

УДК 517.5

С.В. Доценко, профессор, д-р физ.-мат. наук

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ЧИСЛЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, ОСНОВАННОЕ НА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ КУБИЧЕСКИМ СПЛАЙНОМ

Разработан метод численного нахождения интегралов Фурье от гладких функций, имеющих непрерывные первую и вторую производные. Применение сплайнов позволило получить результирующие формулы высокой точности достаточно простого вида. Тестирование метода с помощью составленные по ним программы показало его высокую эффективность.

В ряде приложений возникает задача вычисления интегралов Фурье

$$I_c(\omega) = \int_0^{x_{\max}} f(x) \cos(\omega x) dx, \quad I_s(\omega) = \int_0^{x_{\max}} f(x) \sin(\omega x) dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ – непрерывная функция, имеющая непрерывные первую и вторую производные. (Здесь и далее индекс c относится к косинус-преобразованию, а индекс s – к синус-преобразованию Фурье). Нередко наибольший интерес представляют значения интегралов (1) при больших значениях аргумента ω . Аналитически, как правило, такие интегралы не вычисляются.

Для численного нахождения величин этих интегралов могут быть применены многие известные классические правила интегрирования, такие как формулы трапеций, парабол и другие, основанные на формулах Котеса, Гаусса и т.д. В работах [1,2] рассмотрен метод вычисления интегралов (1), основанный на разбиении отрезка $[0, x_{\max}]$ на n интервалов, кусочно-полиномиальной интерполяции функции $f(x)$ на этом отрезке с последующим точным вычислением частичных интегралов на этих интервалах, составляющих выражение (1), и их суммированием. Однако эти виды интерполяции, обеспечивая непрерывность интерполирующей функции, создают разрывы ее производных в точках отсчета, что может привести к заметным погрешностям вычисления интегралов (1), особенно при больших ω .

Получим формулы численного определения значений интегралов (1) при интерполировании их подынтегральных функций $f(x)$ кубическими сплайнами дефекта 1, сохраняющими все преимущества полиномов, но лишенными указанных недостатков. Для этого разделим интервал интегрирования $[0, x_{\max}]$ в формуле (1) на n равных подынтервалов таким образом, чтобы интерполирующий полином достаточно точно отображал функцию $f(x)$. Величина $h = x_{\max}/n$ есть шаг дискретизации функции $f(x)$ (рисунок 1). Очевидно, можно записать

$$I_c(\omega) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cos(\omega x) dx, \quad I_s(\omega) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \sin(\omega x) dx. \quad (2)$$

По определению кубическим сплайном дефекта 1 называется функция [3] (рисунок 2)

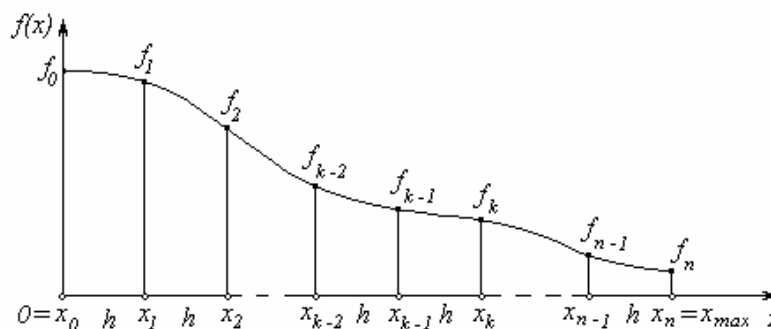


Рисунок 1 – Дискретизация функции $f(x)$

$$g_k(x) = a_k + b_k h^{-1} (x - x_k) + c_k h^{-2} (x - x_k)^2 + d_k h^{-3} (x - x_k)^3, \quad (3)$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k], \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

В этой записи в отличие от классического определения сплайна добавлены отрицательные степени шага дискретизации h . Благодаря этому все коэффициенты a_k, b_k, c_k, d_k приобретают одинаковую размерность, совпадающую с размерностью $g_k(x)$. Сплайн осуществляет кусочно-полиномиальную

интерполяцию функции $f(x)$ последовательными звеньями $g_k(x)$ и обеспечивает непрерывность интерполирующей функции и ее первых двух производных на всем интервале $[0, x_{\max}]$.

