯ1; время, оставшееся до проведения профилактики, $x_3 > 0$; мгновенное состояние;
- 1112 x_2x_3 – ТЯ1 восстановилась; время, оставшееся до окончания работы ТЯ2, $x_2 > 0$; время, оставшееся до проведения профилактики, $x_3 > 0$;

- 2002 x_3 – ТЯ2 завершила работу, началось ее восстановление; ТЯ1 отключается до момента восстановления ТЯ2; время, оставшееся до проведения профилактики, $x_3 > 0$; мгновенное состояние;
- 2112 x_1x_3 – ТЯ2 восстановилась; время, оставшееся до окончания работы ТЯ1, $x_1 > 0$; время, оставшееся до проведения профилактики, $x_3 > 0$;

Временная диаграмма функционирования опорной системы S_0 приведена на рисунке 3.

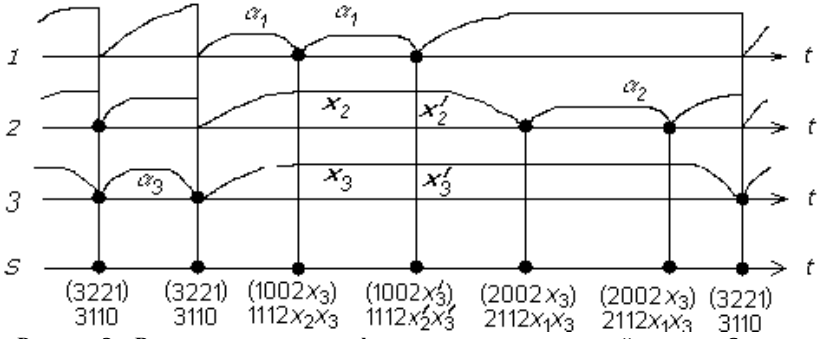


Рисунок 3 – Временная диаграмма функционирования опорной системы S_0

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ опорной системы:

$$P_{3110}^{3221} = \int_0^{\infty} \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t) f_3(t) dt, \quad P_{3110}^{1012x_2x_3} = \int_0^{\infty} f_1(t) f_2(x_2 + t) f_3(x_3 + t) dt,$$

$$P_{3110}^{2102x_1x_3} = \int_0^{\infty} f_2(t) f_1(x_1 + t) f_3(x_3 + t) dt, \quad P_{2102x_1x_3}^{2112y_1y_3} = 1, \quad P_{3221}^{3110} = 1, \quad P_{1012x_2x_3}^{1112y_2y_3} = 1.$$

$$x_2 < x_3: P_{1112x_1x_2}^{2102y_1x_3-x_2} = f_1(x_2 + y_1), \quad y_1 \geq 0, \quad P_{1112x_2x_3}^{1012x_2-t, x_3-t} = f_1(t), \quad 0 \leq t < x_2.$$

$$x_2 > x_3: P_{1112x_1x_2}^{3221} = \bar{F}_1(x_3), \quad P_{1112x_2x_3}^{1012x_2-t, x_3-t} = f_1(t), \quad 0 \leq t < x_3.$$

$$x_1 < x_3: P_{2112x_1x_3}^{1012y_2x_3-x_1} = f_2(x_1 + y_2), \quad y_2 \geq 0, \quad P_{2112x_1x_3}^{2102x_1-t, x_3-t} = f_2(t), \quad 0 \leq t < x_2.$$

$$x_1 > x_3: P_{2112x_1x_3}^{3221} = \bar{F}_2(x_3), \quad P_{2112x_1x_3}^{2102x_1-t, x_3-t} = f_2(t), \quad 0 \leq t < x_3.$$

