

СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОСОСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

На основе анализа соответствующей квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений предлагается численно-аналитический алгоритм расчета собственных значений и форм колебаний прямоугольной упругой призмы в кососимметричном случае. Проводится сравнение с модами Ламе.

При рассмотрении динамических задач теории упругости значительный интерес представляет построение собственных частот и соответствующих им форм колебаний. Для ряда канонических тел, таких как полупространство, бесконечный слой, бесконечный цилиндр точные значения собственных частот определяются из трансцендентных дисперсионных уравнений, которые удается получить с помощью нормальных мод. Однако уже для простейших конечных тел, в частности для прямоугольной призмы, отражение упругих волн от границы представляет собой довольно сложный процесс, что приводит к трудностям при отыскании их нормальных колебаний и определении собственных частот.

Обзор исследований установившихся вынужденных колебаний в постановке плоской задачи теории упругости и эффективный метод решения динамических краевых задач для призмы прямоугольного поперечного сечения представлены в работе Гринченко В.Т., Мелешко В.В. [1]. Краевая задача приводится к оценкам ограниченных решений парной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, которые определяются численным методом улучшенной редукции. Анализ характеристик напряженно-деформированного состояния (НДС) на основе решения соответствующей краевой задачи дает возможность исследовать проблему собственных значений. Так при приближении частоты вынужденных колебаний к собственному значению возрастают все характеристики НДС, при переходе через собственное значение – меняется знак.

Ниже предлагается подход к отысканию собственных частот и форм колебаний призмы на основе анализа соответствующей однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

1. Постановка краевой задачи и соответствующая ей бесконечная система линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания прямоугольной призмы (рисунок 1) под действием антисимметричной по координатным осям нагрузки.

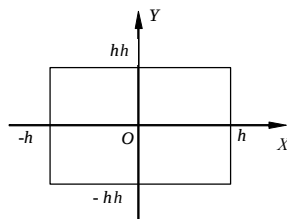


Рисунок 1 - Сечение призмы

В безразмерных координатах $x = X/h$; $y = Y/h$ получаем следующую краевую задачу для уравнений Ламе:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала, G – модуль сдвига.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_{xx} \Big|_{x=\pm 1} &= f(y) \cdot e^{-i\omega t}; & \frac{1}{2G} \tau_{xy} \Big|_{x=\pm 1} &= 0 \\ \frac{1}{2G} \sigma_{yy} \Big|_{y=\pm \eta} &= g(x) \cdot e^{-i\omega t}; & \frac{1}{2G} \tau_{xy} \Big|_{y=\pm \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Следуя [1], общее решение $\mathbf{u} = \{u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}\} e^{-i\omega t}$ уравнений Ламе (1) для прямоугольной области представляется в виде суммы общих решений для полос $x \in [-1; 1]$ и $y \in [-\eta; \eta]$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \text{ch } q_{1n} x + B_n \text{ch } q_{2n} x) \sin \beta_n y + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \frac{\delta_n}{p_{1n}} \text{sh } p_{1n} y + D_n \frac{p_{2n}}{\alpha_n} \text{sh } p_{2n} y) \cos \alpha_n x, \\ v(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \frac{\beta_n}{q_{1n}} \text{sh } q_{1n} x + B_n \frac{q_{2n}}{\beta_n} \text{sh } q_{2n} x) \cos \beta_n y + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \text{ch } p_{1n} y + D_n \text{ch } p_{2n} y) \sin \alpha_n x, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha_n = \frac{2n-1}{2}\pi$, $\beta_n = \frac{2n-1}{2\eta}\pi$, $q_{l,n}^2 = \beta_n^2 - \Omega_l^2$, $p_{l,n}^2 = \alpha_n^2 - \Omega_l^2$ ($l=1,2$), $\Omega_1 = \frac{\omega h}{c_1}$, $\Omega_2 = \frac{\omega h}{c_2}$, $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$ – скорость продольной волны, $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость сдвиговой волны.

