

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.213.2

С.В.Доценко, проф., д-р физ. мат. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

root@sevgtu.sebastopol.ua

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МНОГОМЕРНЫХ НЕГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Представлен ряд конкретных примеров распределений плотностей вероятностей многомерных непрерывных негауссовских случайных величин, изменяющихся как в бесконечных пределах, так и в конечных интервалах. Получены их частичные (маргинальные) распределения любого числа измерений. В основе построения распределений лежит теоретическая модель, представленная в [1].

Рассмотрим несколько различных N -мерных распределений непрерывных центрированных случайных величин $\vec{\xi}_N^T = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, для описания которых применяются выражения вида [1]

$$p_N(\vec{x}_N) = \frac{1}{C_N} f_N \left(\sqrt{\vec{x}_N^T A_N \vec{x}_N} \right), \quad (1)$$

где $\vec{x}_N = (x_1, \dots, x_N)$ есть N -мерный вектор-столбец компонент их аргумента, A_N - квадратная симметрическая положительно определенная матрица размера $N \times N$, T - знак транспонирования. Неотрицательная базовая функция $f_N(t)$ для данной N -мерной плотности вероятностей определена для $t \geq 0$. Из условия нормировки выражения (1) коэффициент C_N имеет вид

$$C_N = \frac{2^{v_{N-1}(N)} \sqrt{\det R_N}}{\Gamma(N/2)} (\pi q_N)^{N/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N,$$

где $\Gamma(x)$ - гамма-функция. Любой начальный момент n -го порядка

$$v_n(N) = \int_0^\infty x^n f_N(x) dx$$

базовой функции, необходимый для дальнейших расчетов, должен иметь конечное значение. Согласно [1] при этих условиях формула (1) может быть представлена как

$$p_N(\vec{x}_N) = \frac{\Gamma(N/2) f_N(r_N)}{2^{v_{N-1}(N)} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N \sqrt{(q_N \pi)^N \det R_N}}, \quad (2)$$

где обозначена безразмерная величина $r_N^2 = l_N^2 / q_N$, в которую входят положительная квадратичная форма

$$l_N^2 = (U_N \vec{x})^T R_N^{-1} (U_N \vec{x}), \quad (3)$$

и коэффициент $q_N = N v_{N-1}(N) / v_{N+1}(N)$. Квадратная диагональная матрица

$$U_N = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^{-1} \end{bmatrix}$$

определяется только среднеквадратическими значениями σ_i соответствующих компонент вектора $\vec{\xi}_N^T$ и

$$R_N = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

есть матрица коэффициентов корреляции ρ_{ij} между компонентами ξ_i и ξ_j .

Так как распределения (1) симметричны, все их смешанные моменты нечетных порядков нулю. Методом, рассмотренным в [1], можно показать, что смешанные моменты четвертого и шестого порядка равны соответственно

$$M[\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4] = V_4(N) (\rho_{12} \rho_{34} + \rho_{13} \rho_{24} + \rho_{14} \rho_{23}) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$$

и

$$\begin{aligned} M[\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \xi_6] = & V_6(N) [(\rho_{34} \rho_{56} + \rho_{35} \rho_{46} + \rho_{36} \rho_{45}) \rho_{12} + \\ & + (\rho_{24} \rho_{56} + \rho_{25} \rho_{46} + \rho_{26} \rho_{45}) \rho_{13} + \\ & + (\rho_{23} \rho_{56} + \rho_{25} \rho_{36} + \rho_{26} \rho_{35}) \rho_{14} + (\rho_{23} \rho_{46} + \rho_{24} \rho_{36} + \rho_{26} \rho_{34}) \rho_{15} + \\ & + (\rho_{23} \rho_{45} + \rho_{24} \rho_{35} + \rho_{25} \rho_{34}) \rho_{16}] \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6, \end{aligned}$$

с коэффициентами

$$V_4(N) = \frac{N}{N+2} \frac{v_{N+3}(N) v_{N-1}(N)}{v_{N+1}^2(N)}, \quad V_6(N) = \frac{N^2}{(N+2)(N+4)} \frac{v_{N-1}^2(N) v_{N+5}(N)}{v_{N+1}^3(N)}, \quad (4)$$

зависящими от вида распределения.

