

УДК 519.2:551.583

А.Х. Дегтерев, В.И.Мордашев, В.В. Подольский

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

root@sevgtu.sebastopol.ua

ВЛИЯНИЕ ПОСТЕПЕННОГО СМЕЩЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ НА ВЕРОЯТНОСТЬ АНОМАЛЬНЫХ СОБЫТИЙ ПРИ НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

Проанализировано изменение функции плотности распределения вероятности за счет медленного дрейфа математического ожидания переменной. На примере межгодовой изменчивости среднемесячной температуры воздуха показано, что вследствие глобального потепления наиболее сильно меняется относительная вероятность аномальных значений, причем распределение становится асимметричным. При смещении на среднеквадратичное отклонение вероятность аномально высоких температур более чем на порядок превышает вероятность аномально низких значений. Полученные результаты сравниваются с данными наблюдений.

Многие естественные процессы в окружающей среде являются вероятностными, причем плотность вероятности реализации значений различных измеряемых параметров близка к нормальной[1]. Примером может служить климатическая изменчивость некоторых метеопараметров, в частности, межгодовая изменчивость среднемесячной температуры воздуха[2,3]. При этом случайный процесс описывается плотностью вероятности $p(t)$, где t в данном случае обозначает температуру некоторого месяца(например, июля) в тот или иной год. Соответственно, вероятность реализации значения температуры в интервале от t_1 до t_2 равна:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (1)$$

Происходящее сейчас изменение климата выражается, как правило, в постепенном изменении математического ожидания $\bar{t}$ этого процесса. Говоря другими словами, среднемесячная температура июля медленно повышается. С точки зрения математической статистики увеличение математического ожидания на Δt ведет к сдвигу графика $p(t)$ по оси температур, в связи с чем формула (1) принимает вид :

$$P = \int_{t_1}^{t_2} p(t - \Delta t) dt \quad (2)$$

Для нормального распределения таким образом получаем:

$$P = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{(t - \bar{t} - \Delta t)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad (3)$$

где σ - среднеквадратичное отклонение среднемесячной температуры воздуха, рассчитанное по имеющимся данным измерений, а $\bar{t}$ - соответствующая климатическая норма до изменения климата. Если же эту норму рассчитывать по выборке, полученной уже в процессе изменения климата, то необходимо внести поправку в формулы (2,3). Будем считать, что имеет место линейный тренд среднемесячной температуры, тогда новое значение математического ожидания $\bar{t}$ отличается от прежнего на $\Delta t/2$, поэтому искомая вероятность должна теперь рассчитываться по формуле:

$$P = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{(t - \bar{t} - \Delta t/2)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (4)$$

Из-за сдвига математического ожидания в обоих случаях получается несимметричное относительно $\bar{t}$ распределение плотности вероятности $p(t)$. В самом деле, это распределение остается нормальным только в том случае, если под $\bar{t}$ понимать математическое ожидание, установившееся в конце рассматриваемого периода наблюдений, то есть величину $\bar{t} + \Delta t$. Покажем, что соответствующие вероятности, определяемые выражениями (1) и (4) могут существенно отличаться для наблюдаемых значений σ , $\bar{t}$ и Δt .

С этой целью рассмотрим вероятность реализации аномально высоких и аномально низких значений среднемесячной температуры, под которыми в климатологии понимаются значения, удовлетворяющие неравенствам:

$$t > \bar{t} + 2\sigma \quad (5)$$

$$t < \bar{t} - 2\sigma \quad (6)$$

При неизменном математическом ожидании вероятность аномально теплых месяцев описывается интегралом от обычного нормального распределения вида (1), где пределы интегрирования $t_1 = \bar{t} + 2\sigma$ и $t_2 = \infty$. Как известно, эта вероятность $P = 0.023$ [3]. В силу симметричности нормального распределения в этом случае вероятность аномально холодных месяцев также равна P . Однако, если соответствующие вероятности рассчитываются с использованием эмпирических значений $\bar{t}$, то должно использоваться соотношение (4). В таблицах нормального распределения [3,4] приведены значения интеграла $F(t)$ типа (1) для стандартного распределения с пределами интегрирования $t_1 = \infty$ и $t_2 = t$. Поэтому результаты расчетов удобно представить в виде зависимости вероятности аномально теплых месяцев P_T и аномально холодных месяцев P_X от отношения $\Delta t/2\sigma$ (таблица 1). При этом в отсутствие климатических изменений $P = 1 - F(2)$.

