

УДК 517.91

А.В. Пухлий, В.А. Пухлий

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г.Севастополь, Украина, 99053

pu161@sevcom.net

АЛГОРИТМ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

«...Было бы преждевременным на основании доверия к «выводам» машинной техники приближенные аналитические методы считать окончательно устаревшими.»

Академик Л.В.Канторович

Излагается аналитический подход к решению краевых задач математической физики для систем эллиптических уравнений в частных производных [1, 2]. Идея такого подхода заключается в том, что на первом этапе для приведения двумерных краевых задач к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в общем случае с переменными коэффициентами используются процедуры метода Бубнова-Власова, либо более общего метода интегральных соотношений А.А.Дородницына. На втором этапе аналитическое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений строится модифицированным методом последовательных приближений.

Многие прикладные и теоретические вопросы современного естествознания приводят к двумерным краевым задачам для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных, при решении которых широко применяются методы численного анализа. При этом наиболее часто используется метод сведения краевой задачи к ряду задач Коши с применением численных методов типа Рунге-Кутта, Адамса-Штермера при дальнейшем решении каждой из задач.

И хотя на основе такого подхода решен широкий круг задач математической физики, следует всегда помнить о том, что задача Коши для уравнений эллиптического типа является некорректной (как известно, она корректна для уравнений гиперболического типа), а поэтому в каждом конкретном случае необходимо тщательно обосновывать возможность сведения краевой задачи для эллиптических уравнений к ряду задач Коши. Недоучет этого обстоятельства может привести к неустойчивому счету при численной реализации на ЭВМ. Связано это с тем обстоятельством, что если собственные значения матрицы системы значительно отличаются по величине вещественной части, то при интегрировании с возрастанием аргумента в результате потери значащих цифр система векторов – решений

задач Коши становится почти линейно зависимой, вследствие этого нельзя с достаточной точностью определить постоянные интегрирования и сами искомые функции. Более устойчивыми в этом отношении являются методы прогонки в дифференциальной и разностной форме, методы непрерывной и дискретной ортогонализации.

В настоящее время широкое распространение получили численные методы. Однако, как справедливо отмечает академик Л.В.Канторович [3], было бы преждевременным на основании доверия к «выводам» машинной техники приближенные аналитические методы считать окончательно устаревшими. Применяя различного рода модификации, некоторые из этих методов могут быть существенным образом улучшены. Классическим примером такого рода модификации являются разработанные академиком А.Н.Крыловым методы ускорения сходимости тригонометрических рядов.

Проведенные исследования ряда краевых задач математической физики [1, 2] показали, что в ряде случаев имеет место медленная сходимость степенных рядов в модифицированном методе последовательных приближений.

Известно, что одна и та же функция может быть представлена целым спектром различных степенных рядов. Представляя по существу одну и ту же функцию, все они обладают весьма различной скоростью сходимости. Если мы преследуем цель – получить абсолютную точность, то все эти представления равнозначны. Но если наша цель – заданная ограниченная точность, то эти представления будут совершенно различны. Самой слабой сходимостью обладают ряды Тейлора, с другой стороны, самая сильная сходимость характерна для полиномов Чебышева.

В данной работе для ускорения сходимости решения используется метод телескопического сдвига степенного ряда Ланцоша [4]. Идея метода заключается в том, что имеющийся в нашем распоряжении ряд Мак-Лорена телескопически сдвигается в гораздо более короткий ряд, не теряя в точности. Для этого используется возможность представления любого степенного ряда через смещенные полиномы Чебышева на интервале $[0, 1]$.