В работе [2] показано, что частичное (маргинальное) $(N - m)$ -мерное распределение плотности вероятностей $(N - m)$ - мерной случайной величины $\vec{\xi}_{N-m}^T = (\xi_1, \dots, \xi_{N-m})$, в которую входят только первые $N - m$ компонент указанной выше N -мерной величины $\vec{\xi}_N^T$, описывается формулой

$$p_{N-m}(\vec{x}_{N-m}) = \frac{\Gamma(N/2) f_{N-m}(r_{N-m})}{v_{N-1}(N) \Gamma(m/2) \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{N-m} \sqrt{(\pi q_N)^{N-m} \det R_{N-m}}} . \quad (5)$$

В ней $1 \leq m \leq N - 1$, функция $f_{N-m}(x)$ связана с базовой функцией $f_N(x)$ соотношением

$$f_{N-m}(x) = \int_0^\infty t^{m-1} f_N\left(\sqrt{x^2 + t^2}\right) dt , \quad (6)$$

обозначено $r_{N-m}^2 = l_{N-m}^2 / q_N$ и $(N - m)$ -мерный аргумент функции (5) имеет вид $\vec{x}_{N-m} = (x_1, \dots, x_{N-m})$.

Иногда по формуле (6) непосредственно аналитически вычислить $f_{N-m}(r_{N-m})$ не удастся. При этом может оказаться успешным последовательное применение следующей процедуры [2].

Выполнив преобразование Ханкеля функции $f_N(x)$:

$$\tilde{f}_N(u) = \int_0^\infty f_N(x) J_0(ux) x dx ,$$

находим, что функция $f_{N-1}(x)$ связана с ним косинус-преобразованием Фурье

$$f_{N-1}(x) = \int_0^\infty \tilde{f}_N(u) \cos(xu) du .$$

Выполняя эти преобразования m раз, найдем $f_{N-m}(x)$.

В ряде случаев по $(N - 1)$ -мерному распределению (5) можно найти $(N + 1)$ -мерное распределение случайной величины $\vec{\xi}_{N+1}^T = (\xi_1, \dots, \xi_N, \xi_{N+1})$, соответствующее данной базовой функции $f_N(t)$. Для этого можно воспользоваться соотношением [2]:

$$f_{N+1}(x) = - \frac{d}{x dx} f_{N-1}(x) . \quad (7)$$

Если функция (7) неотрицательна и интеграл от нее в пределах существования этой функции конечен, то такое распределение имеет смысл.

Получим и проанализируем многомерные распределения, соответствующие некоторым конкретным значениям базовых функций $f_N(t)$.

Пусть N -мерная базовая функция имеет колоколообразную форму

$$f_N(t) = \exp(-t^2), \quad (-\infty < t < \infty).$$

Эта функция порождает N -мерное нормальное (гауссовское) распределение [1]:

$$p_N(\vec{x}_N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det R_N \sigma_1 \dots \sigma_N}} \exp(-l_N^2/2), \quad (8)$$

причем $q_N = 2$ независимо от N . Найдем соответствующее ему $(N-m)$ -мерное распределение. Вычислим функцию (6). Она также имеет колоколообразную форму:

$$f_{N-m}(x) = \frac{1}{2} \Gamma(m/2) \exp(-x^2). \quad (9)$$

Учитывая, кроме того, что здесь $v_{N-1}(N) = \Gamma(N/2)/2$, приведем формулу (5) к виду

$$p_{N-m}(\vec{x}_{N-m}) = \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_{N-m} \sqrt{(2\pi)^{N-m} \det R_{N-m}}} \exp(-l_{N-m}^2/2), \quad (1 \leq m \leq N-1). \quad (10)$$

Сравнивая этот результат с (8), видим, что это - действительно $(N-m)$ -мерное нормальное распределение.

