

Рассмотрен метод ортогонализации функций, основанный на определении веса ортогональности. Доказан ряд теорем о системах ортогональных с весом функций.

Введение

Задачи, с которыми приходится иметь дело при обработке сигналов, часто связаны с представлением функций, описывающих поведение систем в координатном пространстве. В качестве координатных пространств обычно используют пространства ортогональных функций.

В настоящее время известно большое количество систем функций, ортогональных на фиксированных интервалах изменения аргумента [1]. Применение таких функций на других временных интервалах связано с масштабированием аргумента, а следовательно и с изменением ширины их спектра. Смещение базисных функций друг относительно друга приводит к потере ортогональности, что значительно затрудняет практическую реализацию систем обработки сигналов. Для того, чтобы обойти трудности, проистекающие из самой природы ортогональных функций, предлагается за основу взять ансамбль линейно независимых функций, изначально не являющихся ортогональными. Известен алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта, позволяющий из системы линейно независимых функций получить ансамбль ортогональных функций [2]. Однако, процедура ортогонализации Грама-Шмидта не позволяет в полной мере использовать преимущества многих линейно независимых функций. При реализации алгоритма искажается первоначальная форма ортогонализуемых функций.

В настоящей работе предлагается метод ортогонализации, основанный на определении веса ортогональности функций на заданном интервале. Правомерность полученных результатов подтверждается путем их применения к ряду практических примеров.

1. Случай конечномерного базиса

Для системы функций $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$ введем в рассмотрение вес $h(t)$ такой, что

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j(t) h(t) dt = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (1)$$

где (t_1, t_2) – интервал выполнения условий (1).

Можно говорить о том, что функции $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$ являются ортогональными с данным весом. Неотрицательность веса требовать не будем так, как условие неотрицательности нормы полученного функционального пространства следует непосредственно из формулы (1).

Предложение 1. Пусть задан набор функций $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$ и функции $l_1(t), l_2(t), \dots, l_k(t)$, тогда, где $k = \frac{N(N+1)}{2}$ и система уравнений

$$\begin{cases} b_1 \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) l_1(t) dt + b_2 \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) l_2(t) dt + \dots + b_k \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) l_k(t) dt = 1, \\ \text{всего } k = \frac{N(N+1)}{2} \\ \text{уравнений} \quad \left\{ \begin{aligned} & b_1 \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) l_1(t) dt + b_2 \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) l_2(t) dt + \dots + b_k \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) l_k(t) dt = 0, \\ & \vdots \\ & b_1 \int_{t_1}^{t_2} f_N^2(t) l_1(t) dt + b_2 \int_{t_1}^{t_2} f_N^2(t) l_2(t) dt + \dots + b_k \int_{t_1}^{t_2} f_N^2(t) l_k(t) dt = 1. \end{aligned} \right. \quad (2) \end{cases}$$

имеет единственное решение относительно b_k , то функция

$$h(t) = \sum_{i=1}^k b_i l_i(t), \quad (3)$$

является весом ортогональности функций $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$ [3].

Функции $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$, для которых существует вес $h(t)$, полученный с помощью системы уравнений (2), назовем линейно независимыми.

Алгоритм ортогонализации, вытекающий из предложения 1, неудобен тем, что для определения веса ортогональности N функций $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$ необходимо $k = \frac{N(N+1)}{2}$ функций $l_1(t), l_2(t), \dots, l_k(t)$, составляющих этот вес. Кроме того, численный эксперимент показывает, что в зависимости от того, какие составляющие веса $l_k(t)$ выбраны, можно получить различные значения величины

$$I(h) = \int_{t_1}^{t_2} h^2(t) dt, \quad (4)$$

называемой энергией веса.

Представляет интерес определить вес, энергия которого минимальна.

