

УДК 51

Т.П. Семенова

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

tk@sevgtu.sebastopol.ua

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Для упрощения решения сложного показательного или логарифмического неравенства предлагаются формулы перехода к алгебраическому неравенству.

Из строгой монотонности логарифмической и показательной функции следует равносильность переходов, используемых при решении показательных и логарифмических неравенств [1].

$$f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \vee h(x) \\ f(x) > 1 \\ h(x) \vee g(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

Здесь знак $\vee$ - один из знаков $<, >$, но один и тот же во всей формуле.

$$f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \vee h(x) \\ f(x) \geq 1 \\ h(x) \vee g(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \end{cases}$$

Здесь знак $\vee$ - один из знаков $\geq, \leq$, но один и тот же во всей формуле.

$$\log_{f(x)} g(x) \vee \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \vee h(x) \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \\ h(x) \vee g(x) \\ h(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

Здесь и далее знак $\vee$ - один из знаков $\geq, \leq, >, <$, но один и тот же во всей формуле.

Как видим, приходится рассматривать два случая, когда $f(x) > 1$ ($f(x) \geq 1$) и когда $0 < f(x) < 1$. Оба случая (как правило) приводят к гро-

моздким системам неравенств. Поэтому решение указанных неравенств при таком методе их решения весьма трудоемко.

Можно утверждать, что если

$$f(x)^{g(x)} \vee f(x)^{h(x)}, \quad (1)$$

то

$$(f(x) - 1)(g(x) - h(x)) \vee 0. \quad (2)$$

Действительно, если $f(x) > 1 \Rightarrow f(x) - 1 > 0$, то из формулы перехода следует, что $g(x) \vee h(x) \Rightarrow g(x) - h(x) \vee 0$ и тогда, умножив последнее неравенство на $f(x) - 1 > 0$, получим равносильное неравенство $(f(x) - 1)(g(x) - h(x)) \vee 0$, если же $0 < f(x) < 1$, то есть $f(x) - 1 < 0$, то согласно формулам перехода $h(x) \vee g(x) \Rightarrow h(x) - g(x) \vee 0$ и, умножая последнее неравенство на $f(x) - 1 < 0$, получим равносильное неравенство $(f(x) - 1)(g(x) - h(x)) \vee 0$. Если же неравенство (1) нестрогое, то ясно, что при $f(x) = 1$ будет выполняться неравенство (2).

Аналогично доказывается что, если

$$\log_{f(x)} g(x) \vee \log_{f(x)} h(x), \quad (3)$$

то

$$(f(x) - 1)(g(x) - h(x)) \vee 0. \quad (4)$$

Из рассмотренного вытекает, как следствие, что если

$$F(x)(f(x)^{g(x)} - f(x)^{h(x)}) \vee 0, \quad (5)$$

то

$$F(x) (f(x) - 1)(g(x) - h(x)) \vee 0, \quad (6)$$

и если

$$F(x)(\log_{f(x)} g(x) - \log_{f(x)} h(x)) \vee 0, \quad (7)$$

то

$$F(x) (f(x) - 1)(g(x) - h(x)) \vee 0. \quad (8)$$

Таким образом, можно утверждать, что при $f(x) > 0$ неравенство (1) равносильно неравенству (2), а неравенство (5) равносильно неравенству (6). При $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$ неравенство (3) равносильно неравенству (4) и неравенство (7) равносильно неравенству (8).

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи неравенств (1) и (3). Если правая часть неравенства (1) является постоянной величиной, т.е. неравенство имеет вид

$$u^v \vee a, \quad (9)$$

где u и v некоторые функции от x , причем $u > 0$ и $u \neq 1$, то неравенство (9) равносильно [2] неравенству

$$(u-1)(v - \log_u a) v > 0. \quad (10)$$

Если при этом $a=1$, то [3] неравенство (10) примет вид

$$(u-1)v > 0. \quad (11)$$

В том случае, когда правая часть неравенства (3) является постоянной величиной, т.е. неравенство имеет вид

$$\log_u v > a, \quad (12)$$

где u и v некоторые функции от x , причем $u > 0$ и $u \neq 1$, $v > 0$, то неравенство (12) равносильно [2] неравенству

$$(u-1)(v - u^a) v > 0. \quad (13)$$

Если же при этом $a=1$, то неравенство (13) примет вид

$$(u-1)(v - u) v > 0. \quad (14)$$

В том случае, когда $a=0$ [3], неравенство (13) будет иметь вид

$$(u-1)(v-1) v > 0. \quad (15)$$

При этом неравенство

$$F \cdot \log_u v > 0, \quad (16)$$

где F , u и v также некоторые функции от x , и $u > 0$, $u \neq 1$, $v > 0$, равносильно неравенству

$$F(u-1)(v-1) v > 0. \quad (17)$$

Применение этих утверждений значительно упрощает и сокращает решение неравенств. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1.