Коэффициенты (4) распределения (8) имеют значения $V_4(N) = V_6(N) = 1$ для любых N .

Выбирая $m = N-1$, из (10) получаем одномерное нормальное распределение

$$p_1(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i/\sigma_i)^2\right) \quad (11)$$

со среднеквадратическим значением σ_i .

Если компоненты случайного вектора $\vec{\xi}_N$ попарно некоррелированы, то матрица R_N и обратная ей обращаются в единичную матрицу, ее определитель $\det R_N = 1$, и выражение (3) упрощается до суммы квадратов

$$l_N^2 = \sum_{i=1}^N (x_i/\sigma_i)^2. \quad (12)$$

При этом нормальное N -мерное распределение (8) распадается на произведение N одномерных нормальных распределений его отдельных компонент:

$$p_N(\vec{x}_N) = \prod_{i=1}^N p_1(x_i), \quad (13)$$

где $p_1(x_i)$ дается формулой (11).

При $m = N - 2$ из (10) имеем двумерное нормальное распределение

$$p_2(x_i, x_j) = \frac{1}{2\pi \sigma_i \sigma_j \sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \exp\left(-\frac{l_2^2}{2}\right),$$

в аргумент которого входит безразмерная величина

$$l_2^2 = \frac{(x_i/\sigma_i)^2 - 2\rho_{ij}(x_i/\sigma_i)(x_j/\sigma_j) + (x_j/\sigma_j)^2}{1 - \rho_{ij}^2}, \quad (14)$$

где ρ_{ij} - коэффициент корреляции между составляющими ξ_i и ξ_j вектора $\vec{\xi}_N$, а σ_i и σ_j - среднеквадратические значения этих составляющих. Семейство эллипсов (14) для $l_2 = 1$ и разных ρ_{ij} представлено на рисунке 1.

Для нормального распределения при любых N имеет место соотношение (9). Выясним, каков будет вид базовой функции при числе измерений, большем N . Учитывая формулу (7), находим

$$f_{N+1}(x) = \sqrt{\pi} \exp(-x^2).$$

Итак, в результате выполненных расчетов получен известный факт, что базовой функцией нормального (гауссовского) распределения любого числа измерений является колоколообразная кривая.

Выбрав в качестве базовой функцию

$$f_N(t) = (1 + t^2)^{-(N+k)/2}, \quad (-\infty < t < \infty),$$

где $k > 2$, придем к N - мерному распределению Стюдента с k степенями свободы [1]:

$$p_N(\vec{x}_N) = \frac{\Gamma[(N+k)/2]}{\Gamma(k/2) \sqrt{\pi}^N (k-2)^N \det R_N \sigma_1 \dots \sigma_N} \left[1 + l_N^2 / (k-2)\right]^{-(N+k)/2}. \quad (15)$$

Для него коэффициенты формул (4)

$$V_4(N) = (k-2)/(k-4), \quad (k > 4), \quad V_6(N) = (k-2)^2 / [(k-4)(k-6)], \quad (k > 6)$$

не зависят от числа измерений N . Если $k \rightarrow \infty$, то оба эти коэффициента стремятся к 1. Это – следствие стремления (15) к N - мерному нормальному распределению при безграничном увеличении его числа степеней свободы.