Форма общего решения такова, что условия на касательные напряжения удастся выполнить точно, граничные условия на нормальные напряжения приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов из общих решений. Опуская промежуточные вычисления, запишем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & a_{mn} \\ b_{mn} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_m / \Delta_m^1 \\ -g_m / \Delta_m^2 \end{pmatrix} \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$\text{где } x_m = (-1)^m \text{ch } p_{2m} \eta B_m; y_m = \frac{(-1)^m \text{ch } p_{2m} \eta}{\eta} D_m; a_{mn} = \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_m^1} \frac{1}{(\alpha_n^2 + q_{1m}^2)} \left(\frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + q_{2m}^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\alpha_n^2} \right);$$

$$b_{mn} = \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_m^2} \frac{1}{(\beta_n^2 + p_{1m}^2)} \left(\frac{2\alpha_m^2}{\beta_n^2 + p_{2m}^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\beta_n^2} \right); \Delta_m^1 = q_{2m} \text{th } q_{2m} - \frac{(\beta_m^2 + q_{2m}^2)^2}{4\beta_m^2 q_{1m}} \text{th } q_{1m};$$

$$\Delta_m^2 = \eta \left(p_{2m} \text{th } p_{2m} \eta - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} \text{th } p_{1m} \eta \right); f(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m f_m \sin \beta_m y; g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m g_m \sin \alpha_m x.$$

Вводя обозначения для неизвестных

$$z_{2m-1} = x_m; z_{2m} = y_m,$$

и для коэффициентов системы

$$c_{2m-1, 2n-1} = 0; c_{2m-1, 2n} = a_{mn}; c_{2m, 2n-1} = b_{mn};$$

$$c_{2m, 2n} = 0; Q_{2m-1} = f_m / \Delta_m^1; Q_{2m} = -g_m / \Delta_m^2,$$

можно записать бесконечную систему в каноническом виде [2]:

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} z_n + Q_m \quad (m=1, 2, \dots). \quad (4)$$

2. Исследование бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Прежде всего, оценим регулярность системы (4). Для этого с помощью известных значений рядов из [3] просуммируем

$$\begin{aligned} S_{2m-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} |c_{2m-1, n}| = \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu) |\Delta_m^1|} \times \\ &\times \left(\sum_{n=1}^{N_m^1} \left(\frac{1}{\alpha_n^2 + q_{1m}^2} \left(\frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + q_{2m}^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\alpha_n^2} \right) - \frac{\text{sign}(\beta_m - \sqrt{\nu/2}\Omega_2)}{\alpha_n^2 + q_{1m}^2} \left(\frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + q_{2m}^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\alpha_n^2} \right) \right) + \right. \\ &+ \left. \text{sign}(\beta_m - \sqrt{\nu/2}\Omega_2) \left(\frac{\beta_m^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \left(\frac{\text{th } q_{1m}}{q_{1m}} - \frac{\text{th } q_{2m}}{q_{2m}} \right) + \frac{\nu\Omega_2^2}{2q_{1m}^2} \left(\frac{\text{th } q_{1m}}{q_{1m}} - 1 \right) \right) \right); \\ S_{2m} &= \sum_{n=1}^{\infty} |c_{2m, n}| = \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu) |\Delta_m^2|} \times \\ &\times \left(\sum_{n=1}^{N_m^2} \left(\frac{1}{\beta_n^2 + p_{1m}^2} \left(\frac{2\alpha_m^2}{\beta_n^2 + p_{2m}^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\beta_n^2} \right) - \frac{\text{sign}(\alpha_m - \sqrt{\nu/2}\Omega_2)}{\beta_n^2 + p_{1m}^2} \left(\frac{2\alpha_m^2}{\beta_n^2 + p_{2m}^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\beta_n^2} \right) \right) + \right. \\ &+ \left. \text{sign}(\alpha_m - \sqrt{\nu/2}\Omega_2) \left(\frac{\alpha_m^2 \eta}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \left(\frac{\text{th } p_{1m} \eta}{p_{1m}} - \frac{\text{th } p_{2m} \eta}{p_{2m}} \right) + \frac{\nu\Omega_2^2 \eta}{2p_{1m}^2} \left(\frac{\text{th } p_{1m} \eta}{p_{1m}} - \eta \right) \right) \right); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } N_m^1 = \max \left\{ \left\lceil \frac{1}{\pi} \sqrt{\max(0; \Omega_2^2 - (\pi/2\eta)^2)} + 1/2 \right\rceil + 1; \left\lceil \frac{\Omega_2}{\pi} \sqrt{\max(0; \frac{\nu q_{2m}^2}{2\beta_m^2 - \nu\Omega_2^2})} + 1/2 \right\rceil + 1 \right\};$$

$$N_m^2 = \max \left\{ \left\lceil \frac{\eta}{\pi} \sqrt{\max(0; \Omega_2^2 - (\pi/2)^2)} + 1/2 \right\rceil + 1; \left\lceil \frac{\Omega_2 \eta}{\pi} \sqrt{\max(0; \frac{\nu p_{2m}^2}{2\alpha_m^2 - \nu\Omega_2^2})} + 1/2 \right\rceil + 1 \right\};$$

$[x]$ – целая часть действительного x .

