

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ВЫНУЖДЕННЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

Папков С.О., Чехов В.Н.

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок г. Севастополь, Украина, 99053

Таврический национальный университет

ул. Ялтинская 4, г. Симферополь, Крым, Украина, 95036

На основе анализа соответствующей квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений получено дисперсионное уравнение для определения резонансных частот кососимметрических вынужденных колебаний прямоугольной призмы. Исследуется напряженное состояние призмы.

Одной из основных задач динамики упругого тела является определение собственных частот колебаний и расчет напряженного состояния в непосредственной близости от резонансных частот. Для полупространства, бесконечного слоя и бесконечного цилиндра известны точные решения задач о вынужденных установившихся колебаниях. Эти решения получены методом нормальных мод (их обзор можно найти в [1]), при этом все собственные частоты бесконечных упругих тел определяются с любой точностью из соответствующих трансцендентных дисперсионных уравнений. Однако уже для простейших конечных тел отражение упругих волн от границы представляет собой довольно сложный процесс, что приводит к трудностям при отыскании их нормальных колебаний и определении собственных частот. Подход к решению данной задачи для ряда упругих тел (прямоугольная призма, конечный цилиндр) предлагается в [2], где при помощи метода суперпозиции краевая задача теории упругости сводится к квазирегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Анализ напряженного состояния на основе решения данной бесконечной системы для различных рассчитанных значений частоты вынужденных колебаний позволяет найти интервалы, в которых заключены резонансные частоты. Отметим две проблемы, которые могут возникнуть при применении данного подхода. Первая - точность решения соответствующей бесконечной системы методом улучшенной редукции быстро падает в окрестности некоторых значений частоты, причем не обязательно в окрестности резонанса, что в свою очередь должно вести либо к увеличению порядка редуцированной системы уравнений, либо к ограничению на частотный диапазон. Вторая - отсутствие дисперсионное уравнение.

В данной статье предлагаются возможные пути преодоления указанных трудностей на примере решения задачи об установившихся вынужденных кососимметрических колебаниях прямоугольной призмы.

1. Постановка задачи и сведение ее к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Состояние упругой среды, занимающей некоторую область описывается векторным уравнением Ламе:

$$\Delta \mathbf{r} + \frac{1}{1-2n} \text{grad div } \mathbf{r} = \frac{r}{G} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{r} + (\text{grad } \mathbf{r})^T); \quad \mathcal{E} = \frac{2Gn}{1-2n} \text{div } \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} + 2G\mathcal{E},$$

где ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала, G – модуль сдвига, $\mathbf{E}$ – единичный тензор второго ранга.

Рассмотрим кососимметричные вынужденные установившиеся колебания призмы (в декартовой системе координат $\{|x| \leq 1, |y| \leq \eta, z \in \mathbf{R}\}$) на примере решения следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_{xx} \Big|_{x=\pm 1} &= \sin \frac{\pi y}{\eta} \cdot e^{-i\omega t}; & \frac{1}{2G} \tau_{xy} \Big|_{x=\pm 1} &= 0 \\ \frac{1}{2G} \sigma_{yy} \Big|_{y=\pm \eta} &= 0; & \frac{1}{2G} \tau_{xy} \Big|_{y=\pm \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ω – частота гармонической нагрузки.

Следуя [2], выбираем общее решение уравнений Ламе (1) в виде $\mathbf{r} = \{u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}\}e^{-i\omega t}$,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \text{sh } p_{1,n} x + B_n \text{sh } p_{2,n} x) \sin \alpha_n y + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \frac{\beta_n}{q_{1,n}} \text{sh } q_{1,n} y + D_n \frac{q_{2,n}}{\beta_n} \text{sh } q_{2,n} y) \sin \beta_n x$$

$$\begin{aligned} v(x, y) = D_0 \cos \Omega_1 y + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \frac{\alpha_n}{p_{1,n}} \text{ch } p_{1,n} x + B_n \frac{p_{2,n}}{\alpha_n} \text{ch } p_{2,n} x) \cos \alpha_n y - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \text{ch } q_{1,n} y + D_n \text{ch } q_{2,n} y) \cos \beta_n x \end{aligned}$$

$$\text{где } \alpha_n = \frac{2n-1}{2\eta} \pi, \quad \beta_n = \pi n, \quad q_{l,n}^2 = \beta_n^2 - \Omega_l^2, \quad p_{l,n}^2 = \alpha_n^2 - \Omega_l^2 \quad (l=1,2),$$

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} - \text{ скорость продольной волны, } c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

– скорость сдвиговой волны.