Для этого звенья $g_k(x)$ сплайна должны удовлетворять следующей совокупности условий:

- условие интерполяции в узлах сплайна

$$g_1(x_0) = f(x_0) = f_0, \quad g_k(x_k) = f(x_k) = f_k, \quad (k=1, \dots, n), \quad (4)$$

- условие стыковки звеньев сплайна

$$g_{k-1}(x_{k-1}) = g_k(x_{k-1}), \quad (k=2, 3, \dots, n), \quad (5)$$

- условие непрерывности первой производной сплайна в его узлах

$$g'_{k-1}(x_{k-1}) = g'_k(x_{k-1}), \quad (k=2, 3, \dots, n), \quad (6)$$

- условие непрерывности второй производной сплайна в его узлах

$$g''_{k-1}(x_{k-1}) = g''_k(x_{k-1}), \quad (k=2, 3, \dots, n). \quad (7)$$

Представленные условия позволяют составить $4n-2$ линейных уравнения для определения $4n$ неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k сплайнов (3). Оставшиеся два уравнения определяются на основании краевых условий, которые рассмотрим ниже.

Заменяя в (2) функцию $f(x)$ интерполирующим ее сплайном (3), выразим формулы для интегралов Фурье в виде суммы

$$f_c(\omega) = \sum_{k=1}^n f_{ck}(\omega) + R_c(\omega), \quad f_s(\omega) = \sum_{k=1}^n f_{sk}(\omega) + R_s(\omega), \quad (8)$$

частичных интегралов от звеньев сплайнов

$$f_{ck}(\omega) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} g_k(x) \cos(\omega x) dx, \quad f_{sk}(\omega) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} g_k(x) \sin(\omega x) dx \quad (9)$$

и погрешностей преобразования $R_c(\omega)$ и $R_s(\omega)$, связанных с такой заменой. Очевидно, что уменьшение шага дискретизации h уменьшает величину последних.

Учитывая вид сплайна (3), запишем частичные интегралы (9) в виде

$$\begin{aligned} f_{ck}(\omega) &= a_k T_{ck}^{(0)} + b_k T_{ck}^{(1)} + c_k T_{ck}^{(2)} + d_k T_{ck}^{(3)}, \\ f_{sk}(\omega) &= a_k T_{sk}^{(0)} + b_k T_{sk}^{(1)} + c_k T_{sk}^{(2)} + d_k T_{sk}^{(3)}. \end{aligned} \quad (10)$$

В эти выражения входят интегралы

$$T_{ck}^{(m)} = h^{-m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k)^m \cos(\omega x) dx, \quad T_{sk}^{(m)} = h^{-m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k)^m \sin(\omega x) dx,$$

которые вычисляются точно и могут быть записаны в виде

$$T_{ck}^{(m)} = [\mu_m \cos(k\theta) + \nu_m \sin(k\theta)]h, \quad T_{sk}^{(m)} = [\mu_m \sin(k\theta) - \nu_m \cos(k\theta)]h. \quad (11)$$

В этих выражениях обозначены пропорциональная частоте переменная $\theta = \omega h$ и зависящие от нее коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad \mu_1 = \frac{1 - \cos \theta - \theta \sin \theta}{\theta^2}, \\ \mu_2 &= \frac{2\theta \cos \theta - (2 - \theta^2) \sin \theta}{\theta^3}, \quad \mu_3 = \frac{6(\theta \sin \theta + \cos \theta - 1) - \theta^2(3 \cos \theta + \theta \sin \theta)}{\theta^4} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 &= \frac{1 - \cos \theta}{\theta}, \quad \nu_1 = \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2}, \\ \nu_2 &= \frac{2(\cos \theta + \theta \sin \theta - 1) - \theta^2 \cos \theta}{\theta^3}, \quad \nu_3 = \frac{3(2 \sin \theta - 2\theta \cos \theta - \theta^2 \sin \theta) + \theta^3 \cos \theta}{\theta^4} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Подставим в (10) формулы (11):

$$\frac{f_{ck}(\omega)}{h} = F_{ck} \cos(k\theta) + F_{sk} \sin(k\theta), \quad \frac{f_{sk}(\omega)}{h} = F_{ck} \sin(k\theta) - F_{sk} \cos(k\theta) \quad (14)$$

и найдем зависящие от θ коэффициенты

$$F_{ck} = a_k \mu_0 + b_k \mu_1 + c_k \mu_2 + d_k \mu_3, \quad F_{sk} = a_k \nu_0 + b_k \nu_1 + c_k \nu_2 + d_k \nu_3. \quad (15)$$