Изложение указанного подхода осуществим на решении одной из задач математической физики. Рассмотрим задачу изгиба прямоугольной в плане полой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 1). Напряженно-деформированное состояние оболочки описывается системой уравнений восьмого порядка относительно перемещений u , v , w , которая в безразмерных координатах $\xi = x/l$ и $\eta = y/b_1$ примет вид:

Граничные условия на косых краях панели $\eta_1 = 1 + k_1 m \xi$ и $\eta_2 = \alpha (1 + k_1 m \xi)$ соответствуют жесткому защемлению:

$$\bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = \bar{u} = \bar{v} = 0, \quad (2)$$

где $k_1 = tg \gamma_1$, $k_2 = tg \gamma_2$, $\alpha = b_2/b_1 = k_2/k_1$ – геометрические параметры панели.

На параллельных сторонах панели граничные условия могут быть произвольными. Не нарушая общности изложения, в дальнейшем граничные условия на параллельных краях панели будем рассматривать в виде (2).

К решению краевой задачи, описываемой уравнениями (1) и граничными условиями (2), применим метод интегральных соотношений академика Дородницына [5]. В соответствии с методом представим исходную систему уравнений (1) в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \eta} + \bar{L} = 0, \quad (3)$$

где $\bar{X} = \{X_i\} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$;

$$\bar{Y} = B_0 \bar{X} + B_1 \bar{X}_{,2} + B_2 \bar{X}_{,22} + B_3 \bar{X}_{,222};$$

$$\bar{L} = B \bar{X} + \bar{b}.$$

Здесь нижний индекс $i = 1, 2$, следующий после запятой, означает частное дифференцирование по соответствующей координате.

Через функции $z_1, z_2, \dots, z_5$ обозначены:

$$z_1 = \bar{u}_{,1}; \quad z_2 = \bar{v}_{,1}; \quad z_3 = \bar{w}_{,1}; \quad z_4 = \bar{w}_{,11}; \quad z_5 = \bar{w}_{,111}.$$

Элементы матриц $B_r = \{b_{mn,r}\}$ и $B = \{b_{mn}\}$, ($r = 0, 1, 2, 3$; $m, n = 1, 2, \dots, 8$) принимают следующие значения:

$$b_{28,0} = 12 \frac{ml^3}{Rh^2}; \quad b_{35,0} = \frac{2ml}{(1-\nu)R}; \quad b_{45,0} = \frac{1+\nu}{1-\nu} m;$$

$$b_{54,0} = \frac{1+\nu}{2} m; \quad b_{14,1} = \frac{1-\nu}{2} m; \quad b_{25,1} = \frac{2m^2}{1-\nu};$$

$$b_{78,1} = 2m^2; \quad b_{38,3} = m^4; \quad b_{38} = \frac{12l^4}{h^2 R^2};$$

$$b_{48} = 12 \frac{\nu l^2}{Rh^2}; \quad b_{64} = \frac{\nu l}{R}; \quad b_{41} = b_{52} = b_{63} = b_{76} = b_{87} = -1.$$

Остальные элементы равны нулю. Компоненты вектора $\bar{b}$ равны

$$b_8 = -1; \quad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0.$$

Следуя методу интегральных соотношений ищем решение системы уравнений (1) в виде:

$$X_i(\xi, \eta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n X_{ij}(\xi) P_j(\xi, \eta) & (i = 3, 6, 7, 8); \\ \sum_{j=1}^n X_{ij}(\xi) P_{j,2}(\xi, \eta) & (i = 1, 2); \\ \sum_{j=1}^n X_{ij}(\xi) P_{j,22}(\xi, \eta) & (i = 4, 5). \end{cases} \quad (4)$$

В качестве системы аппроксимирующих функций выбираем полиномы Якоби $P_j(\xi, \eta)$:

$$P_j(\xi, \eta) = P_1(\xi, \eta) \sum_{j=1}^n \left[\eta - \frac{(1+\alpha)r}{2} \right]^{j-1} \quad (5)$$

$$P_1(\xi, \eta) = \eta^4 - 2(1+\alpha)r\eta^3 + (1+4\alpha+\alpha^2)r^2\eta^2 - 2\alpha(1+\alpha)r^3\eta + \alpha^2r^4$$

$$r = 1 + km\xi$$

Полиномы $P_j(\xi, \eta)$ на отрезке $[r, \alpha r]$ удовлетворяют условиям ортогональности:

$$(P_i, P_k) = \int_r^{\alpha r} P_i P_k d\eta = 0 \quad \text{при } i \neq k.$$

Они образуют систему линейно-независимых функций и удовлетворяют граничным условиям задачи. Рассматривая полиномы P_i и P_k как обобщенные векторы в гильбертовом пространстве L_2 , отметим еще одно важное их свойство: их первые и вторые производные также ортогональны.

