

УДК 628.16

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРОВАНИЯ ЧЕРЕЗ ДВУХСЛОЙНЫЙ КРУПНОЗЕРНИСТЫЙ ФИЛЬТР

Папков С.О., Рудов Ю.М.

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок г. Севастополь, Украина, 99053

Получено точное решение уравнений фильтрации через двухслойный крупнозернистый фильтр. На основе данного решения дается сравнительная характеристика процессов фильтрации через двухслойный фильтр и фильтр с однородной загрузкой.

Для г. Севастополя всегда актуальной являлась проблема водоснабжения. Эта проблема по своей природе является комплексной и одной из компонент в ее решении является интенсификация работы скорых фильтров на водоочистных сооружениях. Повышение скорости фильтрации в них должно благоприятно отразиться на производительности всех водоочистных сооружений [1] согласно формуле:

$$Q_{\text{сут. полез.}} = Fv(T - t_0) - 3,6 qt n_0,$$

где F - суммарная площадь фильтров с нисходящим потоком воды, T - время работы в течение суток (ч), v - расчетная скорость фильтрации (м/ч), t - время простоя фильтра в связи с промывкой (ч), n_0 - число промывок каждого фильтра в сутки, q - интенсивность промывки ($\text{л/с}\cdot\text{м}^2$).

После осветления воды на отстойниках мутность в ней достигает порядка 12 мг/л , и осветленная вода может классифицироваться как малоконцентрированная суспензия.

Для описания процесса фильтрации через двухслойный фильтр используем уравнения, предложенные Д.М. Минцем [2]:

в верхнем слое загрузки

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial x \partial t} + a_0 v \frac{\partial C_A}{\partial x} + b_0 \frac{\partial C_A}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$C_A(0, t) = C_0; \quad C_A(x, 0) = C_0 e^{-Mx}, \quad t \in [0, t_\phi], \quad x \in [0, x_0],$$

в нижнем слое загрузки

$$\frac{\partial^2 C_B}{\partial x \partial t} + a_1 v \frac{\partial C_B}{\partial x} + b_1 \frac{\partial C_B}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$C_B(x_0, t) = C_A(x_0, t); \quad C_B(x, 0) = C_0 e^{-Mx}, \quad t \in [0, t_\phi], \quad x \in [x_0, h],$$

где x - расстояние от поверхности загрузки до рассматриваемого сечения, t - время фильтрации, v - скорость фильтрации, C_0 - мутность воды на входе в фильтр (она составляет после предварительного коагулирования воды 12 мг/л), h - высота загрузки фильтра, t_ϕ - время фильтроцикла, M - достаточно большая положительная константа, которая обеспечивает

непрерывность на характеристиках для уравнений (1, 2), a_i и b_i ($i=0, 1$) - параметры фильтрования, соответствующие верхнему и нижнему слоям загрузки и зависящие от скорости фильтрования, зерен загрузки, физико-химических свойств воды и загрузки (эти параметры определяют экспериментальным путем для конкретного водного бассейна и фильтра).

Данные уравнения и условия на характеристиках определяют функцию мутности в фильтре:

$$C(x, t) = \begin{cases} C_A(x, t), & x \leq x_0, \\ C_B(x, t), & x \geq x_0. \end{cases} \quad (3)$$

Согласно уравнениям (1-2) фильтрование является следствием двух противоположных процессов: изъятия частиц взвеси из воды и их закрепления на зернах загрузки под действием сил прилипания (коэффициенты b_i ($i=0, 1$)) и процесса отрыва ранее прилипших частиц под действием гидродинамических сил потока (коэффициенты a_i ($i=0, 1$)). Таким образом, для материала с большей грязеемкостью в верхнем слое должны выполняться неравенства:

$$a_0 < a_1, \quad b_0 > b_1.$$

Введем безразмерные величины:

$$t = \frac{t}{t_\phi}; \quad c = \frac{x}{h}; \quad c(c, t) = \frac{C}{C_0},$$

тогда в указанных координатах исходная краевая задача примет вид:

$$\frac{\partial^2 c_A}{\partial c \partial t} + a_0 v t_\phi \frac{\partial c_A}{\partial c} + b_0 h \frac{\partial c_A}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$c_A(0, t) = 1; \quad c_A(c, 0) = e^{-Mhc}, \quad t \in [0, 1], \quad c \in [0, c_0],$$

$$\frac{\partial^2 c_B}{\partial c \partial t} + a_1 v t_\phi \frac{\partial c_B}{\partial c} + b_1 h \frac{\partial c_B}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$c_B(c_0, t) = c_A(c_0, t); \quad c_B(c, 0) = e^{-Mhc}, \quad t \in [0, 1], \quad c \in [c_0, 1].$$

Физический смысл выражения $C_0 c(1, 1)$ - значение мутности на выходе из фильтра в конце фильтроцикла.