Обобщенный закон Гука позволяет получить следующие выражения для компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G} \sigma_{xx} &= -\frac{\nu \Omega_1}{1-2\nu} D_0 \sin \Omega_1 y + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{\alpha_n^2 + p_{2,n}^2}{2p_{1,n}} \operatorname{ch} p_{1,n} x + B_n p_{2,n} \operatorname{ch} p_{2,n} x \right) \sin \alpha_n y + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \frac{\beta_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu}}{q_{1,n}} \operatorname{sh} q_{1,n} y + D_n q_{2,n} \operatorname{sh} q_{2,n} y \right) \cos \beta_n x; \\
\frac{1}{2G} \sigma_{yy} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{\alpha_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu}}{p_{1,n}} \operatorname{ch} p_{1,n} x + B_n p_{2,n} \operatorname{ch} p_{2,n} x \right) \sin \alpha_n y - \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \frac{\beta_n^2 + q_{2,n}^2}{2q_{1,n}} \operatorname{sh} q_{1,n} y + D_n q_{2,n} \operatorname{sh} q_{2,n} y \right) \cos \beta_n x - \frac{(1-\nu) \Omega_1}{1-2\nu} D_0 \sin \Omega_1 y; \\
\frac{1}{2G} \sigma_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \alpha_n \operatorname{sh} p_{1,n} x + B_n \frac{\alpha_n^2 + p_{2,n}^2}{2\alpha_n} \operatorname{sh} p_{2,n} x \right) \cos \alpha_n y + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \beta_n \operatorname{ch} q_{1,n} y + D_n \frac{\beta_n^2 + q_{2,n}^2}{2\beta_n} \operatorname{ch} q_{2,n} y \right) \sin \beta_n x.
\end{aligned}$$

Подставляя данные выражения в граничные условия (2) и используя разложения по тригонометрической системе функций, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения последовательностей $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \{D_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\begin{cases} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} y_k + G_n D_0 + F_n; \\ y_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} x_k; \\ D_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k; \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

Здесь $x_n = B_n (-1)^{n+1} \operatorname{sh} p_{2,n}$; $y_n = D_n \frac{(-1)^n}{\eta} \operatorname{ch} q_{2,n} \eta$;

$$a_{n,k} = \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu) \Delta_n} \frac{1}{\beta_k^2 + p_{1,n}^2} \left(\frac{2\alpha_n^2}{\beta_k^2 + p_{2,n}^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{\beta_k^2} \right);$$

$$b_{n,k} = \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu) \Delta_n^1} \frac{1}{\alpha_k^2 + q_{1,n}^2} \left(\frac{2\beta_n^2}{\alpha_k^2 + q_{2,n}^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{\alpha_k^2} \right);$$

$$c_k = -\frac{n}{2(1-n)} \frac{\Omega_1 \Omega_2^2}{\sin \Omega_1 h} \frac{1}{a_k^2 p_{1,k}^2}; \quad G_n = \frac{2n}{(1-2n)} \frac{\Omega_1 \cos \Omega_1 h}{\Delta_n h};$$

$$F_n = -\frac{2p}{h^2 \Delta_n (a_n^2 - (p/h)^2)};$$

$$\Delta_n = p_{2,n} \operatorname{cth} p_{2,n} - \frac{(\alpha_n^2 + p_{2,n}^2)^2}{4\alpha_n^2 p_{1,n}} \operatorname{cth} p_{1,n};$$

$$\Delta_n^1 = \eta \left(q_{2,n} \operatorname{th} q_{2,n} \eta - \frac{(\beta_n^2 + q_{2,n}^2)^2}{4\beta_n^2 q_{1,n}} \operatorname{th} q_{1,n} \eta \right).$$

2. Исследование и решение полученной бесконечной системы.