Обозначим через ρ_0 и ρ_1 значения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ на состояниях 3110 и 3221 и предположим существование стационарной плотности $\rho_{1002}(x_3)$, $\rho_{1112}(x_2x_3)$, $\rho_{2002}(x_3)$ и $\rho_{2112}(x_1x_3)$ для состояний 1002 x_3 , 1112 x_2x_3 , 2002 x_3 и 2112 x_1x_3 . Составим для них систему интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
\rho_1 &= \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t) f_3(t) dt + \int_0^\infty \bar{F}_1(x_3) dx_3 \int_0^\infty \rho_{1112}(x_2 x_3) dx_2 + \\
&\quad + \int_0^\infty \bar{F}_2(x_3) dx_3 \int_0^\infty \rho_{2112}(x_1 x_3) dx_1; \\
\rho_{1002}(x_3) &= \rho_0 \int_0^\infty f_1(t) f_2(x_2+t) f_3(x_3+t) dt + \int_0^\infty f_1(t) \rho_{1112}(x_2+t, x_3+t) dt + \\
&\quad + \int_0^\infty f_2(x_2+t) \rho_{2112}(t, x_3+t) dt; \\
\rho_{2002}(x_3) &= \rho_0 \int_0^\infty f_2(t) f_1(x_1+t) f_3(x_3+t) dt + \int_0^\infty f_1(x_1+t) \rho_{1112}(t, x_3+t) dt + \\
&\quad + \int_0^\infty f_2(t) \rho_{2112}(x_1+t, x_3+t) dt; \\
\rho_1 &= \rho_0; \int_0^\infty \rho_{1002}(x_3) dx_3 = \rho_{1112}(x_2 x_3); \int_0^\infty \rho_{2002}(x_3) = \rho_{2112}(x_1 x_3); \\
\rho_0 + \rho_1 &+ \int_0^\infty \rho_{1002}(x_3) dx_3 + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho_{1112}(x_2 x_3) dx_2 dx_3 + \int_0^\infty \rho_{2002}(x_3) dx_3 + \\
&\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho_{2112}(x_1 x_3) dx_1 dx_3 = 1.
\end{aligned} \right. \quad (1)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением системы уравнений (1) являются функции

$$\begin{aligned}
\rho_{1112}(x_2 x_3) &= \rho_0 \int_0^\infty h_{f_1}(t) v_{f_2}(t, x_2) f_3(x_3+t) dt, \\
\rho_{2112}(x_1 x_3) &= \rho_0 \int_0^\infty h_{f_2}(t) v_{f_1}(t, x_1) f_3(x_3+t) dt,
\end{aligned} \quad (2)$$

где $h_{f_i}(t) = \sum_{n=1}^\infty f_i^{*(n)}(t)$ – плотность функции восстановления, порожденной

f_i ; $v_{f_i}(t, x_i) = f_i(t + x_i) + \int_0^t f_i(t + x_i - s) h_{f_i}(s) ds$ – плотность распределения

прямого остаточного времени для процесса восстановления.

Таким образом, стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ опорной системы определяется формулой (2), где постоянная ρ_0 находится в явном виде из условия нормировки.

Класс эргодических состояний опорной системы имеет вид:
 $E^0 = \{3221, 3110, 1002x_3, 1112x_2x_3, 2002x_3, 2112x_1x_3\}$.

Для исходной системы с указанным критерием отказа системы множества работоспособных E_+ и отказовых состояний E_- имеют вид:

$$E_+ = \{3110, 1112x_2x_3, 2112x_1x_3\},$$

$$E_- = \{3221, 3000x_1, 3000x_2, 1002x_3, 2002x_3\}.$$

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ и среднее стационарное время восстановления T_- приближенно найдем, используя формулы [1]:

$$T_+ \approx \frac{\int_{E_+} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-)}, \quad T_- \approx \frac{\int_{E_-} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_-} \rho(dz) P(z, E_+)}, \quad (3)$$

где $\rho(dz)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ опорной системы; $m(z)$ – средние времена пребывания в состояниях исходной системы; $P(z, dy)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ исходной системы.

$$\begin{aligned} \int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-) &= \rho(3110) P(3110, E_-) + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(1112x_2x_3) P(1112x_2x_3, E_-) dx_2 dx_3 + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(2112x_1x_3) P(2112x_1x_3, E_-) dx_1 dx_3 = \rho_0 + \\ &+ \rho_0 \int_0^\infty dx_2 \int_0^\infty dx_3 \int_0^\infty h_{f_1}(t) v_{f_2}(t, x_2) f_3(x_3 + t) dt + \\ &+ \rho_0 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_3 \int_0^\infty h_{f_2}(t) v_{f_1}(t, x_1) f_3(x_3 + t) dt = \rho_0 + \rho_0 \int_0^\infty h_{f_1}(t) \bar{F}_3(t) dt + \\ &+ \rho_0 \int_0^\infty h_{f_2}(t) \bar{F}_3(t) dt = \rho_0 \int_0^\infty [1 + H_{F_1}(t) + H_{F_2}(t)] f_3(t) dt, \end{aligned}$$

где $H_{F_i}(t) = \sum_{n=1}^\infty F_i^{*(n)}(t)$ – функция восстановления, порожденная F_i .