В постановке (4-5) данная задача является задачей Гурса с начальными данными на характеристиках. Общий подход к построению решения такой задачи дает либо метод характеристик, либо метод итераций [3]. В работе [2] задача фильтрования для однослойного фильтра решается в рядах. В [1] предлагается упрощенный подход когда уравнения в частных производных заменяются на обыкновенные дифференциальные уравнения.

Построим точные решения задачи (4-5) операторным методом [4]. Применим к уравнению (4) преобразование Лапласа по переменной t ,

тогда имеем соотношения

$$\begin{aligned}
 c_A(c, t) &\leftrightarrow \mathbb{C}_A(c, p); \quad \frac{\partial c_A}{\partial t} \leftrightarrow p\mathbb{C}_A - c_A(c, 0) = p\mathbb{C}_A - e^{-Mhc}; \\
 \frac{\partial c_A}{\partial c} &\leftrightarrow (\mathbb{C}_A)'_x(c, p); \quad \frac{\partial^2 c_A}{\partial c \partial t} \leftrightarrow p(\mathbb{C}_A)'_x(c, p) + Mhe^{-Mhc}; \\
 (p + a_0 vt_\phi)(\mathbb{C}_A)'_x(c, p) &+ b_0 hp\mathbb{C}_A(c, p) = e^{-Mhc}(b_0 h - Mh); \\
 \mathbb{C}_A(0, p) &= \frac{1}{p} \quad (c_A(0, t) = 1 \leftrightarrow \frac{1}{p}).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка по переменной χ имеет следующий вид:

$$\mathbb{C}_A(c, p) = \frac{e^{-Mhc}}{p + \frac{Ma_0 vt_\phi}{b_0 - M}} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p - \frac{Ma_0 vt_\phi}{b_0 - M}} \right) e^{-\frac{pb_0 h}{p + a_0 vt_\phi} c}. \tag{7}$$

Уравнение (5) преобразуется аналогично:

$$\begin{aligned}
 c_B(\mathfrak{c}, t) &\leftrightarrow \mathbb{C}_B(\mathfrak{c}, p); \quad \frac{\partial c_B}{\partial t} \leftrightarrow p\mathbb{C}_B - c_B(\mathfrak{c}, 0) = p\mathbb{C}_B - e^{-Mh(\mathfrak{c} + c_0)}; \\
 \frac{\partial c_B}{\partial \mathfrak{c}} &\leftrightarrow (\mathbb{C}_B)'_\mathfrak{c}(\mathfrak{c}, p); \quad \frac{\partial^2 c_B}{\partial \mathfrak{c} \partial t} \leftrightarrow p(\mathbb{C}_B)'_\mathfrak{c}(\mathfrak{c}, p) + Mhe^{-Mh(\mathfrak{c} + c_0)}; \\
 (p + a_1 vt_\phi)(\mathbb{C}_B)'_\mathfrak{c}(\mathfrak{c}, p) &+ b_1 hp\mathbb{C}_B(\mathfrak{c}, p) = e^{-Mh(\mathfrak{c} + c_0)}(b_1 h - Mh); \\
 \mathbb{C}_B(0, p) &= \mathbb{C}_A(c_0, p) \quad (\mathfrak{c} = c - c_0).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Считая в уравнении (8) переменную p параметром, получаем по переменной χ обыкновенное дифференциальное уравнение с начальным условием. Решая его методом вариации произвольной постоянной, можно выразить изображение обезразмеренной мутности в явном виде:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}_B(\mathfrak{c}, p) &= \frac{e^{-Mh(\mathfrak{c} + c_0)}}{p - \frac{Ma_1 vt_\phi}{b_1 - M}} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p - \frac{Ma_0 vt_\phi}{b_0 - M}} \right) e^{-\frac{pb_0 hc_0}{p + a_0 vt_\phi}} e^{-\frac{pb_1 h \mathfrak{c}}{p + a_1 vt_\phi}} + \\
 &+ e^{-Mhc_0} e^{-\frac{pb_1 h \mathfrak{c}}{p + a_1 vt_\phi}} \left(\frac{1}{p - \frac{Ma_0 vt_\phi}{b_0 - M}} - \frac{1}{p - \frac{Ma_1 vt_\phi}{b_1 - M}} \right).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Остается обратить полученные изображения (7), (9), что даст замкнутое выражение для вычисления мутности (3). Опуская громоздкие вычисления и преобразования несобственных интегралов, приведем конечный результат:

$$\begin{aligned}
 c_A(c, t) &= \frac{2e^{-b_0hc}}{\sqrt{p}} \int_0^{\sqrt{t}} \left(\sqrt{g_0} \operatorname{erf} \sqrt{g_0(t-y^2)} - \sqrt{g_0-a_0} e^{-a_0(t-y^2)} \operatorname{erf} \sqrt{(g_0-a_0)(t-y^2)} \right) \times \\
 &\quad \times e^{-g_0y^2} ch(2y\sqrt{g_0b_0hc}) dy + e^{-Mhc-a_0t}, \\
 c_B(c, t) &= e^{-Mhc-a_1t} + \frac{2e^{-Mhc_0-b_1h(c-c_0)}}{\sqrt{p}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-g_1y^2} ch(2y\sqrt{g_1b_1h(c-c_0)}) \times \\
 &\quad \times \left(\sqrt{g_1-a_0} e^{-a_0(t-y^2)} \operatorname{erf} \sqrt{(g_1-a_0)(t-y^2)} - \sqrt{g_1-a_1} e^{-a_1(t-y^2)} \operatorname{erf} \sqrt{(g_1-a_1)(t-y^2)} \right) dy \\
 &\quad + a_0 e^{-(b_0hc_0+b_1h(c-c_0))} \int_0^t \Delta(t-t) I(c, t) dt,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $g_j = \frac{Ma_j v t_\phi}{M - b_j}$; $b_j = a_j v t_\phi$ ($j = 0, 1$), $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ - функция ошибок [5],

$$\begin{aligned}
 I(c, t) &= \frac{2e^{-g_1t}}{p} \int_0^{p/2} e^{(g_1-g_0)t \sin^2 z} ch(2\sqrt{tg_0b_0h c_0} \sin z) ch(2\sqrt{tg_1b_1h(c-c_0)} \cos z) dz, \\
 \Delta(t) &= e^{-g_1t} - \frac{4(g_0-g_1)e^{-g_0t}}{p} \int_0^{\sqrt{t}} y \arcsin \frac{y}{\sqrt{t}} e^{(g_0-g_1)y^2} dy + \\
 &\quad + 2\sqrt{\frac{g_1-a_0}{p}} e^{-a_0t} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-(g_0-a_0)y^2} \operatorname{erf} \sqrt{(g_1-a_0)(t-y^2)} dy + \\
 &\quad + 2\sqrt{\frac{g_0}{p}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-g_1y^2} \operatorname{erf} \sqrt{g_0(t-y^2)} dy + \\
 &\quad + \sqrt{g_0(g_1-a_0)} \int_0^t e^{-a_0y} \operatorname{erf} \sqrt{g_0(t-y)} \operatorname{erf} \sqrt{(g_1-a_0)y} dy.
 \end{aligned}$$

Явная аналитическая форма решения (10) позволяет запрограммировать его вычисление в среде пакета Mathcad.

Обычно параметры фильтрования a и b находятся из серии натурных экспериментов, когда исследуется в частности, зависимость времени фильтроцикла от скорости фильтрования $(t_\phi)_j = t_\phi(v_j)$ (j - номер эксперимента). Аналитическая форма решения позволяет значительно упростить этот процесс.

Для верхнего слоя будем задавать параметры фильтрации в виде:

$$a_0 = \frac{1}{k} a_1; \quad b_0 = k b_1, \quad (12)$$

где параметр k определяет грязеемкость верхнего слоя загрузки, чем он выше, тем больше коэффициент прилипания и меньше коэффициент отрыва частиц взвеси в верхнем слое по сравнению с нижним.