Если нормированная частота $\Omega = \frac{2\omega}{\pi c_2}$ удовлетворяет неравенству

$$\Omega < \min \left\{ \frac{1}{\eta}, 1, \sqrt{\frac{8}{v(4\eta^2 + 1)}} \right\},$$

то матрица бесконечной системы (3) оказывается положительной. С увеличением частоты колебаний Ω знакопеременными становятся только элементы первых строк и столбцов бесконечной матрицы, элементы же $a_{n,k}$ и $b_{n,k}$ при $k, n \geq N^*$ остаются строго положительными.

Оценим регулярность системы (3), используя следующие асимптотические оценки для рядов:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} &= 1 - \varphi_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,k} = 1 - \psi_n, \\ \varphi_n &= \frac{p_{1,n}}{p_{2,n}} \cdot \frac{p_{1,n} + p_{2,n}}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \left(-\frac{\Omega_2^4}{4\alpha_n^2 p_{1,n}} + \frac{p_{2,n} e^{-p_{2,n}}}{sh p_{2,n}} - \frac{(\alpha_n^2 + p_{2,n}^2)^2 e^{-p_{1,n}}}{4\alpha_n^2 p_{1,n} sh p_{1,n}} \right) \frac{\Omega_2^2}{p_{2,n}^2} + \frac{\Omega_1^2}{(1-2v)\Delta_n} \times \\ &\quad \times \frac{1 + \frac{p_{1,n}}{p_{2,n}} \cdot \frac{p_{1,n} + p_{2,n}}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \left(-\frac{\Omega_2^4}{4\alpha_n^2 p_{1,n}} + \frac{p_{2,n} e^{-p_{2,n}}}{sh p_{2,n}} - \frac{(\alpha_n^2 + p_{2,n}^2)^2 e^{-p_{1,n}}}{4\alpha_n^2 p_{1,n} sh p_{1,n}} \right)}{\left(\frac{\alpha_n^2}{p_{1,n}^2 p_{2,n}^2} - \frac{\alpha_n^2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \left(\frac{e^{-p_{2,n}}}{p_{2,n} sh p_{2,n}} - \frac{e^{-p_{1,n}}}{p_{1,n} sh p_{1,n}} \right) + \frac{v\Omega_2^2}{p_{1,n}^2} \left(\frac{1}{6} - \frac{\operatorname{cth} p_{1,n}}{2p_{1,n}} + \frac{1}{2p_{1,n}^2} \right) \right)} \sim \\ &\sim \left[2 + \frac{v\Omega_2^2}{3} \right] \frac{1}{\alpha_n} + O\left(\frac{1}{\alpha_n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_n = & \frac{\frac{q_{1,n}}{q_{2,n}} \cdot \frac{q_{1,n} + q_{2,n}}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \left(-\frac{\Omega_2^4}{4q_{1,n}\beta_n^2} - \frac{q_{2,n}e^{-q_{2,n}\eta}}{chq_{2,n}\eta} + \frac{(\beta_n^2 + q_{2,n}^2)^2 e^{-q_{1,n}\eta}}{4\beta_n^2 q_{1,n} chq_{1,n}\eta} \right) - \frac{\Omega_2^2}{q_{2,n}^2}}{1 + \frac{q_{1,n}}{q_{2,n}} \cdot \frac{q_{1,n} + q_{2,n}}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \left(-\frac{\Omega_2^4}{4q_{1,n}\beta_n^2} - \frac{q_{2,n}e^{-q_{2,n}\eta}}{chq_{2,n}\eta} + \frac{(\beta_n^2 + q_{2,n}^2)^2 e^{-q_{1,n}\eta}}{4\beta_n^2 q_{1,n} chq_{1,n}\eta} \right)} \\
& - \frac{\Omega_1^2 \eta}{2(1-2\nu)\Delta_n^1} \times \left(\frac{2\beta_n^2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \left(\frac{e^{-q_{1,n}\eta}}{q_{1,n} chq_{1,n}\eta} - \frac{e^{-q_{2,n}\eta}}{q_{2,n} chq_{2,n}\eta} \right) + \frac{\nu \Omega_2^2}{q_{1,n}^2} \left(\eta - \frac{thq_{1,n}\eta}{q_{1,n}} \right) \right) \sim \quad (5) \\
& \sim \frac{\eta \nu \Omega_2^2}{\beta_n} + O\left(\frac{1}{\beta_n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,k}| &= \sum_{n=N^*}^{\infty} a_{n,k} + \sum_{n=1}^{N^*-1} |a_{n,k}| = 1 - \varphi_n + \sum_{n=1}^{N^*-1} (|a_{n,k}| - a_{n,k}), \\
\sum_{n=1}^{\infty} |b_{n,k}| &= 1 - \psi_n + \sum_{n=1}^{N^*-1} (|b_{n,k}| - b_{n,k}) \quad \text{при } n \geq N^*. \quad (6)
\end{aligned}$$