Используя условия (4)-(7), выразим входящие в формулы (15) коэффициенты b_k и d_k через c_k . Из общего полинома (3) имеем первое звено сплайна

$$g_1(x) = a_1 + b_1 h^{-1}(x - x_1) + c_1 h^{-2}(x - x_1)^2 + d_1 h^{-3}(x - x_1)^3.$$

Применение к нему первого условия (4), т.е. $g_1(x_0) = f_0$, позволяет найти первое из искоемых уравнений

$$a_1 - b_1 + c_1 - d_1 = f_0. \quad (16)$$

Остальные условия (4) дают n значений коэффициентов $a_k = f_k$, $(k=1,2,...,n)$. Далее, из полинома (3) и условий (5) имеем $n-1$ равенство $a_{k-1} = a_k - b_k + c_k - d_k$, $(k=2,3,...,n)$. Отсюда с учетом (16) получаем n уравнений

$$b_k - c_k + d_k = \Delta f_{k-1}, \quad (k=1,2,...,n), \quad (17)$$

где обозначены конечные разности функции $f(x)$ с шагом h

$$\Delta f_{k-1} = f_k - f_{k-1}. \quad (18)$$

Продифференцируем полиномы (3) по x :

$$g'_k(x) = b_k h^{-1} + 2c_k h^{-2}(x - x_k) + 3d_k h^{-3}(x - x_k)^2, \quad (19)$$

и подставим их в условия (6). Это дает $n-1$ уравнение

$$b_{k-1} = b_k - 2c_k + 3d_k, \quad (k=2,3,...,n). \quad (20)$$

и, наконец, имеем $g''_k(x) = 2c_k h^{-2} + 6d_k h^{-3}(x - x_k)$, $(k=2,3,...,n)$. Отсюда получим условия (7) в форме $d_k = (c_k - c_{k-1})/3$, $(k=2,3,...,n)$. В последнем выражении индекс k меняется от 2 до n . Поэтому можно составить $n-1$ таких уравнений. Однако будем считать, что k меняется от 1 до n . Для этого введем фиктивный коэффициент c_0 , который ниже определим из левого граничного условия. Итак, примем

$$d_k = (c_k - c_{k-1})/3, \quad (k=1,2,...,n). \quad (21)$$

Комбинирование (17) и (21) дает

$$b_k = \Delta f_{k-1} + \frac{2}{3}c_k + \frac{1}{3}c_{k-1}, \quad (k=1,2,...,n). \quad (22)$$

Подставляя (22) и (21) в (20), находим систему из $n-1$ уравнений для определения c_k :

$$c_{k-2} + 4c_{k-1} + c_k = \lambda_k, \quad (k=2,3,...,n), \quad (23)$$

где обозначены как

$$\lambda_k = 3(\Delta f_{k-1} - \Delta f_{k-2}), \quad (k=2,3,...,n) \quad (24)$$

величины, пропорциональные конечным разностям второго порядка функции $f(x)$.

Считая, что c_0 задано, систему (23) следует доопределить еще одним, правым граничным условием.

Левое и правое граничные условия, необходимые для решения системы (23), обычно задаются в виде [4]

$$c_0 = \chi_1 c_1 + \gamma_1, \quad c_n = \chi_2 c_{n-1} + \gamma_2. \quad (25)$$

Будем решать систему (23), (25) методом прогонки [3,4]. Для этого предположим, что имеет место соотношение

$$c_{k-1} = p_k c_k + q_k \quad (26)$$

с неопределенными коэффициентами p_k и q_k , и подставим вытекающее отсюда равенство $c_{k-2} = p_{k-1}c_{k-1} + q_{k-1}$ в (23). Получим $(4 + p_{k-1})c_{k-1} + c_k = \lambda_k - q_{k-1}$. Сравнение с (26) дает

$$p_k = -\frac{1}{4 + p_{k-1}}, \quad q_k = (q_{k-1} - \lambda_k) p_k, \quad (k=2,3,...,n), \quad (27)$$

причем справедливо (24).

Используем левое краевое условие для определения начальных значений p_1 и q_1 . Из формул (26) при $k=1$ и (25) находим

$$p_1 = \chi_1, \quad q_1 = \gamma_1. \quad (28)$$

Зная p_1 и q_1 и переходя в формулах (27) от k к $k+1$ (прямая прогонка) можно определить p_k и q_k для всех $k=2,3,...,n$.