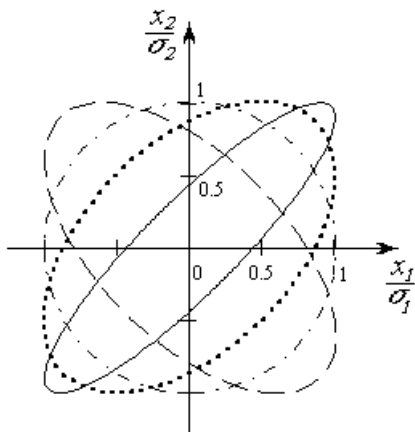


Рисунок 1 - Семейство кривых
 $l_2=1$ для различных $\rho = \rho_{ij}$:
 - - - $\rho = 0$, $\rho = 0.5$,
 — $\rho = -0.6$, — $\rho = 0.9$

Если компоненты случайного вектора попарно некоррелированы, то имеет место соотношение (12), но выражение (15) не распадается на произведение одномерных распределений, как это имело место для нормального закона. Ни один из рассмотренных ниже законов распределения не удовлетворяет свойству (13). Отсюда следует, что в указанных распределениях между различными компонентами вектора $\vec{\xi}$ имеется статистическая связь и при отсутствии корреляции между ними.

Вид базовой функции маргинального $(N - m)$ - мерного распре-

деления находим с помощью формул (6) и (5):

$$f_{N-m}(x) = \frac{\Gamma(m/2) \Gamma[(N+k-m)/2]}{2\Gamma[(N+k)/2]} (1+x^2)^{-(N+k-m)/2}, \quad (16)$$

$(0 < m < N+k)$

и

$$p_{N-m}(\vec{x}_{N-m}) = \frac{\Gamma[(N+k-m)/2]}{\Gamma(k/2) \sqrt{\pi^{N-m} (k-2)^{N-m} \det R_{N-m}} \sigma_1 \dots \sigma_{N-m}} \times$$

$$\times \left[1 + l_{N-m}^2 / (k-2) \right]^{-(N+k-m)/2} \quad (17)$$

Очевидно, формула (15) может быть получена из (17) при $m = 0$.

Отметим, что в рассматриваемом случае тип базовой функции (16) не меняется с изменением числа измерений случайной величины, однако степень двучлена, стоящего в скобках, зависит от него. Иными словами, здесь вид $f_{N-m}(t)$ зависит как от N , так и от m , чего нет в гауссовском распределении.

При $m = N - 1$ формула (17) дает одномерное маргинальное распределение Стьюдента, соответствующее заданному N - мерному:

$$p_1(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2) \sqrt{(k-2)\pi} \sigma} \left[1 + (x/\sigma)^2 / (k-2) \right]^{-(k+1)/2}.$$

Положив в (17) $m = N - 2$, найдем двумерное маргинальное распределение Стьюдента

$$p_2(x_i, x_j) = \frac{k}{2\pi(k-2)\sqrt{1-\rho_{ij}^2}\sigma_i\sigma_j} \left[1 + l_2^2/(k-2)\right]^{-(k+2)/2},$$

где l_2^2 дается формулой (14).

Пример семейства нормированных плотностей вероятностей

$$s_{N-m}(l_{N-m}) = \sigma_1 \dots \sigma_{N-m} \sqrt{\det R_{N-m}} p_{N-m}(\bar{x}_{N-m}), \quad (1 \leq m \leq N-1), \quad (18)$$

соответствующих такому распределению для $k = 8$ и $N = 4$, представлен на рисунке 2. На нем любое l_{N-m} обозначено как l .

Найдем по N -мерному распределению (15) соответствующее ему $(N+1)$ -мерное распределение. Применяя рассмотренную выше методику, находим, что $p_{N+1}(\bar{x}_{N+1})$ получается из (15) заменой N на $N+1$.