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} \leq (4x^2 + 2x + 1)^{2x}.$$

Решение. Найдем О.Д.З. $4x^2 + 2x + 1 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

Согласно (2) получаем неравенство

$$(4x^2 + 2x + 1 - 1)(x^2 - x - 2x) \leq 0 \Rightarrow x^2(2x + 1)(x - 3) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (2x + 1)(x - 3) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right] \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right].$$

Пример 2.

$$\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < \log_x \frac{1}{x}.$$

Решение. О.Д.З.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \frac{4x+5}{6-5x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0;1) \cup (1;+\infty) \\ x \in \left(-\frac{5}{4}; \frac{6}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup \left(1; \frac{6}{5}\right).$$

Пользуясь неравенством (4), имеем

$$(x-1)\left(\frac{4x+5}{6-5x} - \frac{1}{x}\right) < 0 \Rightarrow (x-1)\frac{4x^2+5x-6+5x}{x(5x-6)} > 0$$

$x(x-1)\left(x-\frac{6}{5}\right)(2x^2+5x-3) > 0 \Rightarrow x(x-1)\left(x-\frac{6}{5}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3) > 0$, решаем «методом интервалов» - рисунок 1.

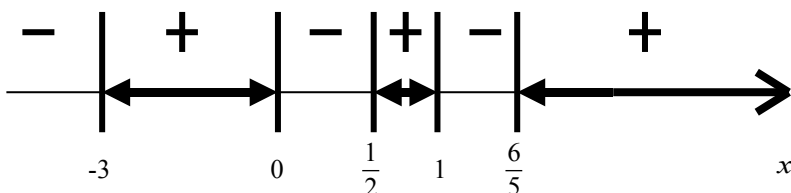


Рисунок 1- Иллюстрация решения «методом интервалов»

С учетом О.Д.З. получаем

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Пример 3.

$$27 \cdot 7^x - 21^x + 3^x < 27.$$

Решение. О.Д.З. $x \in \mathbb{R}$.

Перенесем все члены неравенства в одну часть

$$27 \cdot 7^x - 27 - 21^x + 3^x < 0,$$

сгруппируем члены (первый со вторым, третий с четвертым) и вынесем за скобку общий множитель

$$\begin{aligned} 27(7^x - 1) - 3^x(7^x - 1) < 0 &\Rightarrow (7^x - 1)(27 - 3^x) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (7^x - 7^0)(3^x - 3^3) > 0. \end{aligned}$$

Согласно формуле (6) данное неравенство равносильно неравенству

$$x(x-3) > 0.$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Пример 4.

$$\frac{2\log_2(x-1) - \log_2(x+1)}{\log_3(x-1)\log_5(x+1)} > 0.$$

Решение. О.Д.З. $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (1; 2) \cup (2; +\infty).$

Пользуясь формулами (8) и (17), придем к решению неравенства

$$\begin{aligned} & ((x-1)^2 - (x+1))(x-1-1)(x+1-1) > 0 \\ & x^2(x-3)(x-2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x-2) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty) \\ x \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

С учетом О.Д.З. получаем

Ответ: $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Пример 5 [4].

$$(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1.$$

Решение. О.Д.З. $x > 0$.

Согласно формуле (11) получаем

$$(2^x + 3 \cdot 2^{-x} - 1)(2\log_2 x - \log_2(x+6)) > 0.$$

Применим к полученному неравенству формулу (8)

$$(2^{2x} - 2^x + 3)(x^2 - x - 6) > 0 \Rightarrow (x+2)(x-3)(2^{2x} - 2^x + 3) > 0,$$

так как $2^{2x} - 2^x + 3 > 0$ при $x \in \mathbb{R}$ ($D < 0$) и $x+2 > 0$ в О.Д.З. то, разделив на $(x+2)(2^{2x} - 2^x + 3)$ обе части неравенства, получим равносильное неравенство

$$x-3 > 0 \Rightarrow x > 3.$$

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

Данное неравенство можно было решать логарифмированием обеих частей неравенства по основанию 2, а затем применить к полученному неравенству формулу (17).