Учитывая асимптотическое равенства при $m \rightarrow \infty$:

$$q_{j,m} \approx \beta_m - \frac{\Omega_j^2}{2\beta_m}; p_{j,m} \approx \alpha_m - \frac{\Omega_j^2}{2\alpha_m}; \Delta_m^1 \approx \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\beta_m}; \Delta_m^2 \approx \frac{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}{2\alpha_m} \eta,$$

из (5) можно показать, аналогично симметричному случаю [1], что для любых значений нормированной частоты $\Omega = \frac{2\omega}{\pi c_2}$ и отношения сторон призмы η найдется номер $N^* = N^*(\Omega, \eta)$, начиная с которого выполняется оценка

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |c_{mn}| \leq 1 \quad (m > N^*).$$

Таким образом, система (4), согласно определению [2], является квазирегулярной

При этом ограниченные решения квазирегулярной системы (4) соответствуют колебаниям призмы с частотами, отличными от собственных частот призмы. Собственные частоты призмы вычисляются как предельные значения вынужденной частоты, при которых численное решение динамической краевой задачи (2) имеет тенденцию к неограниченному увеличению амплитуды колебаний. Известный достаточный признак существования ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [2] носит качественный характер и предполагает численные оценки решений конечного множества регулярных бесконечных систем.

Действительно, заменой вида $z_k = Z_k^0 + \sum_{j=1}^{N^*} Z_k^{(j)} z_j$ ($k > N^*$, где N^* - номер, начиная с которого для (4) выполняются условия регулярности) система (4) сводится к совокупности регулярных бесконечных систем относительно $\{Z_k^{(j)}\}_{k=N^*+1}^{\infty}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N^*$) с одинаковой матрицей:

$$\begin{cases} Z_k^{(0)} = \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} Z_k^{(0)} + b_k, \\ Z_k^{(j)} = \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} Z_k^{(j)} + c_{k,j}, \end{cases} \quad (k > N^*, \quad j = 1, 2, \dots, N^*) \quad (6)$$

Причем при соответствующих условиях на $\{Q_k\}$ каждая из регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (6) имеет ограниченное (главное) решение, и вопрос о существовании ограниченного решения для квазирегулярной системы (4) эквивалентен вопросу существования решения конечной системы относительно первых $\{z_k\}_{k=1}^{N^*}$, которую можно получить, подставив (6) в (4) при $k = 1, 2, \dots, N^*$:

$$z_k = \sum_{i=1}^{N^*} [c_{k,i} + \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} Z_n^{(i)}] z_i + \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} Z_n^{(0)} + b_k. \quad (7)$$

Таким образом, для бесконечной системы (4) равенство нулю определителя конечной системы (7) дает дисперсионное уравнение для определения собственных частот:

$$\det \left\| \delta_{k,j} - c_{k,j} - \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} Z_n^{(j)} \right\| = 0. \quad (8)$$

При использовании данного подхода точность локализации собственной частоты оказывается напрямую связанной с точностью решения бесконечных систем (6). Основываясь на теореме Б.М. Кояловича [4] (закон асимптотических выражений), для систем (6) можно показать

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Z_m^{(j)} = a_0^{(j)}, \quad (9)$$

что дает возможность редуцировать бесконечные системы к конечным системам на основе метода улучшенной редукции. Доказательство данного результата аналогично симметричному случаю [5].

3. Определение собственных частот. Использование дисперсионного уравнения (8) для построения спектра призмы имеет тот недостаток, что системы (6) решаются численно и как следствие отсутствует строгий критерий точности определения собственной частоты.

В ходе численного анализа квазирегулярных систем типа (4) было замечено, что явное исключение нескольких неизвестных из бесконечной системы приводит к «улучшению» регулярности, как правило, условия регулярности начинают выполняться с более раннего номера N^* . Как обобщение данного факта предлагается следующая теорема [6], на основе которой строятся собственные значения призмы.