Функция мутности, согласно вычислениям, проведенным по формуле (10), ведет себя качественно так же, как и для однородной загрузки. На рисунках 1 и 2 представлены ее значения в фиксированных слоях загрузки и при фиксированном времени

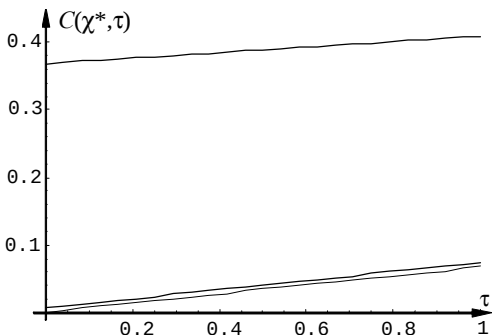


Рисунок 1 - Значение мутности по сечениям фильтра 0,1h, 0,5h, 0,9h (графики расположены сверху вниз, $b_1 = 0,001$, $a_1 = 0,00086$, $k = 2$)

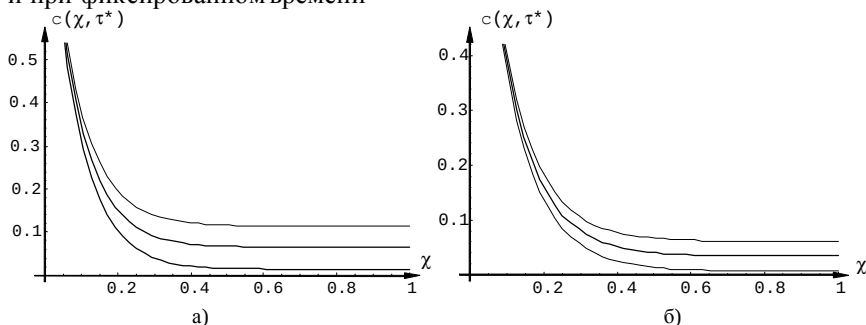


Рисунок 2 - Значение мутности по сечению фильтра в моменты времени 0,1 t_ϕ , 0,5 t_ϕ , 0,9 t_ϕ (графики расположены снизу вверх), при $b_1 = 0,001$, $a_1 = 0,00086$, (а) - однородная загрузка, (б) - $k = 2$

для $x_0 = h/3$.

Здесь видны следующие закономерности

- а) наибольшее очищающее воздействие дает верхний слой загрузки;
- б) с увеличением грязеемкости материала верхнего слоя загрузки уменьшается значение мутности по сечениям фильтра;
- в) со временем происходит накопление осадка в фильтре, причем характеристики этого процесса близки и для однородной загрузки, и для двухслойной

Таким образом, расчеты подтверждают экспериментальные наблюдения о том, что введение верхнего слоя загрузки с большей

грязеемкостью положительно сказывается на процессе фильтрования. Для дальнейшей интенсификации работы фильтров также возможно использование многослойных фильтров (в зарубежной практике используют сверхскоростные трехслойные фильтры с загрузкой из антрацита, кварцевого песка и гранита (ильменита) с диаметром зерен соответственно 1,0, 0,45 и 0,15 мм, в них скорость фильтрования достигает 200 м/ч).

Выполненный анализ решений уравнения фильтрования по исходным данным скорых фильтров на водоочистных сооружениях I и II очереди г. Севастополя позволяет рекомендовать допустимую в них скорость фильтрования как 7,4 м/ч при неизменном технологическом регламенте, что даст увеличение производительности порядка на 1500 м³/сут. Указанная работа проводилась на кафедре высшей математики СГТУ согласно х/д №1533 с "Севводоканалом".

Библиографический список

1. Журба М.Г. Очистка воды на зернистых фильтрах / М.Г. Журба — Львов: Вища шк., 1980. — 200 с.
2. Минц Д.М. Теоретические основы технологии очистки воды / Д.М. Минц. — М.: Стройиздат, 1964. — 263 с.
3. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.С. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 736 с.
4. Диткин В.А. Операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников — М.: Высш. шк., 1975. — 407 с.
5. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

Поступила в редакцию 15.03.2002 г.