Непосредственные вычисления по формулам (4)-(6) показывают, что система (3) является квазирегулярной. Так, при $\eta = 1$ и $\Omega \in [0; 2,2]$ для $\nu = 0,33$ имеем $N^* = 2$ и $\varphi_n > 0, \psi_n > 0$ ($n = 3, 4, \dots$).

Сведем квазирегулярную систему (3) ($\eta = 1, \nu = 0,33$) к совокупности парных регулярных бесконечных систем при помощи замены переменных:

$$\begin{aligned}
x_n &= -\chi_n^0 + (G_{\max} - \chi_n^1)D_0 + \chi_n^2 x_1 + \chi_n^3 x_2 + \chi_n^4 y_1 + \chi_n^5 y_2, \\
y_n &= -Y_n^0 + (G_{\max} - Y_n^1)D_0 + Y_n^2 x_1 + Y_n^3 x_2 + Y_n^4 y_1 + Y_n^5 y_2, \quad (n = 3, 4, \dots), \quad (7)
\end{aligned}$$

где число $G_{\max} > \sup \frac{|G_n|}{\varphi_n + a_{n,1} + a_{n,2}}$ обеспечивает положительность

свободных членов в бесконечной системе при D_0 .

Подставляя (7) в (3), получаем совокупность шести парных бесконечных систем, различающихся только свободными членами, относительно последовательностей $\{\chi_n^\phi\}_{n=3}^\infty, \{Y_n^\phi\}_{n=3}^\infty$ ($\phi \in \{0, 1, \dots, 5\}$):

$$\begin{cases} \chi_n^\phi = \sum_{k=3}^{\infty} a_{n,k} Y_k^\phi + Q_n^\phi \\ Y_n^\phi = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} \chi_k^\phi + P_n^\phi \end{cases}; \quad (n = 3, 4, \dots; \phi \in \{0, 1, \dots, 5\}). \quad (8)$$

Здесь

$$Q_n^0 = -F_n; Q_n^1 = G_{\max}(\varphi_n + a_{n,1} + a_{n,2}) - G_n; Q_n^2 = 0; Q_n^3 = 0; Q_n^4 = a_{n,1}; Q_n^5 = a_{n,2}; \\ P_n^0 = 0; P_n^1 = G_{\max}(\psi_n + b_{n,1} + b_{n,2}); P_n^2 = b_{n,1}; P_n^3 = b_{n,2}; P_n^4 = 0; P_n^5 = 0.$$

В рассматриваемом диапазоне частот бесконечные системы (8) являются регулярными бесконечными системами с положительной матрицей и неотрицательными свободными членами.

Из доказанной в статье [3] теоремы следует существование положительных пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n^\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n^\phi = a_\phi, (\phi = 0, 1, \dots, 5) \quad (9)$$

и к решению данных систем может быть применен алгоритм лимитант.

С ростом частоты Ω решения систем (8) меняются незначительно, что иллюстрирует таблица 1, где представлены предельные значения данных систем.