Теорема. Квазирегулярная бесконечная система,

$$x_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} x_n + b_m, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

коэффициенты и свободные члены которой при заданном значении N удовлетворяют условиям:

- a) $\det[\delta_{k,n} - c_{k,n}]_{k,n=1}^N \neq 0$;
- b) $\max_{j=1..N} \sum_{i=1}^N |d_{ji}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_{in}| < 1 + f_N$;
- c) $|b_k| \leq B_N \sum_{n=1}^N |c_{kn}| \quad (k \geq N+1)$,

имеет ограниченное решение

$$|x_k| \leq \frac{B_N + m_N}{I_N} (1 + f_N) + m_N \quad (k = 1, 2, \dots, N); \quad |x_k| \leq \frac{B_N + m_N}{I_N} \quad (k > N).$$

Здесь

$$f_N = \inf_{k > N} \frac{\rho_k}{\sum_{n=1}^N |c_{kn}|}; \quad \rho_k = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}|; \quad m_N = \max_{k=1..N} \sum_{n=1}^N |d_{kn} b_n|;$$

$$I_N = 1 + f_N - \max_{j=1..N} \sum_{i=1}^N |d_{ji}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_{in}|.$$

Применяя сформулированные достаточные условия существования ограниченного решения для бесконечной системы (4) при фиксированном η , можно выделить диапазон изменения частоты Ω , на котором данные условия (а, б) не выполняются. Расчеты показывают, что если условия теоремы на некотором интервале изменения Ω не выполняются, то можно увеличением значения N в оценках (а, б) добиться того, чтобы уменьшить величину интервала до требуемого размера. Таким образом, собственное значение может быть локализовано с заданной точностью. Так как предложенная теорема дает только достаточные условия существования ограниченного решения, то требуется проверить наличие резонанса на локализованной частоте путем проверки характеристик НДС или вычислением определителя (8), который на собственной частоте обращается в нуль.

Задача об отыскании спектра и собственных форм колебаний в случае антисимметричного НДС имеет точное решение при некоторых значениях параметра η - моды Ламе. Так при $\eta_L = \frac{n}{m} (n, m \in \mathbb{N})$,

собственные значения, отвечающие модам Ламе имеют вид $\Omega_L^m = 2\sqrt{2}m$. При значении $\nu = 0,17$ (плавленый кварц) и $\eta = 1$ значение четвертой собственной частоты совпадает с частотой моды Ламе и равно $\Omega_L^4 = 2\sqrt{2} = 2,828427\dots$. В таблице 1 показано как увеличением параметра N удастся локализовать данную частоту.

Таблица 1 - Локализация четвертой собственной частоты при $\nu = 0,17$ и $\eta = 1$

N	1	5	10	25	50	100
Интервал для Ω^4	2,825– 2,839	2,827 – 2,833	2,8275– 2,8310	2,8282– 2,8291	2,8283– 2,8287	2,82840– 2,82849

Данный подход был использован для построения зависимости четырех первых собственных частот призмы от отношения ее сторон η при $\nu = 0,17$ (рисунок 2).

4. Построение собственных форм колебаний. Описанный выше подход к вычислению с заданной точностью собственных значений краевой задачи (1-2) позволяет построить алгоритм расчета собственных форм колебаний. Для этого требуется найти на собственной частоте колебаний Ω^* нетривиальное решение однородной граничной задачи, что эквивалентно отысканию на собственной частоте Ω^* нетривиального решения однородной квазирегулярной системы (4):

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} z_n \quad (m = 1, 2, \dots)$$

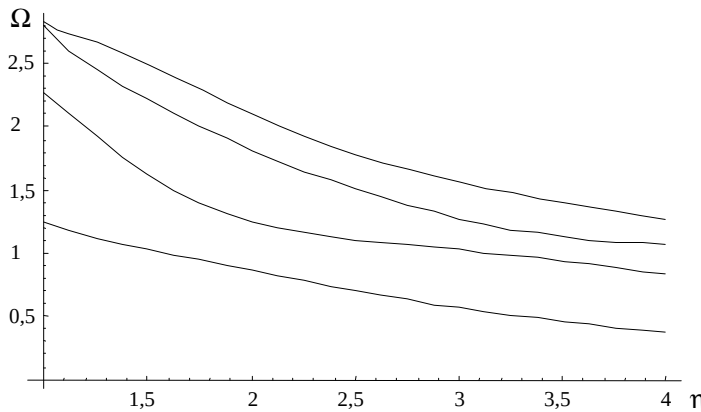


Рисунок 2 - Зависимость собственных частот призмы от отношения ее сторон η ($\nu = 0,17$)

