

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Рудов Ю.М.

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок г. Севастополь, Украина, 99053

Проведено численное исследование характера и основных особенностей истечения из сопел сверхзвуковых газовых струй и их взаимодействия с преградами различной геометрической формы.

Экспериментальные исследования показали, что при натекании струй на преграды формируется сложный поток с разветвленной системой скачков уплотнения, содержащей области местного дозвукового течения, контактные разрывы, циркуляционные зоны и участки течения с большими градиентами параметров. Указанная сложность структуры потока создает и определенные трудности при выборе численной процедуры для нахождения решения поставленной задачи.

Целями вычислительных экспериментов являлись получение физической картины изучаемых течений; построение волновой структуры, границ растекающегося потока, выделение характерных линий, точек, областей; определение профилей давлений и скоростей; получение линий постоянных давлений, чисел Маха и температур.

В ходе численных расчетов оценивалось влияние большого комплекса начальных параметров на качественные и количественные характеристики исследуемых течений.

Для решения поставленной задачи пользовались моделью идеального совершенного газа, описываемой уравнениями Эйлера, которые являются математическим выражением законов сохранения массы, импульса и энергии

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial r} = -\frac{f}{r}, \quad (1)$$

где

$$a = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{Bmatrix}; \quad b = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{Bmatrix}; \quad f = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (e + p)v \end{Bmatrix}.$$

Система уравнений замыкалась уравнением состояния

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2), \quad (2)$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

На границах расчетной области ставились обычные для идеального газа граничные условия:

- условия непротекания на поверхности преграды;
- условие сверхзвукового входа на срезе сопла;
- условие на свободной границе.

Существенным является вопрос о выборе метода решения системы уравнений. В силу того, что физическая постановка задачи требует рассмотрения взаимодействия струй с преградами, имеющими сложную геометрическую форму, и соответственно – проведения расчетов на нерегулярных сетках, то в основу положена достаточно универсальная схема С.К. Годунова[1].

Рассмотрим задачу об обтекании затупленного тела, помещенного на срез сопла.

Обтекание образца, представляющего собой затупленное тело, расширяющимся потоком происходит при испытании головных частей летательных аппаратов в наземных условиях с помощью сильно недорасширенных сверхзвуковых струй из профилированного сопла или при обтекании тела струей из конусного сопла. Особенность такого обтекания заключается в наличии отошедшей ударной волны перед головной частью и существенно неравномерным набегающим потоком. При этом обычно задается режим в форкамере сопловой установки стенда, а течение на срезе сопла – установившееся течение задачи о запуске сопла.

Натекание потока на поверхность тела, температура которого отлична от температуры потока сопровождается теплообменом. При этом скорость набегающего потока U_n зависит от продольной координаты x . В большинстве практических задач теплообмена изменение U_n по поперечной координате y во внешнем потоке пренебрежимо мало по сравнению с изменением U по y в пристенной области. Эта область называется динамическим пограничным слоем и здесь x -составляющая скорости U возрастает от нуля на стенке до предельной величины, равной U_n . Обычно за толщину пограничного слоя принимается значение y , при котором U достигает $0,995U_n$.

Таким образом, задача исследования обтекания образца разбивается на два этапа. Первый этап заключается в определении внешнего набегающего потока, второй – в решении задачи переноса количества

движения и тепла вблизи поверхности тела. Последняя задача описывается уравнением пограничного слоя.

В свою очередь, задача определения внешнего набегающего потока разбивается естественным образом на две задачи. Первая задача состоит в расчете внутреннего течения от форкамеры до среза сопла, вторая – в расчете внешнего набегающего потока.

Расчет транзвукового течения газа в сопле предлагается выполнить методом последовательных приближений. Течение в осесимметричном сопле предполагается невязким и изоэнтропическим. Предполагаем, что внутри сопла не возникают скачки уплотнения или они достаточно слабы. Этого добиваются специальным профилированием околозвуковой части сопла.

Рассматриваемый метод исключает особенность в расчете параметров потока газа на звуковой линии и кроме задания энтальпии и энтропии на входе не требуется дополнительных условий. Значения энтальпии и энтропии находятся из уравнения Бернулли и условия изоэнтропичности.

Газодинамические параметры v , p , ρ нормированы на величины v_* , $\rho_* V_*^2$ и ρ_* соответственно, где символом «*» обозначены значения параметров в критическом сечении. Геометрические параметры нормированы на L_* – радиус критического сечения сопла.

С целью спрямления расчетной области выбираем криволинейную систему координат ξ, η , где $\eta = \eta(x, y)$ – уравнение линии тока, $\xi = \xi(x, y)$ – расстояние вдоль линии тока. Новые независимые переменные ξ, η определяются из решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \cos \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sin \theta\end{aligned}\tag{3}$$

с начальными условиями $x(\xi = 0, \eta) = 0$; $y(\xi = 0, \eta) = \sqrt{\eta}$.