В качестве весовых функций выбираем также полиномы $P_j(\xi, \eta)$ и их первые производные:

$$P_j(\xi, \eta) = \begin{cases} P_j(\xi, \eta) & (i = 3, 6, 7, 8); \\ P_{j,2}(\xi, \eta) & (i = 1, 2, 4, 5). \end{cases}$$

Затем, применяя процедуру метода интегральных соотношений к исходной системе уравнений, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $8n$ с переменными коэффициентами, решение которой в дальнейшем осуществляется модифицированным методом последовательных приближений.

Запишем общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, полученное модифицированным методом последовательных приближений через смещенные полиномы Чебышева [6].

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений представим следующим образом:

$$\frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^s B_{v,m} X_v + f_m \quad m = 1, 2, \dots, s. \quad (6)$$

Пусть переменные коэффициенты $B_{v,m}$ и свободные члены f_m представлены через смещенные полиномы Чебышева:

$$B_{v,m} = \sum_{r=0}^q b_{v,m,r} d_r^{-1} \sum_{k=0}^r a_k T_k^*(\xi), \quad f_m = \sum_{r=0}^q f_{m,r} (d_r \cdot r!)^{-1} \sum_{k=0}^r a_k T_k^*(\xi). \quad (7)$$

Здесь q – степень интерполяционного полинома; a_k – коэффициенты разложения ξ^{-1} в ряд по многочленам Чебышева $T_k^*(\xi)$. В выражениях (7) $d_r = 1$ для $r = 0$ и $d_r = 2^{2r-1}$ для остальных r .

Общее решение системы уравнений (6) имеет вид:

$$X_m = \sum_{\mu=1}^s c_{\mu} \left[d_0^{-1} a_0 T_0^*(\xi) \delta + \sum_{n=1}^{\infty} X_{m,\mu,n} \right] + \sum_{j=0}^q t_{m,j,0} \left[d_{j+1}^{-1} (j+1)! \right]^{-1} \sum_{k=0}^{j+1} a_k T_k^*(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} X_{m,n}, \quad (8)$$

где $t_{m,j,0} = f_{m,r}$ при $j = r$; μ – номер фундаментальной функции; c_{μ} – постоянные интегрирования.

В решении (8) будет $\delta = 1$, если $m = \mu$ и $\delta = 0$ для остальных μ . Первое приближение $X_{m,\mu,1}$ получается из подстановки нулевого приближения:

$$d_0^{-1} a_0 T_0^*(\xi) \delta \quad \text{в правую часть системы} \quad \frac{dX_m}{d\xi} = \sum_{v=1}^s B_{v,m} X_v.$$

Последующие приближения осуществляются по формулам:

$$X_{m,\mu,n} = \sum_{j=1}^{\beta} t_{m,\mu,n,j} \left[d_{n+j-1}^{-1} (n+j-1)! \right]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k T_k^*(\xi); \quad (9)$$

$$X_{m,n} = \sum_{j=1}^{\beta} t_{m,n,j} \left[d_{n+j-1}^{-1} (n+j-1)! \right]^{-1} \sum_{k=0}^{n+j-1} a_k T_k^*(\xi),$$

где $\beta = n(q+3) - 2$.