Пусть N -мерная базовая функция имеет экспоненциальный вид

$$f_N(t) = \exp(-\alpha \sqrt{t^2}), \quad \alpha > 0, \quad (-\infty < t < \infty). \quad (19)$$

Здесь $v_n(N) = \Gamma(n+1)/\alpha^{n+1}$, коэффициент $q_N = \alpha^2/(N+1)$ зависит от N , величина $r_N^2 = (N+1)l_N^2/\alpha^2$ и согласно (2) имеем

$$p_N(\bar{x}_N) = \frac{\Gamma(N/2)(N+1)^{N/2}}{2\pi^{N/2}\Gamma(N)\sqrt{\det R_N}\sigma_1 \dots \sigma_N} \exp(-\sqrt{N+1}l_N). \quad (20)$$

В частности, одномерная плотность имеет вид

$$p_1(x) = \frac{\exp(-\sqrt{2}x/\sigma)}{\sqrt{2}\sigma}, \quad (21)$$

а двумерная – вид

$$p_2(x_i, x_j) = \frac{3 \exp(-\sqrt{3}l_2)}{2\pi \sqrt{1-\rho_{ij}^2}\sigma_i\sigma_j}. \quad (22)$$

Сравнивая (20) и (19), видим, что здесь естественно положить в качестве базовой функции

$$f_N(t) = \exp(-\sqrt{N+1}t) \quad (23)$$

и тем самым выбрать $\alpha = \sqrt{N+1}$. Применим к (23) формулу (6):

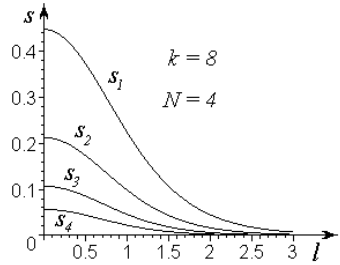


Рисунок 2 - Нормированные плотности распределения Стюдента

$$f_{N-m}(x) = \int_0^{\infty} t^{m-1} \exp\left(-\sqrt{N+1}\sqrt{x^2+t^2}\right) dt. \quad (24)$$

Для вычисления этого выражения воспользуемся одним из интегральных представлений модифицированной цилиндрической функции второго рода (функции Макдональда) [3]:

$$K_{\nu}(xz) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{x}{2z}\right)^{\nu} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-x\sqrt{t^2+z^2}\right)}{\sqrt{t^2+z^2}} t^{2\nu} dt, \quad (\nu > -1/2, z > 0, x > 0).$$

Отсюда имеем значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-x\sqrt{t^2+z^2}\right)}{\sqrt{t^2+z^2}} t^{2\nu} dt = \frac{\Gamma(\nu+1/2)(2z)^{\nu}}{\sqrt{\pi}} x^{-\nu} K_{\nu}(xz).$$

Продифференцировав это равенство по x и учитывая тождество

$$\frac{dK_{\nu}(u)}{du} = -\frac{\nu}{u} K_{\nu}(u) - K_{\nu+1}(u),$$

после несложных преобразований получим

$$\int_0^{\infty} t^{2\nu} \exp\left(-x\sqrt{t^2+z^2}\right) dt = \frac{\Gamma(\nu+1/2)z}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2z}{x}\right)^{\nu} K_{\nu+1}(xz).$$

Заменяя здесь $2\nu \rightarrow m-1$, $x \rightarrow \sqrt{N+1}$, $z \rightarrow x$ и сравнивая с выражением (24), находим базовую функцию маргинального распределения

$$f_{N-m}(x) = \frac{\Gamma(m/2)}{2\sqrt{\pi} (N+1)^{\frac{m}{2}}} \left(2\sqrt{N+1}x\right)^{\frac{m+1}{2}} K_{\frac{m+1}{2}}(\sqrt{N+1}x). \quad (25)$$

Поэтому формула (5) при $1 \leq m \leq N-1$ принимает вид

$$p_{N-m}(\vec{x}_{N-m}) = \frac{\Gamma(N/2) (N+1)^{\frac{N-m}{2}}}{2\Gamma(N) \pi^{\frac{N-m+1}{2}} \sqrt{\det R_{N-m}} \sigma_1 \dots \sigma_{N-m}} \times \\ \times (2\sqrt{N+1} l_{N-m})^{\frac{m+1}{2}} K_{\frac{m+1}{2}}(\sqrt{N+1} l_{N-m}) \quad (26)$$

Положив в последнем выражении $m = N-1$, найдем соответствующую ему одномерную плотность распределения вероятностей

$$p_1(x) = \frac{\Gamma(N/2) \sqrt{N+1}}{2\Gamma(N) \pi \sigma} \left(2\sqrt{N+1} \frac{x}{\sigma}\right)^{\frac{N}{2}} K_{\frac{N}{2}}\left(\sqrt{N+1} \frac{x}{\sigma}\right).$$

В частности, если $N = 1$, приходим, как и следовало ожидать, к формуле (21).