Таблица 1 - Предельные значения регулярных бесконечных систем (8)

Ω	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0,9	0,656	0,0934	0,208	0,200	0,248	0,194
1,0	0,543	0,0879	0,205	0,204	0,252	0,199
1,1	0,451	0,0816	0,199	0,205	0,252	0,199
1,2	0,380	0,0773	0,191	0,205	0,252	0,200
1,3	0,336	0,0680	0,182	0,205	0,252	0,200
1,4	0,283	0,0600	0,173	0,205	0,252	0,201
1,5	0,248	0,0512	0,163	0,206	0,250	0,202
1,6	0,219	0,0399	0,151	0,206	0,250	0,203
1,7	0,196	0,0319	0,140	0,207	0,250	0,204

Последовательности $\{\chi_n^\phi\}_{n=1}^\infty, \{Y_n^\phi\}_{n=1}^\infty$ ($\phi = 0, 1, \dots, 5$) позволяют определить из системы (3) неизвестные D_0, x_1, x_2, y_1, y_2 . Действительно, приводя подобные слагаемые в первой и второй строках (3) при $n = 1, 2$ и в третьей строке (3), получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} D_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{k=3}^{\infty} c_k \chi_k^0 \\ F_1 - \sum_{k=3}^{\infty} a_{1,k} Y_k^0 \\ F_2 - \sum_{k=3}^{\infty} a_{2,k} Y_k^0 \\ -\sum_{k=3}^{\infty} b_{1,k} \chi_k^0 \\ -\sum_{k=3}^{\infty} b_{2,k} \chi_k^0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\mathbf{M}$ - квадратная матрица размерности 5, имеющая вид:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{k=3}^{\infty} c_k \tilde{\chi}_k^1 & -c_1 - \sum_{k=3}^{\infty} c_k \chi_k^2 & -c_2 - \sum_{k=3}^{\infty} c_k \chi_k^3 & -\sum_{k=3}^{\infty} c_k \chi_k^4 & -\sum_{k=3}^{\infty} c_k \chi_k^5 \\ -G_1 - \sum_{k=3}^{\infty} a_{1,k} \tilde{Y}_k^1 & 1 - \sum_{k=3}^{\infty} a_{1,k} Y_k^2 & -\sum_{k=3}^{\infty} a_{1,k} Y_k^3 & -a_{1,1} - \sum_{k=3}^{\infty} a_{1,k} Y_k^4 & -a_{1,2} - \sum_{k=3}^{\infty} a_{1,k} Y_k^5 \\ -G_2 - \sum_{k=3}^{\infty} a_{2,k} \tilde{Y}_k^1 & -\sum_{k=3}^{\infty} a_{2,k} Y_k^2 & 1 - \sum_{k=3}^{\infty} a_{2,k} Y_k^3 & -a_{2,1} - \sum_{k=3}^{\infty} a_{2,k} Y_k^4 & -a_{2,2} - \sum_{k=3}^{\infty} a_{2,k} Y_k^5 \\ -\sum_{k=3}^{\infty} b_{1,k} \tilde{\chi}_k^1 & -b_{1,1} - \sum_{k=3}^{\infty} b_{1,k} \chi_k^2 & -b_{1,2} - \sum_{k=3}^{\infty} b_{1,k} \chi_k^3 & 1 - \sum_{k=3}^{\infty} b_{1,k} \chi_k^4 & -\sum_{k=3}^{\infty} b_{1,k} \chi_k^5 \\ -\sum_{k=3}^{\infty} b_{2,k} \tilde{\chi}_k^1 & -b_{2,1} - \sum_{k=3}^{\infty} b_{2,k} \chi_k^2 & -b_{2,2} - \sum_{k=3}^{\infty} b_{2,k} \chi_k^3 & -\sum_{k=3}^{\infty} b_{2,k} \chi_k^4 & 1 - \sum_{k=3}^{\infty} b_{2,k} \chi_k^5 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Здесь $\tilde{\chi}_k^1 = G_{\max} - \chi_k^1$; $\tilde{Y}_k^1 = G_{\max} - Y_k^1$. При вычислении коэффициентов и свободных членов системы (10) использовались асимптотические свойства (9) решений бесконечных систем (8):