$$\int_{E_+} m(z) \rho(dz) = \rho(3110) m(3110) + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(1112x_2x_3) m(1112x_2x_3) dx_2 dx_3 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(2112x_1x_3)m(2112x_1x_3)dx_1dx_3 = \rho_0 M(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) + \\
& + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(1112x_2x_3)M(\alpha_1 \wedge x_2 \wedge x_3)dx_2dx_3 + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(2112x_1x_3)M(\alpha_2 \wedge x_1 \wedge x_3)dx_1dx_3 = \\
& = \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t)dt + \rho_0 \int_0^\infty dx_2 \int_0^\infty dx_3 \int_0^\infty h_{f_1}(t)v_{f_2}(t, x_2)f_3(x_3+t)dt \int_0^{x_2 \wedge x_3} \bar{F}_1(z)dz + \\
& + \rho_0 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_3 \int_0^\infty h_{f_2}(t)v_{f_1}(t, x_1)f_3(x_3+t)dt \int_0^{x_1 \wedge x_3} \bar{F}_2(z)dz = \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t)dt + \\
& + \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(z)dz \int_0^\infty h_{f_1}(t)\bar{V}_{f_2}(t, z)\bar{F}_3(z+t)dt + \\
& + \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_2(z)dz \int_0^\infty h_{f_2}(t)\bar{V}_{f_1}(t, z)\bar{F}_3(z+t)dt = \rho_0 M\alpha_3.
\end{aligned}$$

Таким образом, средняя стационарная наработка на отказ T_+ рассматриваемой системы приближенно вычисляется по формуле

$$T_+ \approx \frac{M\alpha_3}{\int_0^\infty [1 + H_{F_1}(t) + H_{F_2}(t)]f_3(t)dt}. \quad (4)$$

Перейдем к нахождению среднего стационарного времени восстановления T_- .

$$\begin{aligned}
& \int_{E_-} \rho(dz)P(z, E_+) = \rho(3221)P(3221, E_-) + \int_0^\infty \rho(1002x_3)P(1002x_3, E_-)dx_3 + \\
& + \int_0^\infty \rho(2002x_3)P(2002x_3, E_-)dx_3 = \rho_0 + \rho_0 \int_0^\infty dx_2 \int_0^\infty dx_3 \int_0^\infty h_{f_1}(t)v_{f_2}(t, x_2)f_3(x_3+t)dt + \\
& + \rho_0 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_3 \int_0^\infty h_{f_2}(t)v_{f_1}(t, x_1)f_3(x_3+t)dt = \rho_0 + \rho_0 \int_0^\infty h_{f_1}(t)\bar{F}_3(t)dt + \\
& + \rho_0 \int_0^\infty h_{f_2}(t)\bar{F}_3(t)dt = \rho_0 \int_0^\infty [1 + H_{F_1}(t) + H_{F_2}(t)]f_3(t)dt. \\
& \int_{E_-} m(z)\rho(dz) = \rho(3221)m(3221) + \int_0^\infty \rho(1002x_3)m(1002x_3)dx_3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} \rho(2002x_3)m(2002x_3)dx_3 = \\
& = \rho_0 M\beta_3 + \rho_0 \int_0^{\infty} dx_3 \int_0^{\infty} h_{f_1}(t) \bar{V}_{f_2}(t, z) f_3(x_3 + t) dt \int_0^{x_3} \bar{G}_1(z) dz + \\
& + \rho_0 \int_0^{\infty} dx_3 \int_0^{\infty} h_{f_2}(t) \bar{V}_{f_1}(t, z) f_3(x_3 + t) dt \int_0^{x_3} \bar{G}_2(z) dz = \\
& = \rho_0 M\beta_3 + \rho_0 \int_0^{\infty} \bar{G}_1(z) dz \int_0^{\infty} h_{f_1}(t) \bar{F}_3(z + t) dt + \rho_0 \int_0^{\infty} \bar{G}_2(z) dz \int_0^{\infty} h_{f_2}(t) \bar{F}_3(z + t) dt .
\end{aligned}$$

Следовательно

$$T_- \approx \frac{M\beta_3 + \int_0^{\infty} \bar{G}_1(z) dz \int_0^{\infty} h_{f_1}(t) \bar{F}_3(z + t) dt + \int_0^{\infty} \bar{G}_2(z) dz \int_0^{\infty} h_{f_2}(t) \bar{F}_3(z + t) dt}{\int_0^{\infty} [1 + H_{F_1}(t) + H_{F_2}(t)] f_3(y) dy} . \quad (5)$$

Используя формулы (4) и (5), определим стационарный коэффициент готовности системы. Учитывая соотношение $K_G = T_+ / (T_+ + T_-)$, имеем:

$$K_G \approx \frac{M\alpha_3}{M\alpha_3 + M\beta_3 + \int_0^{\infty} \bar{G}_1(z) dz \int_0^{\infty} h_{f_1}(t) \bar{F}_3(z + t) dt + \int_0^{\infty} \bar{G}_2(z) dz \int_0^{\infty} h_{f_2}(t) \bar{F}_3(z + t) dt} . \quad (6)$$

Формулы (4)-(6) могут быть использованы для анализа надежности технологической ячейки с учетом проведения профилактики.