Рассмотрим систему линейно независимых функций, состоящую из 2-х элементов. Запишем уравнения ортогональности функций

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) h(t) dt = 1 \\ \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) h(t) dt = 0 \\ \vdots \\ \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) h(t) dt = 1 \end{array} \right. \quad (5)$$

Минимум функционала (4) при условиях (5) достигается, если

$$h(t) = \lambda_1 f_1^2(t) + \lambda_2 f_1(t) f_2(t) + \lambda_3 f_2^2(t), \quad (6)$$

где λ_i – неизвестные множители Лагранжа [4].

Аналогичные (6) выражения для веса можно получить при любом количестве линейно независимых функций. Таким образом, верно следующее утверждение.

Предложение 2: вес, оптимальный по условию минимума энергии, представляет собой квадратичную форму от ортогонализируемых функций.

2. Случай бесконечномерного эквидистантного базиса

Практический интерес представляет ортогонализация линейно независимых функций, полученных путем смещения по оси ординат некоторой одной функции.

Рассмотрим ансамбль, состоящий из бесконечного числа функций вида $f_i(t) = f(t + \alpha \cdot i)$, то есть все функции ансамбля эквидистантны. Весовую функцию будем искать в виде квадратичной формы от базисных функций. Очевидно, что вес, представленный в виде (6), является периодической функцией и условие минимума его энергии на бесконечном интервале изменения аргумента некорректно. Весовую функцию можно записать как:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lambda_0 f_0^2(t) + \lambda_1 f_0(t) f_1(t) + \dots + \lambda_0 f_1^2(t) + \lambda_1 f_1(t) f_2(t) + \dots + \lambda_0 f_2^2(t) + \dots = \\ &= \lambda_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^2(t) + \lambda_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) f_{n+1}(t) + \lambda_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) f_{n+2}(t) + \dots + \lambda_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) f_{n+m}(t) + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

причем период изменения веса равен α .

Система уравнений для определения множителей Лагранжа в данном случае имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_1}^{t_2} f_0^2(t) h(t) dt = 1 \\ \int_{t_1}^{t_2} f_0(t) f_1(t) h(t) dt = 0 \\ \vdots \\ \int_{t_1}^{t_2} f_0(t) f_k(t) h(t) dt = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

Определим вес ортогональности некоторых важных систем линейно-независимых эквидистантных функций.

2.1. Случай функций отсчетов

Найдем оптимальный по энергии вес, для функций вида

$$f_n = \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \quad (9)$$

в данном случае t представляет собой нормированное время.

Вычислим сумму $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) f_{n+m}(t)$ при λ_m .

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) f_{n+m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(t-n) \cdot \sin \pi(t-(n+m))}{\pi(t-n) \cdot \pi(t-(n+m))} = \frac{(-1)^m (1 - \cos 2\pi t)}{m} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-n-m} \right)$$

Разница сумм, стоящая в скобках равна нулю при $m \neq n$. То есть все суммы, стоящие при λ_i в выражении (7) равны нулю для $i \neq 0$. Следовательно в данном случае

$$h(t) = \lambda_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^2(t) = \lambda_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi(t-n)}{\pi^2(t-n)^2} = \lambda_0 \frac{\sin^2 \pi t}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-n)^2}.$$

Поскольку $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-n)^2} = \pi^2 \operatorname{ctg}^2 \pi(t+1) + \pi^2$, то $h(t) = \lambda_0 \sin^2 \pi t (\operatorname{ctg}^2 \pi t + 1) = \lambda_0$. Подставляем ортогонализируемые функции и значение веса в верхнее уравнение системы (8) и имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(t) h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_0 \frac{\sin^2 \pi t}{\pi^2 t^2} dt = 1,$$

откуда $\lambda_0 = 1$, следовательно $h(t) = 1$.