Вычисления коэффициентов c_{k-1} при известных c_k по формуле (26) ведутся путем перехода от k к $k-1$ (обратная прогонка). Для этого необходимо знать c_n , которое определим из правого граничного условия (25), подставив в него (26) при $k=n$:

$$c_n = \frac{\gamma_2 + \chi_2 q_n}{1 - \chi_2 p_n}. \quad (29)$$

Вернемся к вычислению величин (15). Учитывая соотношения $a_k = f_k$, (21) и (22), выразим их только через коэффициенты c_k :

$$F_{ck} = u_0 f_k + u_1 f_{k-1} + u_2 c_k + u_3 c_{k-1}, \quad F_{sk} = w_0 f_k + w_1 f_{k-1} + w_2 c_k + w_3 c_{k-1}, \quad (30)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \mu_0 + \mu_1, \quad u_1 = -\mu_1, \quad u_2 = \frac{1}{3}(2\mu_1 + 3\mu_2 + \mu_3), \quad u_3 = \frac{1}{3}(\mu_1 - \mu_3), \\ w_0 &= v_0 + v_1, \quad w_1 = -v_1, \quad w_2 = \frac{1}{3}(2v_1 + 3v_2 + v_3), \quad w_3 = \frac{1}{3}(v_1 - v_3). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Подставим (14) в (8), считая погрешности $R_c(\omega)$ и $R_s(\omega)$ пренебрежимо малыми:

$$\begin{aligned} \frac{f_c^*(\omega)}{h} &= \sum_{k=1}^n F_{ck} \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^n F_{sk} \sin(k\theta), \\ \frac{f_s^*(\omega)}{h} &= \sum_{k=1}^n F_{ck} \sin(k\theta) - \sum_{k=1}^n F_{sk} \cos(k\theta). \end{aligned} \quad (32)$$

Учитывая представление (30), вычислим входящую сюда сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{ck} \cos(k\theta) &= u_0 \sum_{k=1}^n f_k \cos(k\theta) + u_1 \sum_{k=1}^n f_{k-1} \cos(k\theta) + \\ &+ u_2 \sum_{k=1}^n c_k \cos(k\theta) + u_3 \sum_{k=1}^n c_{k-1} \cos(k\theta). \end{aligned} \quad (33)$$

Обозначив

$$\xi_c = \sum_{k=1}^{n-1} f_k \cos(k\theta), \quad \eta_c = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cos(k\theta), \quad \xi_s = \sum_{k=1}^{n-1} f_k \sin(k\theta), \quad \eta_s = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \sin(k\theta)$$

и заменяя k на $k+1$, находим

$$\sum_{k=1}^n f_{k-1} \cos(k\theta) = f_0 \cos\theta + \xi_c \cos\theta - \xi_s \sin\theta, \quad \sum_{k=1}^n c_{k-1} \cos(k\theta) = c_0 \cos\theta + \eta_c \cos\theta - \eta_s \sin\theta.$$

Поэтому выражение (33) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{ck} \cos(k\theta) &= u_1 f_0 \cos\theta + u_0 f_n \cos(n\theta) + u_3 c_0 \cos\theta + u_2 c_n \cos(n\theta) + \\ &+ (u_0 + u_1 \cos\theta) \xi_c - u_1 \xi_s \sin\theta + (u_2 + u_3 \cos\theta) \eta_c - u_3 \eta_s \sin\theta. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогичным способом найдем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{sk} \sin(k\theta) &= w_1 f_0 \sin\theta + w_0 f_n \sin(n\theta) + w_3 c_0 \sin\theta + w_2 c_n \sin(n\theta) + \\ &+ w_1 \xi_c \sin\theta + (w_0 + w_1 \cos\theta) \xi_s + (w_2 + w_3 \cos\theta) \eta_s + w_3 \eta_c \sin\theta, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{ck} \sin(k\theta) &= u_1 f_0 \sin\theta + u_0 f_n \sin(n\theta) + (u_0 + u_1 \cos\theta) \xi_s + u_1 \xi_c \sin\theta + \\ &+ u_3 c_0 \sin\theta + u_2 c_n \sin(n\theta) + (u_2 + u_3 \cos\theta) \eta_s + u_3 \eta_c \sin\theta \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{sk} \cos(k\theta) &= u_1 f_0 \cos\theta + u_0 f_n \cos(n\theta) + (u_0 + u_1 \cos\theta) \xi_s + u_1 \xi_c \cos\theta + \\ &+ u_3 c_0 \cos\theta + u_2 c_n \cos(n\theta) + (u_2 + u_3 \cos\theta) \eta_s + u_3 \eta_c \cos\theta. \end{aligned}$$