Системы фундаментальных функций (9) являются равномерно сходящимися рядами, при этом коэффициенты $t_{m,\mu,n,j}$ и $t_{m,n,j}$ определяются

$$t_{m,\mu,n,j} = \sum_{v=1}^s \sum_{r=0}^q b_{v,m,r} t_{v,\mu,n-1,j-r} (n+j-1)^{-1} \prod_{\gamma=0}^r (n+j-1-\gamma);$$

$$t_{m,\mu,n,j} = \sum_{v=1}^s \sum_{r=0}^q b_{v,m,r} t_{v,\mu,n-1,j-r} (n+j-1)^{-1} \prod_{\gamma=0}^r (n+j-1-\gamma). \quad (10)$$

Постоянные c_μ , входящие в общее решение (8), находятся из граничных условий.

На рис. 2 приводятся результаты расчета безразмерных прогибов в центре стальной панели для различных углов косины γ_1 при соотношении сторон $m = 0,5; 1; 2$. Геометрические параметры панели следующие: $\alpha = 2$; $s = 0,01$; $R/l = 15$; $v = 0,3$. Как видно из графика, величины прогибов с возрастанием угла косины и уменьшением соотношения сторон увеличиваются.

При расчетах использовались два подхода. Первый подход сводился к представлению решения в модифицированном методе последовательных приближений через обычные степенные ряды [1, 2]. Во втором подходе

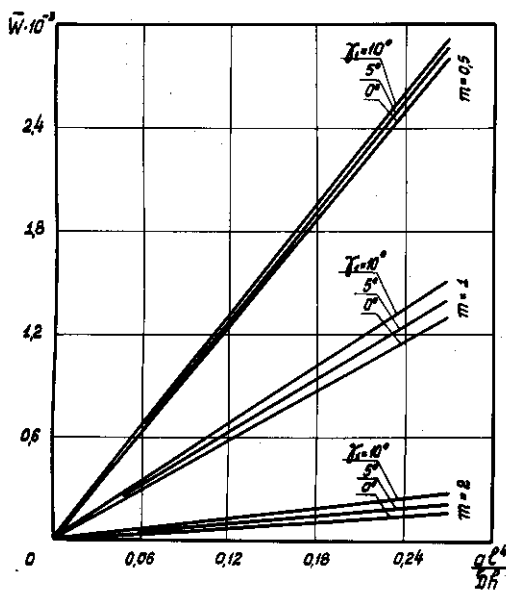


Рисунок 2 - Прогибы цилиндрической панели при различных углах косины γ_1 и соотношении сторон m

вместо этих рядов использовались ряды, образованные из данных рядов методом телескопического сдвига степенных рядов Ланцоша [4]. Следует отметить, что второй подход дает возможность гораздо быстрее вычислять частичную сумму ряда с заданной точностью. Если при первом подходе заданная точность достигалась при числе членов степенного ряда порядка 120 и время счета на ЭВМ в среднем составляло около 2 часов, то при втором подходе количество членов ряда составляло 30-40 и соответственно время счета порядка 1 часа. Связано это с тем обстоятельством, что мы пользовались уже не

обыкновенными степенными рядами, а разложениями по полиномам Чебышева. Особенно сказываются преимущества данного подхода при решении задач для слоистых оболочек, где порядок уравнений существенно выше, чем у однородных оболочек.

Библиографический список

1. Пухлий В.А. Метод аналитического решения двумерных краевых задач для систем эллиптических уравнений / В.А.Пухлий // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. — 1978. — Т.18. — №5. — С. 1275 – 1282.
2. Пухлий В.А. Об одном подходе к решению краевых задач математической физики / В.А. Пухлий // Дифференциальные уравнения. — 1979. — Т.15. — №11. — С. 2039 – 2043.
3. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений /Л.В.Канторович // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т.3. — №5. — С. 701 – 709.
4. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа / К.Ланцош. — М.: Физматгиз, 1961. — 524 с.
5. Дородницын А.А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя / А.А.Дородницын // ЖПМТФ. — 1960. — №3. — С. 111 – 118.
6. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю.Люк. — М.: Мир, 1980. — 510 с.

Поступила в редакцию 17.05.2002 г.