При $m = N - 2$ имеем двумерное распределение, соответствующее данному N - мерному:

$$p_2(x_i, x_j) = \frac{(N+1)\Gamma(N/2)}{2\Gamma(N)\pi^{3/2}\sqrt{1-\rho_{ij}^2}\sigma_i\sigma_j} (2\sqrt{N+1}l_2)^{\frac{N-1}{2}} K_{\frac{N-1}{2}}(\sqrt{N+1}l_2). \quad (27)$$

При $N = 2$ отсюда получаем формулу (22).

На рисунке 3 представлено семейство функций (18) для распределения (26), а на рисунке 4 – пример двумерного распределения (27).

Для рассматриваемого распределения коэффициенты (4) равны соответственно

$$V_4(N) = \frac{N+3}{N+1}, \quad V_6(N) = \frac{(N+3)(N+5)}{(N+1)^2}.$$

При $N \rightarrow \infty$ имеем $V_4(\infty) = V_6(\infty) = 1$.

Найдем из (25) функцию $f_{N-1}(x)$ и применим к ней операцию (7). Получим

$$f_{N+1}(x) = \sqrt{N+1} K_0(\sqrt{N+1}x). \quad (28)$$

Следовательно, здесь по N - мерному распределению можно построить $(N+1)$ - мерное. Для функции (28) имеем $v_n(N+1) = 2^{-(n+1)}\Gamma^2[(n+1)/2]$ и из формулы (2) получаем

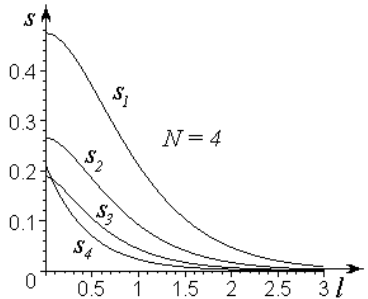


Рисунок 3 - Нормированные плотности распределения с экспоненциальной базовой функцией

$$p_{N+1}(\bar{x}_{N+1}) = \frac{2^N \sqrt{N+1} K_0(\sqrt{N+1} l_{N+1})}{\Gamma[(N+1)/2] \pi^{\frac{N+1}{2}} \sqrt{\det R_{N+1}} \sigma_1 \dots \sigma_{N+1}}.$$

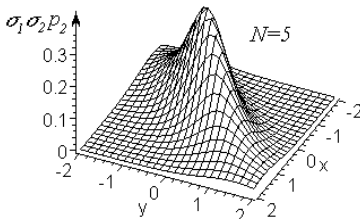


Рисунок 4 - Двумерная плотность распределения для экспоненциальной базовой функции при $\rho_{ij} = 0,75$

Распределения более высокого порядка не существуют, так как для $f_{N+2}(x)$ момент $v_0(N+2) = \infty$.

Далее рассмотрим многомерные распределения плотности вероятностей, заданные на конечных интервалах.