Подставляя (34) и (35) в первое выражение (32) и выполняя элементарные, но достаточно громоздкие преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{f_c^*(\omega)}{h} &= (u_1 \cos\theta + w_1 \sin\theta) f_0 + [u_0 \cos(n\theta) + w_0 \sin(n\theta)] f_n + \\ &+ (u_3 \cos\theta + w_3 \sin\theta) c_0 + [u_2 \cos(n\theta) + w_2 \sin(n\theta)] c_n + \\ &+ (u_0 + u_1 \cos\theta + w_1 \sin\theta) \xi_c + (w_0 + w_1 \cos\theta - u_1 \sin\theta) \xi_s + \\ &+ (u_2 + u_3 \cos\theta + w_3 \sin\theta) \eta_c + (w_2 + w_3 \cos\theta - u_3 \sin\theta) \eta_s. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким же способом преобразуем второе выражение (32)

$$\begin{aligned} \frac{f_s^*(\omega)}{h} = & (u_1 \sin \theta - w_1 \cos \theta) f_0 + [u_0 \sin(n\theta) - w_0 \cos(n\theta)] f_n + \\ & + (u_3 \sin \theta - w_3 \cos \theta) c_0 + [u_2 \sin(n\theta) - w_2 \cos(n\theta)] c_n - \\ & - (w_0 + w_1 \cos \theta) \xi_c + (u_0 + u_1 \cos \theta + w_1 \sin \theta) \xi_s + \\ & + (u_3 \sin \theta - w_2 - w_3 \cos \theta) \eta_c + (u_2 + u_3 \cos \theta + w_3 \sin \theta) \eta_s. \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая значения (31), (12) и (13), окончательно запишем формулы (36) и (37) соответственно в виде

$$\begin{aligned} \frac{f_c^*(\omega)}{h} = & A_1 [f_0 + f_n \cos(n\theta) + 2\xi_c] + B_1 f_n \sin(n\theta) + \\ & + A_2 [c_0 + c_n \cos(n\theta) + 2\eta_c] + B_2 c_n \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (38)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{f_s^*(\omega)}{h} = & B_1 [f_0 - f_n \cos(n\theta)] + B_2 [c_0 - c_n \cos(n\theta)] + \\ & + A_1 [f_n \sin(n\theta) + 2\xi_s] + A_2 [c_n \sin(n\theta) + 2\eta_s], \end{aligned} \quad (39)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}, \quad A_2 = \frac{\theta^2 (2 + \cos \theta) - 6(1 - \cos \theta)}{3\theta^4}, \\ B_1 = \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^2}, \quad B_2 = \frac{\theta^2 \sin \theta - 6(\theta - \sin \theta)}{3\theta^4}. \end{aligned}$$

Выражения (38) и (39) решают поставленную выше задачу численного нахождения величин интегралов (1).

Выше указывалось, что применение для расчетов формул (38), (39) возможно только при известных граничных условиях (25). Последние могут быть заданы видом ограничений сплайна в его крайних точках x_0 и x_n . Очевидно, эти ограничения должны быть такими, чтобы сплайн наилучшим образом соответствовал функции $f(x)$ в этих точках.

Теоретическая оценка точности подобного численного преобразования Фурье очень громоздка. Поэтому, как и обычно в подобных случаях, рассматриваемый алгоритм следует тестировать на эталонных примерах, а при выполнении конкретных расчетов – сравнивать их результаты для различных величин шага дискретизации аргумента h функции $f(x)$.

На основе приведенного алгоритма были разработаны компьютерные программы. Их тестирование на преобразовании Фурье гладких функций с известными спектрами показало высокую эффективность этого алгоритма как в точности преобразования, так и в быстродействии.

С помощью разработанных в данной статье подходов можно находить численные преобразования Фурье гладких функций с применением сплайнов иного строения, отличного от рассмотренного

Библиографический список

1. Крылов В.И. Справочная книга по численному гармоническому анализу / В.И. Крылов, Л.Г. Кругликова — Минск: Наука и техника, 1968. — 166 с.
2. Крылов В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В.И. Крылов, Н.С. Скобля — М: Наука 1974. — 223 с.
3. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) / В.М. Вержбицкий. — М.: Высш. шк., 2001. — 382 с.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. — М.: Наука 1982. — 272 с.
5. Мэтьюз Дж.Г. Численные методы. Использование MATLAB. Третье издание / Дж.Г. Мэтьюз, К.Д. Финк. — М.; СПб; К.: Изд-во «Вильямс», 2001. — 714 с.

Поступила в редакцию 14.06.2005 г.