При этом регулярные бесконечные системы

$$Z_k^{(j)} = \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} Z_n^{(j)} + c_{k,j} \quad (k > N^*, j = 1, 2, \dots, N^*) \quad (11)$$

одинаково эффективно решаются методом улучшенной редукции на всем диапазоне частот, включая собственные частоты. Таким образом, построение нетривиального решения бесконечной системы (4) сводится к построению нетривиального решения конечной системы

$$z_k = \sum_{j=1}^{N^*} [c_{k,j} + \sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_{k,n} Z_n^{(j)}] z_j \quad (k = 1, 2, \dots, N^*).$$

Согласно замене $z_k = \sum_{j=1}^{N^*} Z_k^{(j)} z_j \quad (k > N^*)$ и асимптотическому закону (9) следует, что для

нетривиального решения квазирегулярной однородной системы (10) справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N^*} Z_m^{(j)} z_j = \sum_{j=1}^{N^*} a_0^{(j)} z_j = A_0. \quad (12)$$

Подставляя в общее решение уравнений Ламе (3) найденные значения неопределенных коэффициентов

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{(-1)^m z_{2m-1}}{\operatorname{ch} q_{2m}}; & D_m &= \frac{\eta(-1)^m z_{2m}}{\operatorname{ch} p_{2m} \eta}; \\ A_m &= -B_m \frac{\beta_m^2 + q_{2m}^2}{2\beta_m^2} \frac{\operatorname{ch} q_{2m}}{\operatorname{ch} q_{1m}}; & C_m &= -D_m \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2\alpha_m^2} \frac{\operatorname{ch} p_{2m} \eta}{\operatorname{ch} p_{1m} \eta}, \end{aligned} \quad (13)$$

получаем аналитическое представление для собственной формы призмы. Отметим, что ряды (3) с коэффициентами (13), представляющие собственные формы, на границе призмы являются слабо сходящимися рядами Фурье. На основе асимптотического закона (12) можно аналитически улучшить их сходимость, полагая при $m > N$, что $z_m \approx A_0$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n^2} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{ch} q_{2n} x} - \frac{\operatorname{ch} q_{2n} x}{\operatorname{ch} q_{1n} x} \right) (-1)^{n+1} z_{2n-1} \sin \beta_n y + \\ &+ \eta \sum_{n=1}^N \left(\frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n p_{1n}} \frac{\operatorname{sh} p_{1n} y}{\operatorname{ch} p_{1n} \eta} - \frac{p_{2n}}{\alpha_n} \frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\operatorname{ch} p_{2n} \eta} \right) (-1)^n z_{2n} \cos \alpha_n x - \\ &- \frac{\Omega_2^2}{2} A_0 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n e^{-\beta_n(1-x)}}{\beta_n^2} \sin \beta_n y - \frac{\Omega_1^2 \eta}{2} A_0 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n e^{-\alpha_n(\eta-y)}}{\alpha_n^2} \cos \alpha_n x - \\ &- \frac{\Omega_2^2 \eta^2 A_0}{\pi^2} \int_0^{\pi y/2\eta} \operatorname{arctg} \frac{\cos t}{\operatorname{sh} \frac{\pi(1-x)}{2\eta}} dt - \frac{\Omega_1^2 \eta A_0}{2\pi^2} \int_{\pi x/2}^{\pi/2} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(\eta-y)}{2} + \sin t}{\operatorname{ch} \frac{\pi(\eta-y)}{2} - \sin t} dt; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \eta \sum_{n=1}^N \left(\frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n^2} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{ch} p_{1n} \eta} - \frac{\operatorname{ch} p_{2n} y}{\operatorname{ch} p_{2n} \eta} \right) (-1)^{n+1} z_{2n} \sin \alpha_n x + \\ &+ \sum_{n=1}^N \left(\frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n q_{1n}} \frac{\operatorname{sh} q_{1n} x}{\operatorname{ch} q_{1n}} - \frac{q_{2n}}{\beta_n} \frac{\operatorname{sh} q_{2n} x}{\operatorname{ch} q_{2n}} \right) (-1)^{n+1} z_{2n-1} \cos \beta_n y + \\ &+ \frac{\Omega_1^2}{2} A_0 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n e^{-\beta_n(1-x)}}{\beta_n^2} \cos \beta_n y + \frac{\Omega_2^2 \eta}{2} A_0 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n e^{-\alpha_n(\eta-y)}}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x + \\ &+ \frac{\Omega_2^2 \eta^2 A_0}{\pi^2} \int_0^{\pi x/2} \operatorname{arctg} \frac{\cos t}{\operatorname{sh} \frac{\pi(\eta-y)}{2}} dt + \frac{\Omega_1^2 \eta^2 A_0}{2\pi^2} \int_{\pi y/2\eta}^{\pi/2} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(1-x)}{2\eta} + \sin t}{\operatorname{ch} \frac{\pi(1-x)}{2\eta} - \sin t} dt; \end{aligned}$$