Таблица 1 - Изменение вероятности аномально теплых и аномально холодных месяцев при потеплении климата на Δt

$\Delta t/2\sigma$	0,5	1	1,5	2
P_T/P	2,9	7,1	13,6	22,1
P_X/P	1/3,7	1/17,6	1/94,6	---

Таким образом, при потеплении климата повторяемость аномально теплых месяцев увеличивается, а повторяемость аномально холодных - уменьшается. В результате, например, при $\Delta t = \sigma$ получим $P_T/P_X = 10,7$, то есть вероятность аномально теплых месяцев на порядок превышает вероятность аномально холодных месяцев. Причем, как видно из таблицы 1, P_X в относительных единицах меняется с ростом Δt сильнее, чем P_T . При похолодании, то есть при отрицательных значениях Δt для данного месяца, имеет место обратная ситуация.

Представляет интерес сравнить полученные результаты с реальной повторяемостью аномальных событий в Крыму. С этой целью нами были обработаны данные по среднемесячным температурам в ряде населенных пунктов Крыма [5]. В таблицах 2 и 3 приведены эмпирические повторяемости аномальных месяцев в Севастополе для двух периодов наблюдений. Продолжительность обоих периодов составляет 55 лет, что при $P=0.023$ соответствует 1.27 лет за период. При неизменном математическом ожидании среднемесячных температур с учетом статистического разброса в таблицах должны стоять цифры, близкие к 1.

Таблица 2- Количество аномально теплых месяцев

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1886-1940	2		1			1	2	2	1	2	1	1
1945-1999			1	1	1	1	1		1	3		1

Таблица 3- Количество аномально холодных месяцев

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1886-1940		3	2	2			2			1	2	
1945-1999	2	2			1		1	2	1	2	2	2

Однако, на самом деле для некоторых месяцев обнаруживаются весьма существенные отклонения от этой картины. Например, для июня не было зарегистрировано ни одного аномально холодного месяца за оба периода наблюдений при норме аномально теплых. Наиболее показательным с точки зрения климатических изменений здесь является завышенное коли-

чество (2-3) аномально холодных лет при почти полном отсутствии аномально теплых для зимних месяцев в период с 1945 по 1999 г. Если просуммировать результаты по четырем последовательным месяцам (ноябрь-февраль), то окажется, что аномально холодных было 8, а аномально теплых – 1. В соответствии с таблицей 1 это соответствует понижению средне-месячных температур почти на $\Delta t = \sigma$. Оценка линейных трендов для периода 1970-1999 гг., когда происходило наиболее сильное изменение климата, показывает, что это действительно имело место [5].

Следует отметить, что относительное изменение вероятности менее аномальных событий (например, реализация температур в интервале $\bar{t} - 2\sigma < t < \bar{t} - \sigma$) существенно меньше при не очень больших Δt . В самом деле, абсолютное изменение вероятности при “сдвиге” нормального распределения на dt определяется как первая производная от гауссовской плотности распределения $p(t)$:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(t - \bar{t})}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t - \bar{t})^2}{2\sigma^2}} \quad (7)$$

Нетрудно показать, что вторая производная равна нулю при $|t - \bar{t}| = \sigma$, то есть абсолютное изменение вероятности максимально в окрестностях $t = \bar{t} \pm \sigma$. Однако, относительное изменение вероятности характеризуется величиной:

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{(t - \bar{t})}{\sigma^2} \quad (8)$$

Отсюда видно, что правая часть принимает наибольшие значения при больших $(t - \bar{t})$, т.е. относительное изменение вероятности максимально именно для аномальных событий. Таким образом, анализ повторяемости аномальных событий разных знаков может служить индикатором самого смещения математического ожидания. Например, по эмпирическим данным (таблица 2 и таблица 3), используя результаты расчетов (таблица 1) можно сделать вывод о похолодании зим в Севастополе.

Библиографический список

1. Ермаков С.М. Курс статистического моделирования / С.М.Ермаков, Г.А. Михайлов. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
2. Титов В.Б. Об оценке температурного режима атмосферы, формирующего гидрологическую структуру Черного моря / В.Б. Титов, М.Т. Савин // Метеорология и гидрология. — 2000. — №10. — С. 78 – 84.
3. Кобышева Н.В. Косвенные расчеты климатических характеристик / Н.В. Кобышева. — Л.: Гидрометеорологическое изд-во, 1971. — 191 с.
4. Исаев А.А. Статистика в метеорологии и климатологии / А.А. Исаев. — М.: МГУ, 1988. — 245 с.

5. Дегтерев А.Х. Сезонный ход температур и осадков на Крымском побережье /А.Х. Дегтерев, Л.Н. Репетин, В.В. Севриков // Вестн. СевГТУ: Сб. науч. тр. Сер. Механика, энергетика, экология. — Севастополь, 2002. — Вып. 39. — С. 123 – 128.

Поступила в редакцию 21.06.2003 г.