Пример 6.

$$\log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8) > 2.$$

Решение. О.Д.З.
$$\begin{cases} 3x+5 > 0 \\ 3x+5 \neq 1 \\ 9x^2+8x+8 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; +\infty\right).$$

Согласно (13) получим неравенство

$$(3x+4)(9x^2+8x+8-(3x+5)^2) > 0 \Rightarrow \left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{17}{22}\right) < 0.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{4}{3}; -\frac{17}{22}\right).$

Пример 7 [4].

$$\log_x(x^3+1)\log_{x+1}x > 2.$$

Решение. О.Д.З.
$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;+\infty).$$

Преобразуем наше неравенство, пользуясь логарифмическими тождествами

$$\frac{\log_x(x^3+1)}{\log_x(x+1)} > 2 \Rightarrow \log_{x+1}(x^3+1) > 2.$$

К полученному неравенству применим формулу (13)

$$\begin{aligned} (x+1-1)(x^3+1-(x+1)^2) > 0 &\Rightarrow x(x+1)(x^2-2x) > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2(x+1)(x-2) > 0, \end{aligned}$$

так как по О.Д.З. $x > 0$ данное неравенство равносильно

$$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2.$$

Ответ: $x \in (2;+\infty).$

Пример 8.

$$\log_{x^2}(2+x) < 1.$$

Решение. О.Д.З.
$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \\ 2+x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

Согласно (14) имеем

$$\begin{aligned} (x^2-1)(2+x-x^2) < 0 &\Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2-x-2) > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-1)(x+1)^2(x-2) > 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) > 0, \end{aligned}$$

так как $(x+1)^2 > 0$ в О.Д.З.

Ответ: $x \in (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 9 [5].

$$\log_{3x}(42x^2 - 13x + 1) > 0.$$

Решение. О.Д.З.
$$\begin{cases} 3x > 0 \\ 3x \neq 1 \\ 42x^2 - 13x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(0; \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Применим к нашему неравенству формулу (15). Имеем:

$$(42x^2 - 13x)(3x - 1) > 0 \Rightarrow x \in \left(0; \frac{13}{42}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Учитывая О.Д.З., получаем

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{13}{42}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$

Пример 10.

$$\frac{\log_{(2-x)}(x+2) \cdot \log_{(x+3)}(3-x)}{x^2 + x - 2} \leq 0.$$

Решение. О.Д.З.
$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2-x \neq 1 \\ x+2 > 0 \\ x+3 \neq 1 \\ x^2 + x - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \neq 1 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; 2).$$

Согласно (17) получаем равносильное неравенство

$$\begin{aligned} (2-x-1)(x+2-1)(x+3-1)(3-x-1)(x^2+x-2) &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1-x)(x+1)(x+2)(2-x)(x-1)(x+2) &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x+2)^2(x-1)^2(x+1)(x-2) &\leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 2], \end{aligned}$$

так как $(x+2)^2(x-1)^2 > 0$ в О.Д.З. Учитывая О.Д.З., получаем

Ответ: $x \in [-1; 1) \cup (1; 2).$

Библиографический список

1. Гейдман Б.П. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства: Учеб. пособие / Б.П. Гейдман. — М.: МЦНМО, 2003. — 48 с.: ил.
2. Матвеев В.Н. Сборник задач по математике / В.Н. Матвеев, Н.М. Матвеев. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1968. — 276 с.
3. Ваховский Е.Б. Задачи по элементарной математике / Е.Б. Ваховский, А.А. Рывкин. — М.: Наука, 1971. — 360 с.
4. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Учеб. пособие / Под ред. М.И. Сканави. — 6-е изд., стереотип. — М.: Высш. шк., 1992. — 528 с.

5. Затакавай В. Некоторые полезные показательные и логарифмические соотношения / В. Затакавай // Квант. — 1990. — № 10. — С. 42 – 43.

Поступила в редакцию 21.01.2004 г.