Полученный результат для функций отсчетов (9) совпадает с теоремой отсчетов Котельникова

2.2. Бесконечномерный базис с координатными функциями вида $f_n = \frac{\sin^2 \pi(t-n)}{\pi^2(t-n)^2}$

Рассмотрим систему функций $f_n = \frac{\sin^2 \pi(t-n)}{\pi^2(t-n)^2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Найдем коэффициенты при λ_{km} , где k – номер уравнения в системе (8), m – номер слагаемого в k -м уравнении, для случая $k \neq 0, m \neq 0$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) f_{n+m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi(t-n) \cdot \sin^2 \pi(t-n-m)}{\pi^2(t-n)^2 \cdot \pi^2(t-n-m)^2} = \frac{\sin^4 \pi t}{\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-n)^2(t-n-m)^2}.$$

Поскольку $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-n)^2(t-n-m)^2} = \frac{2}{m^2} \pi^2 (\operatorname{ctg}^2 \pi t + 1)$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) f_{n+m}(t) = \frac{\sin^4 \pi t}{\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-n)^2(t-n-m)^2} = \frac{2}{m^2 \pi^2} \sin^2 \pi t;$$

для случая $k = 0, m = 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) f_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi(t-n) \cdot \sin^2 \pi(t-n)}{\pi^2(t-n)^2 \cdot \pi^2(t-n)^2} = \frac{\sin^4 \pi t}{\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-n)^4}.$$

Так как $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-n)^4} = \pi^4 \left(\frac{4}{3} \operatorname{ctg}^2 \pi t + \operatorname{ctg}^4 \pi t + \frac{1}{3} \right)$, то $\frac{\sin^4 \pi t}{\pi^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-n)^4} = 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \pi t$.

Учитывая, что $\lambda_{km} = \lambda_m$, запишем вес в виде

$$h(t) = \lambda_0 \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \pi t \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \frac{2}{m^2 \pi^2} \sin^2 \pi t = \lambda_0 + \sin^2 \pi t \left(\frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{m^2} - \frac{2}{3} \lambda_0 \right). \quad (10)$$

Поскольку выражение, стоящее в скобках в правой части равенства (10) представляет собой некоторое число, то вес имеет вид

$$h(t) = A + B \sin^2 \pi t.$$

Подставим это выражение в формулу (1) и имеем

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \pi(t-n)}{\pi^4(t-n)^4} (A + B \sin^2 \pi t) dt = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi(t-n)}{\pi^2(t-n)^2} \cdot \frac{\sin^2 \pi(t-n-m)}{\pi^2(t-n-m)^2} (A + B \sin^2 \pi t) dt = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Решение системы уравнений (11) относительно A и B дает вес

$$h(t) = 3 - 4 \sin^2 \pi t.$$

Теорема 1. Функции вида $f_n = \frac{\sin^2 \pi(t-n)}{\pi^2(t-n)^2}$ на бесконечном интервале ортогональны с весом

$$3 - 4 \sin^2 \pi t.$$

2.3. Бесконечномерный базис с координатными функциями вида $f_n = \frac{\sin^3 \pi(t-n)}{\pi^3(t-n)^2}$

Найдем вес ортогональности функций $f_n = \frac{\sin^3 \pi(t-n)}{\pi^3(t-n)^3}$.

Найдем коэффициенты при λ_{km} для случая $k \neq 0, m \neq 0$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) f_{n+m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 \pi(t-n) \cdot \sin^3 \pi(t-n-m)}{\pi^3(t-n)^3 \cdot \pi^3(t-n-m)^3} = -\frac{6(-1)^m \sin^4 \pi t}{m^4 \pi^4}.$$

Для случая $k = 0, m = 0$ имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t) f_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6 \pi(t-n)}{\pi^6(t-n)^6} = \frac{2}{15} \sin^4 \pi t + \cos^2 \pi t.$$

С учетом того, что $\lambda_{km} = \lambda_m$, весовую функцию можно записать как

$$\begin{aligned} h(t) &= \lambda_0 \left(\frac{2}{15} \sin^4 \pi t + \cos^2 \pi t \right) - \frac{6 \sin^4 \pi t}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda_m}{m^4} = \\ &= \lambda_0 \cos^2 \pi t + \sin^4 \pi t \left(\lambda_0 \frac{2}{15} - \frac{6}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda_m}{m^4} \right), \end{aligned}$$