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} a_{n,k} Y_k^{\phi} &= \sum_{k=3}^N a_{n,k} (Y_k^{\phi} - a_{\phi}) + a_{\phi} \cdot (1 - \varphi_n - a_{n,1} - a_{n,2}); \\ \sum_{k=3}^{\infty} b_{n,k} \chi_k^{\phi} &= \sum_{k=3}^N b_{n,k} (\chi_k^{\phi} - a_{\phi}) + a_{\phi} \cdot (1 - \psi_n - b_{n,1} - b_{n,2}); \\ \sum_{k=3}^{\infty} c_k \chi_k^{\phi} &= \sum_{k=3}^N c_k (\chi_k^{\phi} - a_{\phi}) + a_{\phi} \cdot S, \end{aligned}$$

где N - число уравнений, удерживаемых в мажорантных системах при решении бесконечных систем (8) методом лимитант и

$$S = \sum_{k=3}^{\infty} c_k = \frac{-v\Omega_1\Omega_2^2}{2(1-v)\sin\Omega_1\eta} \left(\frac{\eta}{2\Omega_1^2} \left(\frac{tg\eta\Omega_1}{\Omega_1} - \eta \right) - \frac{1}{\alpha_1^2 p_{1,1}^2} - \frac{1}{\alpha_2^2 p_{1,2}^2} \right).$$

Зная решения систем (8), (10) можно получить решение системы (3) по формулам (7). При этом оказывается, что решение системы (3) имеет общий ненулевой предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -a_0 + D_0(G_{\max} - a_1) + x_1 a_2 + x_2 a_3 + y_1 a_4 + y_2 a_5 = A. \quad (12)$$

3. Определение собственных частот. Так как каждая бесконечная система из совокупности бесконечных систем (8) имеет единственное ограниченное решение для любого Ω из рассматриваемого диапазона частот, то бесконечная система (3) не имеет ограниченного решения тогда и только тогда, когда не имеет решения конечная система (10). Таким образом, задача определения резонансной частоты данной краевой задачи эквивалентна задаче отыскания таких значений Ω , при которых система (10) не имеет решения. Необходимым условием этого является равенство нулю определителя системы (10), что приводит к уравнению для отыскания собственных частот на интервале $\Omega \in [0; 2,2]$:

$$\det \mathbf{M}(\Omega) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) решалось численно при помощи метода дихотомии. Для каждого значения Ω вначале решалась совокупность бесконечных систем (8), затем рассчитывались элементы матрицы $\mathbf{M}$ (11) и ее определитель. График функции $\det \mathbf{M}(\Omega)$ представлен на рисунке 1.

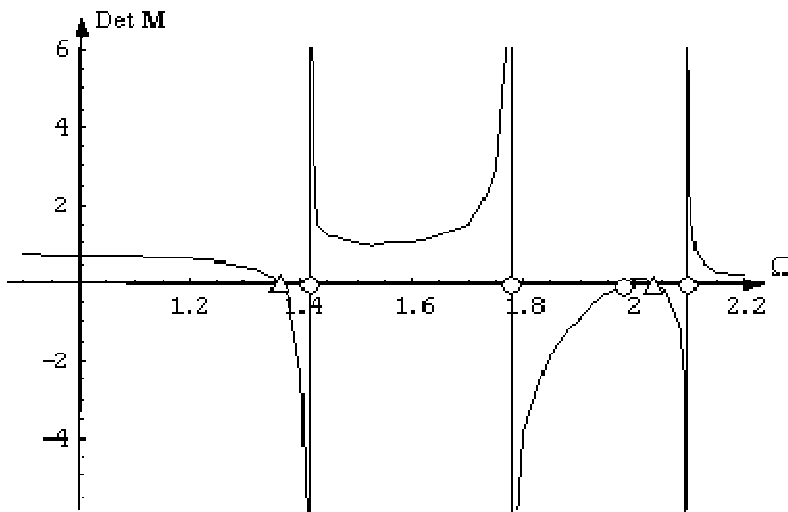


Рисунок 1 - График функции $y = \det \mathbf{M}(\Omega)$ ($\bigcirc$ - особые точки, Δ - точки резонанса)

При значениях Ω^* , удовлетворяющих уравнениям $\Delta_1(\Omega^*) = 0$ ($\Omega^* = 1,4142$ и $\Omega^* = 2,0952$), $\Delta_1^1(\Omega^*) = 0$ ($\Omega^* = 1,7827$) и $p_{1,1}(\Omega^*) = 0$ ($\Omega^* = 1,9852$) функция $y = \det \mathbf{M}(\Omega)$ имеет особенности. В этих точках требуется преобразовать систему (10) умножением соответствующего уравнения на функцию, стремящуюся к нулю, после чего система (10) имеет конечное решение. Так при решении (10) в окрестности частоты $\Omega = 1,4142$ требуется домножить второе уравнение системы на $\Delta_1(\Omega)$, после чего особенности в выражениях коэффициентов и свободных членов второго уравнения (10) исчезают.