В системе новых независимых переменных ξ, η уравнение неразрывности и условие безвихревого течения запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho v y \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cos \theta - \frac{\partial x}{\partial \eta} \sin \theta \right) \right) = 0;\tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(v \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cos \theta + \frac{\partial y}{\partial \eta} \sin \theta \right) \right) - \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.\tag{5}$$

Здесь x, y – независимые переменные исходной системы координат; ξ, η – новые независимые переменные криволинейной системы координат;

v – модуль вектора скорости; θ – угол вектора скорости, отсчитываемый от направления оси Ox .

Уравнение неразрывности (4) аналогично уравнению для трубки тока

$$\rho v s = I(\eta), \quad (6)$$

где $s(\xi, \eta) = y(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cos \theta - \frac{\partial x}{\partial \eta} \sin \theta)$ – эквивалент площади поперечного сечения трубки тока $\eta = \text{const}$. Вдоль каждой линии тока $\eta = \text{const}$ точка звуковой скорости соответствует условию $I(\eta) = s_*(\eta) = \min s(\xi, \eta)$, где $v = v_*$, $\rho = \rho_*$.

Исключая из уравнения (6) ρ с помощью уравнения Бернулли, получим нелинейное уравнение для определения модуля скорости v в каждой точке линии тока:

$$v^{\gamma-1}(\xi, \eta) - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v^{\gamma+1}(\xi, \eta) = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{s_*(\eta)}{s(\xi, \eta)} \right)^{\gamma-1}. \quad (7)$$

Направление θ вектора скорости в каждой точке определяется интегрированием уравнения (5), которое запишем в виде

$$v \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cos \theta + \frac{\partial y}{\partial \eta} \sin \theta \right) = \int_0^\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} d\xi. \quad (8)$$

В переменных x, h расчетная область представляет собой полосу

$G = \{0 \leq \eta < 1, 0 \leq \xi \leq H\}$. **Разобьём прямоугольную область G**

равномерной сеткой с шагом h_1 вдоль направления x и с шагом h_2 вдоль направления h . Зададим начальное поле направлений вектора скорости

$\theta_{ij} (i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n)$ в узлах сетки с учетом условия симметрии

$\theta_{i0} = 0$ на оси сопла и условия непроницаемости $\text{tg } \theta_{ij} = f(x)$ на его

стенке, где $y = f(x)$ – уравнение образующей сопла.

Из (3) получим разностные уравнения для определения значений координат x, y в узлах сетки:

$$\begin{aligned} x_{i+1,j} &= x_{i,j} + 0,5(\cos \theta_{i+1,j} + \cos \theta_{i,j})h_1; \\ y_{i+1,j} &= y_{i,j} + 0,5(\sin \theta_{i+1,j} + \sin \theta_{i,j})h_1; \end{aligned} \quad (9)$$

для $i = 0, \dots, m-1$; $j = 1, \dots, n-1$ и $x_{0,j} = 0$; $y_{0,j} = \sqrt{j h_2}$.

Разностный аналог уравнения (7) запишется в виде

$$(v_{i,j+1/2})^{\gamma-1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (v_{i,j+1/2})^{\gamma+1} = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{S_{*(j+1)}}{s(i,j+1/2)} \right)^{\gamma-1}. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) определяет модуль скорости на вертикальных сторонах разностных ячеек. Для определения $s_{i,j+1/2}$ и $S_{*(j+1/2)}$ запишем соотношение

$$s_{i,j+1/2} = y_{i,j+1/2} \left(\cos \theta_{i,j+1/2} \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{h_2} - \sin \theta_{i,j+1/2} \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{h_2} \right), \quad (11)$$

где $y_{i,j+1/2} = \frac{y_{i,j} + y_{i,j+1}}{2}$, $\theta_{i,j+1/2} = \frac{\theta_{i,j} + \theta_{i,j+1}}{2}$.

Критическое значение $i = i_*$ для каждой трубки тока $\eta_j \leq \eta \leq \eta_{i+1}$ соответствует $\min s_{i,j+1/2}$.

Уточнение поля направлений $\theta_{i,j}$ по найденным значениям $v_{i,j+1/2}$ осуществляется с помощью условия безвихревого характера течения (8). Для этого из (8) получим разностное трансцендентное уравнение

$$A \cos \theta_{i,j} + B \sin \theta_{i,j} = C, \quad (12)$$

где

$$A = 0,5(v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}) \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2h_2};$$

$$B = 0,5(v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}) \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2h_2};$$

$$C = \frac{h_1}{6} \left(\frac{v_{0,j+1/2} - v_{0,j-1/2}}{h_2} - \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{h_2} + 2 \sum_{k=1}^i \frac{v_{k,j+1/2} - v_{k,j-1/2} + v_{k-1,j+1/2} - v_{k-1,j-1/2}}{h_2} + 2 \sum_{k=1}^i \frac{v_{k,j+1/2} - v_{k,j-1/2}}{h_2} \right).$$

Проведенные численные исследования позволили дать классификацию различных режимов взаимодействия струй с преградами, построить ударно-волновую структуру течения, определить газодинамические и геометрические характеристики.

