

УДК 532.5.551

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАКЦИИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТНОЕ ДАВЛЕНИЕ

Мордашев В. И.

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

Рассматривается реакция свободной поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости на поверхностные возмущения, экспоненциально затухающие со временем.

Исследуем процесс развития волн, возникающих под действием давлений вида

$p_a = p_0 \psi(t) f(x)$; $f(x) = 1$, при $|x| < ut$; $f(x) = 0$ при $|x| > ut$; прикладываемых к свободной поверхности, начиная с момента времени $t = 0$. Здесь p_0 – амплитуда прикладываемого поверхностного давления, $\psi(t)$, $f(x)$ – функции, описывающие временную и пространственную изменчивость приложенного давления. Считая движение потенциальным, а возмущения атмосферного давления малыми, будем иметь для определения потенциала скорости уравнение Лапласа с соответствующими граничными и начальными условиями.

Применяя для решения сформулированной задачи преобразование Лапласа по времени t и преобразование Фурье по пространственной переменной x , получим при $\psi(t) = \exp(-kt)$ интегральное представление для возвышения свободной поверхности жидкости ζ

$$\zeta(x, t) = \delta_1(x, t) + \delta_2(x, t);$$

$$\delta_1(x, t) = a_1 \exp(-kt) \int_0^{\infty} a_5^{-1/2} m H \sin(umt + \arctg(2kum/a_3)) \cos mx dm;$$

$$\delta_2(x, t) = a_1 u \int_0^{\infty} (\gamma_1 a_6)^{-1/2} m H \sin(\sqrt{\gamma_1} t - \beta) \cos mx dm;$$

$$a_1 = -2p_0/(\pi\rho); \quad a_2 = \gamma_1 - u^2 m^2; \quad a_{3,4} = k^2 \pm a_2; \quad a_5 = a_3^2 + 4k^2 u^2 m^2; \\ a_6 = a_4^2 + 4k^2 \gamma_1; \quad \gamma_1 = m H (g + T m^2/\rho); \quad \beta = \arctg(2k\sqrt{\gamma_1}/a_4);$$

здесь u – скорость перемещения переднего фронта поверхностных возмущений, k – коэффициент, характеризующий скорость убывания величины приложенных возмущений, ρ – плотность жидкости, H – глубина жидкости, g – ускорение свободного падения, T – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Как легко заметить, δ_1 убывает с увеличением расстояния пропорционально x . Асимптотические выражения для δ_2 при больших положительных x найдем методом стационарных фаз. При $x > u_1 t$ $\delta_2 = \delta_{22}$, при $u_2 t < x < u_1 t$ $\delta_2 = \delta_{22} + \delta_{21}$, где

$$u_1 = (\sqrt{\gamma_1(m_0)})', \quad u_2 = \sqrt{gH},$$

m_0 – положительный корень уравнения $(\sqrt{\gamma_1(m)})'' = 0$.

Волна δ_{21} гравитационная, а δ_{22} – капиллярная. Скорость переднего фронта гравитационной волны u_1 , а капиллярная волна не имеет явно выраженного переднего фронта.

Вид волн δ_2 аналогичен волнам, возникающим от импульсивных давлений, приложенных к свободной поверхности жидкости, однако аргумент волн от импульсивных возмущений не имеет фазового сдвига β . Анализ показал, что

$$\lim_{m \rightarrow 0} \beta = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta = \lim_{k \rightarrow 0} \beta = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta = \lim_{u \rightarrow \infty} \beta = \lim_{u \rightarrow 0} \beta = \text{const}$$

и что величина β существенна в окрестности резонансных значений (корней уравнения $k^2 = \gamma_1 - u^2 m^2$).