следовательно вес можно представить в виде

$$h(t) = A \cos^2 \pi t + B \sin^4 \pi t. \quad (12)$$

Определив A и B из уравнений

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6 \pi t}{\pi^6 t^6} (A \cos^2 \pi t + B \sin^4 \pi t) dt = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 \pi t}{\pi^3 t^3} \cdot \frac{\sin^3 \pi(t-n)}{\pi^3(t-n)^3} (A \cos^2 \pi t + B \sin^4 \pi t) dt = 0, \end{cases}$$

и подставив их значения в формулу (12), получим выражение для весовой функции

$$h(t) = \frac{280}{101} \cos^2 \pi t - \frac{64}{101} \sin^4 \pi t.$$

Теорема 2. Функции $f_n = \frac{\sin^3 \pi(t-n)}{\pi^3(t-n)^3}$ на бесконечном интервале изменения аргумента ортогональны с

весом $h(t) = \frac{280}{101} \cos^2 \pi t - \frac{64}{101} \sin^4 \pi t$.

Учитывая проведенные выше вычисления, можно найти вес ортогональности и в виде $A + B \sin^2 \pi t$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6 \pi t}{\pi^6 t^6} (A + B \sin^2 \pi t) dt = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 \pi t}{\pi^3 t^3} \cdot \frac{\sin^3 \pi(t-n)}{\pi^3(t-n)^3} (A + B \sin^2 \pi t) dt = 0, \end{cases}$$

получаем $A = \frac{20}{7}, B = -\frac{24}{7}$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Функции $f_n = \frac{\sin^3 \pi(t-n)}{\pi^3(t-n)^3}$ на бесконечном интервале изменения аргумента ортогональны с

весом равным $\frac{20}{7} - \frac{24}{7} \sin^2 \pi t$.

2.4. Бесконечномерный базис с координатными функциями вида $f_n = \frac{\sin^z \pi(t-n)}{\pi^z(t-n)^z}$, где $z = 1, 2, 3, \dots$

Выше с помощью разработанного метода ортогонализации были определены весовые функции, с которыми ортогональны на бесконечном интервале функции вида $f_n = \frac{\sin^z \pi(t-n)}{\pi^z(t-n)^z}$ для случаев $z = 1, 2, 3$.

Так, функции вида $f_n = \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$ ортогональны с весом равным 1; функции вида $f_n = \frac{\sin^2 \pi(t-n)}{\pi^2(t-n)^2}$ ортогональны с весом $3 - 4 \sin^2 \pi t$; функции вида $f_n = \frac{\sin^3 \pi(t-n)}{\pi^3(t-n)^3}$ ортогональны с весом $\frac{20}{7} - \frac{24}{7} \sin^2 \pi t$.

Разумно предположить, функции вида $f_n = \frac{\sin^z \pi(t-n)}{\pi^z(t-n)^z}$, где $z = 1, 2, 3, \dots$, ортогональны с весом, который может быть представлен в виде тригонометрического полинома по четным степеням $\sin \pi t$:

$$a_1 + a_2 \sin^2 \pi t + a_3 \sin^4 \pi t + a_4 \sin^6 \pi t + \dots,$$

причем максимальная степень полинома определяется числом z .

Найдем вес ортогональности на бесконечном интервале функций $f_n = \frac{\sin^4 \pi(t-n)}{\pi^4(t-n)^4}$. Вес будем искать в виде $a_1 + a_2 \sin^2 \pi t + a_3 \sin^4 \pi t + a_4 \sin^6 \pi t$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^8 \pi t}{\pi^8 t^8} (a_1 + a_2 \sin^2 \pi t + a_3 \sin^4 \pi t + a_4 \sin^6 \pi t) dt = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \pi t}{\pi^4 t^4} \cdot \frac{\sin^4 \pi(t-n)}{\pi^4(t-n)^4} (a_1 + a_2 \sin^2 \pi t + a_3 \sin^4 \pi t + a_4 \sin^6 \pi t) dt = 0. \end{cases} \quad (13)$$

После интегрирования левой части первое уравнение системы (13) принимает вид

$$\frac{151}{315} a_1 + \frac{35}{288} a_2 + \frac{31}{480} a_3 + \frac{167}{3840} a_4 = 1. \quad (14)$$