Для решения задач взаимодействия газовых струй с различными преградами, особенно в случае симметричного течения, когда оси струи и преграды совпадают, прежде всего, необходимо знать газодинамические параметры на оси.

Для начального участка недорасширенных и перерасширенных струй разработаны приближенные методы расчета давлений и чисел Маха, которые нами в расчетах были использованы.

За пределами начального газодинамического участка ударно-волновая структура носит периодический характер, что в свою очередь, влияет на форму струи, делая ее похожей на состыкованные «бочки». В каждой такой «бочке» существует ударная волна, пересекающая ось (под произвольным или прямым углом), что обуславливает скачкообразное изменение чисел Маха и статических давлений на оси.

Результаты расчетов подтверждаются опытными данными, полученными на газодинамической трубе. Эксперименты были проведены для чисел Маха $M_a = 1 \div 3$; нерасчетность истечения струй $n = 0,5 \div 12,8$; в качестве преград применялись плита, сфера, конус

Для создания математической модели сверхзвуковых струйных течений необходимо знать их физическую природу. Представляет практический интерес описать ударно-волновую структуру газовых струй, которая является весьма чувствительной к малейшему изменению начальных газодинамических параметров внутри сопел и их геометрических характеристик.

Для указанных целей нами широко была использована кинофотосъемка сверхзвуковых течений через оптический прибор ИАБ-451. Известно, что при определенных параметрах возникают неустойчивые течения, сопровождающиеся акустическими эффектами и интенсивными колебаниями волновой структуры. Применение скоростной киносъемки позволяет разобраться в физическом механизме таких режимов и указать диапазон параметров их существования

При истечении струй из связки сопел, а также при взаимодействии их с различными конструкциями образуются достаточно интенсивные возвратные течения газа. Для их исследования использованы специальные зонды для измерения силовых и векторных характеристик таких потоков.

Наглядную физическую картину возвратных течений дает широко используемый газодинамический метод обтекания исследуемых конструкций вязко-красящимися веществами. Нами усовершенствован данный метод: предложены специальные модели, упрощающие эксперимент и позволяющие получить картины линий тока во внутренних областях. Для измерения газодинамических параметров нами созданы ряд насадков

специальной конструкции, которыми можно получить профили полного и статистического давлений в труднодоступных внутренних областях течения.

Указанные методы применяются для экспериментального исследования течений газа: в свободных односопловых и многосопловых струях; при взаимодействии таких струй с преградами; при истечении струй в сверхзвуковом спутном потоке. Совместное использование результатов кинофотосъемки, масляных картин растекания газа и измерений параметров позволяет описать физическую картину трехмерных струйных течений газа.

Известно, что при истечении высоконапорного газа из сопел Лаваля образуются сверхзвуковые струи, имеющие развитую ударно-волновую структуру. Такие струи являются весьма интенсивными, дальнобойными, а при определенных начальных газодинамических параметрах их характеристики являются пульсирующими. Отмеченные свойства воздушных струй позволяют их применять не только в традиционных областях – авиационной и ракетной техники, – но и в различных устройствах для очистки, обдува и распыления.

Сопловые устройства рекомендуется использовать

- для очистки и обдува от налипания вязких и сыпучих веществ на различные поверхности, например, кузов автомобиля, железнодорожная платформа, лента транспортера;
- для очистки железнодорожных рельс;
- для очистки от различных налетов внутренней поверхности труб;
- для очистки корпусов морских судов (например, от ракушечника);
- для очистки различных конструкций от снега и льда;
- для санитарной обработки в целях дезинфекции животноводческих помещений и других сельскохозяйственных объектов;
- для промышленного опрыскивания садов, теплиц и виноградников;
- для интенсификации процессов в металлургии и нефтегазодобывающей промышленности;
- для бурения скважин.

В перечисленных приложениях следует использовать микросопла, чтобы работать на достаточно приемлемых давлениях, получаемых промышленными компрессорами.

Расчетами обосновано и экспериментально подтверждено, что оптимальными параметрами являются: давление в камере сопла 6-9 атмосфер; число Маха на срезе сопла 1,6-2,2.

Библиографический список

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики / С.К. Годунов // Матем. сб. — 1959. — Т. 3. — № 47. — С. 271–306.

Поступила в редакцию 15.03.2002 г.