После отыскания корней уравнения (13) система (10) проверялась на совместность. В данном случае система оказывается несовместной. Таким образом, в рассматриваемом частотном диапазоне получены собственные частоты $\Omega^{(1)} = 1,360$ и $\Omega^{(1)} = 2,029$. При подходе к точке $\Omega = 1,9852$ определитель системы (10) стремится к нулю, однако в данной точке система (10) имеет решение, поэтому данная частота не является собственной. Этот факт подтверждается тем, что в окрестности данной частоты напряжения не образуют резонансных форм и при ее переходе не меняют знак.

Заметим, что подобный подход позволяет построить спектр краевой задачи для любого диапазона частот. С увеличением рассматриваемого диапазона увеличится число первых неизвестных x_n и y_n вовлекаемых в замену (7) и соответственно порядок $\det \mathbf{M}$.

Максимальная погрешность в выполнении краевых условий (2) наблюдается в угловых точках, составляя 0,2% от максимума внешней нагрузки для $\Omega \in [0,1; 1,1]$ при удержании 50 уравнений в мажорантных системах алгоритма лимитант. С приближением частоты вынужденных колебаний к собственной частоте происходит резкое возрастание по модулю решения бесконечной системы (3), что ведет к росту погрешности в выполнении граничных условий в угловой точке. Так, для частот $\Omega = 1,35$ и $\Omega = 1,37$ в мажорантных системах алгоритма лимитант приходится удерживать по 300 уравнений для выполнения граничных условий с точностью 0,5% от максимума внешней нагрузки.

Картина распределения напряжений в призме при значениях частоты Ω , близких к нижней границе рассматриваемого диапазона частот, незначительно отличается от случая статической деформации. При приближении частоты Ω к первой собственной частоте призмы $\Omega^{(1)} = 1,360$ происходит резкое увеличение по модулю компонент тензора напряжений (таблица 2 для $\nu = 0,33$; $\eta = 1$); когда значение Ω переходит собственную частоту все, компоненты тензора напряжений меняют знак.

Таблица 2 - Максимальные значения компонент тензора напряжений

	$\sigma_{xx}^{\max}$	$\sigma_{yy}^{\max}$	$\sigma_{xy}^{\max}$
Статический изгиб	1	0,649	0,173
$\Omega = 0,1$	1	0,657	0,176
$\Omega = 0,9$	1,534	0,632	0,227
$\Omega = 1$	1,863	0,602	0,235
$\Omega = 1,1$	2,466	0,517	0,335
$\Omega = 1,2$	3,801	0,360	0,528
$\Omega = 1,3$	9,573	1,375	1,647
$\Omega = 1,35$	53,685	11,757	12,184
$\Omega = 1,375$	35,894	10,141	9,367
$\Omega = 1,4$	12,571	4,691	3,852
$\Omega = 1,5$	3,137	2,611	1,738

При всех рассмотренных значениях частоты вынужденных колебаний наибольшими являются нормальные напряжения σ_{xx} , которые достигают своего максимума на серединах ненагруженных граней призмы.

Библіографічний список

1. Mindlin R. D. Waves and vibrations in isotropic elastic plates / R.D. Mindlin // Structural mechanics. — N.Y., 1960. — P. 199-232.
2. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.
3. Папков С.О. Про існування ненульової границі для розв'язку парної нескінченної системи алгебраїчних рівнянь / С.О. Папков, В.М. Чехов // Вісн. ЗДУ. — 2000. — № 1. — С. 78–85.

Поступила в редакцию 15.03.2002 г.