Левая часть второго уравнения преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \pi t}{\pi^4 t^4} \cdot \frac{\sin^4 \pi(t-n)}{\pi^4(t-n)^4} (a_1 + a_2 \sin^2 \pi t + a_3 \sin^4 \pi t + a_4 \sin^6 \pi t) dt = \\ &= \frac{20}{n^6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^8 \pi t}{\pi^8 t^2} (a_1 + a_2 \sin^2 \pi t + a_3 \sin^4 \pi t + a_4 \sin^6 \pi t) dt + \\ &+ \frac{2}{n^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^8 \pi t}{\pi^8 t^4} (a_1 + a_2 \sin^2 \pi t + a_3 \sin^4 \pi t + a_4 \sin^6 \pi t) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Потребуем, чтобы оба интеграла, стоящие в правой части равенства (15) были равны нулю и получим два уравнения

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^8 \pi t}{\pi^8 t^2} (a_1 + a_2 \sin^2 \pi t + a_3 \sin^4 \pi t + a_4 \sin^6 \pi t) dt = 0, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^8 \pi t}{\pi^8 t^4} (a_1 + a_2 \sin^2 \pi t + a_3 \sin^4 \pi t + a_4 \sin^6 \pi t) dt = 0, \end{aligned}$$

которые после интегрирования левых частей принимают вид

$$\frac{5}{16\pi^6} a_1 + \frac{35}{128\pi^6} a_2 + \frac{63}{256\pi^6} a_3 + \frac{231}{1024\pi^6} a_4 = 0 \quad (16)$$

и

$$\frac{1}{6\pi^4} a_1 + \frac{25}{192\pi^4} a_2 + \frac{7}{64\pi^4} a_3 + \frac{49}{512\pi^4} a_4 = 0. \quad (17)$$

Итак, мы получили три уравнения (14, 16, 17) для определения четырех неизвестных коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4 в выражении весовой функции. Как известно, такие системы имеют бесконечное количество решений. Очевидно, что минимальная степень весового полинома равна четырём. В этом случае вес имеет вид $\frac{21}{5} - \frac{336}{25} \sin^2 \pi t + \frac{48}{5} \sin^4 \pi t$.

Аналогично найдем, что вес ортогональности на бесконечном интервале функций $f_n = \frac{\sin^5 \pi(t-n)}{\pi^5(t-n)^5}$ равен $\frac{3024}{751} - \frac{8640}{751} \sin^2 \pi t + \frac{5760}{751} \sin^4 \pi t$.

Из всего изложенного выше можно сделать следующий вывод.

Предложение 2. Функции вида $f_n = \frac{\sin^z \pi(t-n)}{\pi^z (t-n)^z}$, где $z = 1, 2, 3, \dots$, ортогональны с весом, который может быть представлен в виде тригонометрического полинома по четным степеням $\sin \pi t$:

$$a_1 + a_2 \sin^2 \pi t + a_3 \sin^4 \pi t + a_4 \sin^6 \pi t + \dots,$$

причем минимальная степень полинома равна $z - \frac{1 + (-1)^{z-1}}{2}$.

Выводы

В настоящей работе в основном рассматривалась ортогонализация эквидистантных функций. Однако предложенный метод может быть использован для других классов функций.

Разработанный алгоритм получения базиса ортогональных функций может быть использован при решении задач дискретизации и восстановления сигналов, сжатия информационных сигналов, а также при разработке систем передачи информации.

Библиографический список

1. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
2. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного: Учебное пособие для университетов / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
3. Агаханянц Р.Е. Методы ортогонализации линейно независимых функций / Р.Е. Агаханянц, А.Н. Дегтярев // Прикладные задачи математики и механики. Матер. XII науч. конф. ученых Украины, России, Беларуси, 15-21 сентября, 2003 г. — Севастополь, 2003. — С. 40–45.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц — М.: Наука, 1969. — 424 с.

Поступила в редакцию 18.04.2005 г.