Получим формулу для K_G при условии неслучайного распределения промежутков времени между проведениями профилактик $\tau \geq 0$. Учитывая, что $F_3(t) = 1(t - \tau)$, где $\tau = \text{const}$ будем иметь:

$$K_G(\tau) \approx \frac{\tau}{\tau + M\beta_3 + \int_0^{\tau} H_{F_1}(\tau - t) \bar{G}_1(t) dt + \int_0^{\tau} H_{F_2}(\tau - t) \bar{G}_2(t) dt} . \quad (7)$$

Построим стоимостные функционалы для данной ТЯ:

- средняя удельная прибыль за единицу календарного времени S ;
- средние удельные затраты за единицу времени исправного функционирования C .

Средняя удельная прибыль будет определяться следующим выражением [3]:

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \int_E \pi(dy) f_S(y) ,$$

где $\pi(dy)$ – стационарное распределение полумарковского процесса $\xi(t)$; $f_S(y)$ – ограниченная A -измеримая функция.

Стационарное распределение полумарковского процесса $\xi(t)$ равно [2]:

$$\pi(B) = \int_B \rho(dx)m(x) / \int_E \rho(dx)m(x),$$

где $\rho(dy)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$; $m(x)$ – средние значения времен пребывания в состояниях системы.

Таким образом,

$$S = \int_B \rho(dx)m(x)f_S(x) / \int_E \rho(dx)m(x).$$

Функция $f_S(y)$ имеет следующий вид:

$$f_S(y) = \begin{cases} c_1, y \in E_{3110}, E_{1112x_2x_3}, E_{2112x_1x_3}; \\ -c_2, y \in E_{1002x_3}; \\ -c_3, y \in E_{2002x_3}; \\ -c_4, y \in E_{3221}. \end{cases}$$

Средняя удельная прибыль будет иметь вид:

$$S(\tau) \approx \frac{c_1 \cdot \tau - c_2 \int_0^\tau H_{F_1}(\tau-t)\bar{G}_1(t)dt - c_3 \int_0^\tau H_{F_2}(\tau-t)\bar{G}_2(t)dt - c_4 \cdot M\beta_3}{\tau + M\beta_3 + \int_0^\tau H_{F_1}(\tau-t)\bar{G}_1(t)dt + \int_0^\tau H_{F_2}(\tau-t)\bar{G}_2(t)dt}. \quad (8)$$

Средние удельные затраты будут определяться следующим выражением [4]:

$$C = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t}}{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(t)}{t}} = \frac{\int_E \pi(dy)f_C(y)}{\int_E \pi(dy)f_T(y)},$$

где T – время исправного функционирования

Функция $f_C(y)$ и $f_T(y)$ имеет следующий вид:

$$f_C(y) = \begin{cases} 0, y \in E_{3110}, E_{1112x_2x_3}, E_{2112x_1x_3}; \\ c_2, y \in E_{1002x_3}; \\ c_3, y \in E_{2002x_3}; \\ c_4, y \in E_{3221}. \end{cases} \quad f_T(y) = \begin{cases} 1, y \in E_+; \\ 0, y \in E_-. \end{cases}$$

Таким образом,

$$C = \int_B \rho(dx)m(x)f_C(x) / \int_{E_+} \rho(dx)m(x).$$

Средние удельные затраты будут иметь вид:

$$C(\tau) \approx \frac{c_2 \int_0^{\tau} H_{F_1}(\tau-t) \overline{G_1}(t) dt + c_3 \int_0^{\tau} H_{F_2}(\tau-t) \overline{G_2}(t) dt + c_4 \cdot M\beta_3}{\tau}. \quad (9)$$

Выражения (7)-(9) могут быть использованы для решения оптимальной задачи нахождения значения τ_{opt} , при котором K_f , S и C достигают экстремального значения.

Библиографический список

1. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.М. Новиков, А.Ф. Турбин — Кишинев: Штиинца, 1991. — 276 с.
2. Королук В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королук, А.Ф. Турбин — Киев: Наук думка, 1982. — 236 с.
3. Шуренков В.М. Эргодические процессы Маркова / В.М. Шуренков — М.: Наука, 1989. — 336 с.
4. Козлов Б.А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики / Б.А. Козлов, И.А. Ушаков — М.: Сов. радио, 1975. — 472 с.

Поступила в редакцию 07.04.2002 г.