Выберем прямоугольную базовую функцию

$$f_N(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |t| > 1. \end{cases} \quad (29)$$

Для нее $v_n(N) = (n+1)^{-1}$, $q_N = N+2$ и формула (2) принимает вид

$$p_N(\vec{x}_N) = \begin{cases} \frac{\Gamma(N/2+1)}{\sqrt{\pi^N (N+2)^N \det R_N} \sigma_{1\dots N}} & \text{при } |l_N| \leq \sqrt{N+2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (30)$$

Коэффициенты (4) здесь равны

$$V_4(N) = (N+2)/(N+4), \quad V_6(N) = (N+2)^2 / [(N+4)(N+6)].$$

Подставляя (29) в (6), находим

$$f_{N-m}(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases} \quad (31)$$

Из формул (31) и (5) для $1 \leq m \leq N-1$ получаем $(N-m)$ -мерное маргинальное распределение, соответствующее данному N -мерному:

$$p_{N-m}(\vec{x}_{N-m}) = \begin{cases} \frac{[\pi(N+2)]^{\frac{m-N}{2}} \Gamma(N/2+1)}{\Gamma(m/2+1) \sqrt{\det R_{N-m}} \sigma_{1\dots N-m}} \left(1 - \frac{l_{N-m}^2}{N+2}\right)^{\frac{m}{2}} & \text{при } |l_N| \leq \sqrt{N+2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Распределение (30) – частный случай найденного при $m = 0$.

Положив в последней формуле $m = N-1$, найдем одномерное маргинальное распределение:

$$p_1(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(N/2+1)}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right) \sqrt{(N+2)\pi} \sigma} \left[1 - (x/\sigma)^2 / (N+2)\right]^{\frac{N-1}{2}} & \text{при } |x/\sigma| \leq \sqrt{N+2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а при $m = N-2$ - соответствующее ему двумерное

$$p_2(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{N}{2(N+2)\pi \sqrt{1 - \rho_{ij}^2} \sigma_i \sigma_j} \left[1 - l_2^2 / (N+2)\right]^{\frac{N-2}{2}} & \text{при } |l_2| \leq \sqrt{N+2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из формулы (31) имеем

$$f_{N-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Применяя (7), отсюда получим

$$f_{N+1}(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Эта функция неотрицательна, и интеграл от нее существует. Следовательно, здесь из N - мерного распределения может быть получено $(N+1)$ - мерное. Найдем его. Вычислим

$$v_n(N+1) = \int_0^1 t^n (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \quad q_{N+1} = N+2$$

и искомое распределение имеет вид

$$p_{N+1}(\vec{x}_{N+1}) = \begin{cases} \frac{N \Gamma(N/2)}{2\pi^{\frac{N+2}{2}} (N+2)^{\frac{N+1}{2}} \sqrt{\det R_{N+1}} \sigma_{1...N+1}} \left(1 - \frac{l_{N+1}^2}{N+2}\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{при } |l_{N+1}| \leq \sqrt{N+2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Распределение $p_{N+2}(\vec{x}_{N+2})$ не существует.

Примеры нормированных плотностей (18), соответствующих данному распределению, даны на рисунке 5 в полулогарифмическом масштабе. Обратим внимание, что в отличие от всех рассмотренных распределений, функция $S_5(l)$ растет с ростом аргумента.

Треугольную базовую функцию зададим формулой

$$f_N(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{при } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |t| > 1. \end{cases}$$

Для нее $v_n(N) = ((n+1)(n+2))^{-1}$, $q_N = (N+2)(N+3)/(N+1)$, коэффициенты

$$V_4(N) = \frac{(N+2)(N+3)^2}{(N+1)(N+4)(N+5)}, \quad V_6(N) = \frac{(N+2)^2(N+3)^3}{(N+1)^2(N+4)(N+6)(N+7)}$$

и формула (2) имеет вид

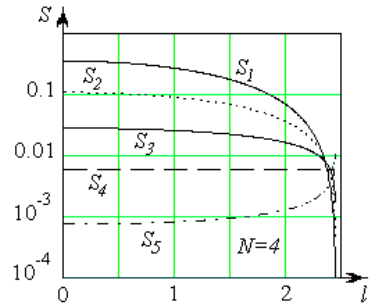


Рисунок 5 - Нормированные плотности распределения с прямоугольной базовой функцией

$$p_N(\vec{x}_N) = \begin{cases} \frac{(N+1)^{\frac{N+2}{2}} \Gamma\left(\frac{N+2}{2}\right)}{[\pi(N+2)(N+3)]^{\frac{N}{2}} \sqrt{\det R_N}} \left[1 - \sqrt{\frac{(N+1)l_N^2}{(N+2)(N+3)}} \right] & \text{при } |l_N| \leq \sqrt{\frac{(N+2)(N+3)}{(N+1)}}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычислим

$$f_{N-m}(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} t^{m-1} \left(1 - \sqrt{x^2 + t^2} \right) dt, \quad (32)$$