Формулы (14) позволяют провести сравнение с частным решением данной задачи – модами Ламе. При $\eta = 1$ четвертая собственная частота $\Omega^* = 2\sqrt{2}$ соответствует моде Ламе, которая имеет вид

$$u_L(x, y) = C \cos \pi x \sin \pi y; \quad v_L(x, y) = -C \sin \pi x \cos \pi y, \quad (15)$$

где C – произвольная постоянная.

Предложенный подход к решению системы (10) позволяет определить ее нетривиальное решение. При использовании метода улучшенной редукции для регулярных систем (11) в расчетах удерживалось $N = 400$

первых неизвестных. В силу симметрии задачи $z_{2m-1} = z_{2m}$, поэтому в таблице 2 приведены значения z_{2m-1} .

Таблица 2 – Нетривиальное решение (11) при $\nu = 0,17$; $\eta = 1$; $\Omega^* = 2\sqrt{2}$

m	1	2	3	4	5	10	50	100	∞
z_{2m-1}	1	-5,4	-3,57143	-3,26667	-3,15584	-3,03361	-3,00123	-3,00031	-3,00009

В таблице 3 представлены значения мод Ламе (15) и построенных собственных форм (14) на границе области после соответствующей нормировки мод Ламе ($C = 4,712389$):

Таблица 3 – Сравнение мод Ламе с построенными собственными формами колебаний

y	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$u_L(1,y)$	0	-2,76987	-4,48175	-4,48175	-2,76987	0
$u(1,y)$	0	-2,76987	-4,48175	-4,48175	-2,76987	$7,48 \cdot 10^{-7}$
$v_L(1,y)$	0	0	0	0	0	0
$v(1,y)$	$-1,33 \cdot 10^{-7}$	$-8,4 \cdot 10^{-8}$	$-2,6 \cdot 10^{-8}$	$9,5 \cdot 10^{-8}$	$1,53 \cdot 10^{-7}$	$7,48 \cdot 10^{-7}$

Данные таблицы 3 показывают, что предложенный в работе подход позволяет построить собственные формы с достаточно высокой точностью.

5. Выводы. Таким образом, исследование и решение квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, соответствующей однородной краевой задаче для уравнений Ламе, позволяет построить спектр собственных частот и соответствующие собственные моды. Проверка выполнения однородных граничных условий и сравнение с модами Ламе позволяют сделать вывод о том, что увеличение числа уравнений и неизвестных, вовлекаемых в оценки метода улучшенной редукции, позволяет добиться требуемой точности построения собственных форм колебаний

Библиографический список

1. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко В.В.Мелешко. — Киев: Наук думка, 1981. — 284 с.
2. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И.Крылов. — М.-Л.: Гостехиздат, 1952. — 4-е изд. — 695 с.
3. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М.: Наука Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1981. — 800 с.
4. Коялович Б.М. Исследования о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений / Б.М. Коялович // Изв. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова — 1930. — № 3. — С. 41–167.
5. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко — К.: Наук думка, 1978. — 264 с.
6. Папков С.О. К исследованию установившихся вынужденных колебаний прямоугольной призмы / С.О. Папков, В.Н. Чехов // Консонанс-2003: Акустический симпозиум, Киев, сент. 2003 г. — К., 2003. — С. 184–189.

Поступила в редакцию 18.04.2005 г.