Максимальная амплитуда волны δ_1 достигается в окрестности переднего фронта давления, вызывающего возмущение жидкости, и несколько запаздывает по сравнению с ним. Амплитуда δ_1 убывает со временем не медленнее, чем вынуждающие давления; $|\delta_1|$ увеличивается при уменьшении глубины жидкости, а с ростом k уменьшается. При $|x| > 4H$ амплитуда пренебрежимо мала. В области за фронтом прикладываемого давления профиль волны находится преимущественно над невозмущенной поверхностью жидкости, что говорит о наличии постоянной составляющей в волновом движении. Величина этой составляющей монотонно уменьшается с ростом времени или увеличением k . Рост k до $0,1 \text{ с}^{-1}$ не влияет на амплитуду и длину волн δ_1 при $u < 0,15 \text{ м/с}$, а при $u > 0,15 \text{ м/с}$ уменьшает амплитуду. Например, при $u = 1 \text{ м/с}$, $t = 0,2 \text{ с}$ в окрестности $x = 1 \text{ м}$ амплитуда волны с изменением k от $0,1 \text{ с}^{-1}$ до $0,01 \text{ с}^{-1}$ уменьшается в 2,3 раза, а длина волны остается равной $0,65 \text{ м}$. Отметим, что при любых u и t всегда можно подобрать столь малое k , что возвышение свободной поверхности, обусловленное волной, находящееся за фронтом приложенного атмосферного давления, будет целиком над невозмущенным положением жидкости. При этом $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_1 = 0$.

Рост u от $0,1 \text{ м/с}$ до 10 м/с увеличивает местные длины волн, что же касается амплитуд, то они могут, в зависимости от x и t , как увеличиваться, так и уменьшаться.

Пространственное распределение волны δ_{21} зависит от рассматриваемого момента времени, k и u . На рисунке 1 с точностью до множителя для $2p_0/\rho$ для $k=0,1 \text{ с}^{-1}$, $u=50 \text{ м/с}$ представлено пространственное распределение волны δ_{21} (сплошные линии) и ее амплитуды (штриховые линии) в моменты времени $t=10 \text{ с}$ (кривые 1), $t=25 \text{ с}$ (кривые 2), $t=50 \text{ с}$ (кривые 3). В фиксированной точке пространства

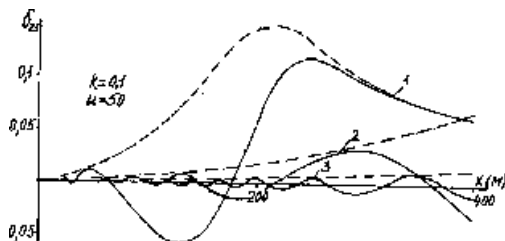


Рисунок 1 – Зависимость амплитуды от расстояния

местная длина волн с течением времени уменьшается, а с ростом x при постоянном времени увеличивается. При

неизменных x , u , t увеличение k уменьшает местные длины волн δ_{21} , причем это влияние уменьшается с увеличением

x ($t = \text{const}$) или ростом t ($x = \text{const}$). Изменение скорости перемещения вынуждающего давления от $0,001 \text{ м/с}$ до 50 м/с при тех же значениях k и t практически не влияет на длины волн δ_{21} , но существенно сказывается на амплитудах. Причем при малых значениях скорости вынуждающего давления амплитуда волн прямо пропорциональна u . Так, с уменьшением u от $0,1$ до $0,001 \text{ м/с}$ амплитуда уменьшается во столько же раз. На рисунке видно, что амплитуды волн δ_{21} могут иметь экстремум (максимум), который достигается при некоторых значениях $|x|/t$. Из формул следует,

что количество этих экстремумов определяется числом корней уравнения $a_4 = 0$. Экстремальное значение амплитуды убывает с увеличением k , u или x . Например, при увеличении k от 10 до 1 с^{-1} $\max\{A(m)\}$ уменьшается примерно в 200 раз (при $u=10 \text{ м/с}$), несколько сдвигаясь в область меньших значений координат. Причем

$$\lim_{u \rightarrow 0} A(m) = \lim_{u \rightarrow \infty} A(m) = 0$$

Зависимость периода волн от k и u качественно та же, что и у длин волн. Анализ показал, что амплитуды капиллярных волн δ_{22} , как правило, меньше, чем у δ_{21} . Исключение могут составить области, близкие к тем значениям $|x|/t$, при которых капиллярные волны достигают своих экстремальных значений.

Библиографический список

1. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн / Л.В.Черкесов. — К.: Наук думка, 1980. — 260 с.
2. Букатов А.Е. Волны в неоднородном море / А.Е. Букатов, Л.В. Черкесов. —

К.: Наук думка, 1983. — 223 с.

3. Монин А.С. Явления на поверхности океана / А.С. Монин, В.П. Красицкий.
— Л.: Гидрометеиздат, 1974. — 374 с.

Поступила в редакцию 15.03.2002 г.