где $m < N$. Аналитическое выражение этого интеграла в общем виде очень громоздко и неудобно для применения. Приведем ряд его частных значений:

$$\begin{aligned} f_{N-1}(x) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{1-x^2} + x^2 \ln \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \right], & f_{N-2}(x) &= \frac{1}{6} (1-x)^2 (1+2x), \\ f_{N-3}(x) &= \frac{1}{24} (2-5x^2) \sqrt{1-x^2} - \frac{x^4}{8} \ln \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right), & f_{N-4}(x) &= \frac{1}{60} (1-x)^3 (3+9x+8x^2). \end{aligned} \quad (33)$$

Применяя к первой из этих формул оператор (7), получаем функцию

$$f_{N+1}(x) = \ln \left(\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}} \right).$$

Она неотрицательна, и интеграл от нее в пределах от 0 до ∞ конечен – равен $\pi/2$. Поэтому, в данном случае возможно построение $(N+1)$ - мерного распределения. Следующее, $(N+2)$ - мерное, распределение не существует.

Формула (18) для частичной нормированной многомерной плотности вероятности здесь при $1 \leq m \leq N-1$ принимает вид

$$s_{N-m}(l_{N-m}) = \frac{N \Gamma(N/2) (N+1)^{\frac{N+2-m}{2}} f_{N-m} \left(\sqrt{\frac{(N+1)l_{N-m}^2}{(N+2)(N+3)}} \right)}{\Gamma(m/2) [\pi(N+2)(N+3)]^{\frac{N-m}{2}}} \text{ при } |l_{N-m}| \leq \sqrt{\frac{(N+2)(N+3)}{N+1}} \quad (34)$$

и $s_{N-m}(l_{N-m}) = 0$ в остальных случаях. Входящая сюда функция $f_{N-m}(x)$ дается формулой (32) или ее частными значениями (33).

Примеры функций (32) приведены на рисунке 6.

Применяя разработанный метод, можно создавать большое разнообразие многомерных симметричных распределений непрерывных негауссовских случайных величин, просто находить их маргинальные распределе-

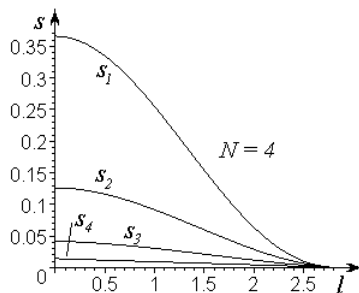


Рисунок 6 - Нормированные плотности распределения с треугольной базовой функцией

ния и любые необходимые для практики числовые характеристики. Это позволяет исследовать ряд важных вопросов в решении теоретических задач и практических приложений, что до сих пор было доступно только для гауссовских величин.

Библиографический список

1. Доценко С.В. Модель многомерного распределения вероятностей / С.В.Доценко // Вестн. СевГТУ. Сер. Информатика, электроника, связь: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2001. — Вып. 31. — С. 25 – 34.

2. Доценко С.В. Связь между плотностями вероятностей различного числа измерений многомерной случайной величины / С.В.Доценко // Вестн. СевГТУ. Сер. Физика, математика: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2003. — Вып. 43. — С. 76 – 85.

3. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С.-Градштейн, И.М.Рыжик. — М.: Физматгиз, 1962. — 1100 с.

Поступила в редакцию 27.11.2002 г.