

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

УДК 510.022

В.Г. Зенцева, Т.М. Мазлумян, А.Ф. Хрусталеv

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ЭКСПЕРИМЕНТ – НЕОБХОДИМЫЙ КОМПОНЕНТ СОВРЕМЕННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Предлагается поддержка курса высшей математики физическими и вычислительными экспериментами, проводимыми на лекциях и практических занятиях.

Преподавание математики студентам инженерно-экономических специальностей не должно резко отличаться от преподавания других дисциплин. В курсе высшей математики при подготовке специалистов такого профиля в некоторых случаях допустимо и даже желательно отступление от строгого дедуктивного изложения материала. Достойное место в нем могут занять полезные приемы других наук, такие как неполная индукция, наводящие рассуждения, аналогия, словесная, а не формально-логическая аргументация и, конечно же, эксперимент, в особенности вычислительный. Разумеется, студенты должны быть осведомлены в каждом таком случае, что речь идет о методе, заимствованном у эмпирических наук, но полученный результат может быть доказан строго математически. Было бы грубой ошибкой выдавать, например, наводящие, интуитивные рассуждения за строгие доказательства. Главный принцип, положенный нами в основу преподавания курса «Высшая математика» в техническом университете состоит в разумном сочетании дедуктивных рассуждений с убедительными экспериментами в самом широком смысле [1].

Известно, что студентам, как правило, не легко дается введение в математический анализ: большое число мало наглядных понятий, тонкие рассуждения, требующие умения мыслить логически, без обращения к каким-либо материальным моделям – все это затрудняет усвоение.

Проведение аудиторных экспериментов, как-то «материализующих» эти понятия и рассуждения – существенный шаг на пути к успешному изучению материала. Так, например, весьма полезными и доступными по нашему мнению являются вычислительные эксперименты, иллюстрирующие предельный переход так как они способствуют более глубокому усвоению самого понятия «предел» и сущности процесса предельного перехода. Опыт показывает, что строгое доказательство равенства $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел) воспринимается студентами формально, поскольку сам процесс стремления $\frac{\sin x}{x}$ к 1 при $x \rightarrow 0$ не представлен наглядно. Вместе с тем, этой наглядности легко добиться, представив

результаты вычислений с помощью компьютера в виде таблицы

x	0,2	0,15	0,1	0,01	0,001
$\frac{\sin x}{x}$	0,9933	0,9962	0,9983	0,9999	1

На этом примере студенты убеждаются, что реальный вычислительный процесс хорошо моделируется абстрактным понятием «предельный переход».

При введении числа e с помощью вычислительного эксперимента можно проиллюстрировать возрастание последовательности $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и ее приближение к числу 2,718281... Для этого достаточно рассмотреть, например, значения n и a_n – опять-таки вычисленные с помощью компьютера

n	100	1000	10000	100000	1000000
a_n	2,707424	2,715564	2,718281	2,718281	2,718281

Это дает основание определить число e как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (второй замечательный предел).

Такого рода вычислительные эксперименты, не исключая, вообще говоря, строгие доказательства, активизируют познавательную деятельность студентов и способствуют более глубокому усвоению излагаемого материала. Легко видеть, что такой подход к раскрытию содержания математических понятий имеет определенное методологическое значение, устанавливая очевидную связь между абстрактными величинами и их реальными значениями.

В этой связи отметим, что при решении многих задач практики, включая и вычисление пределов, приходится оперировать числами, которые лишь приближенно выражают точные, но неизвестные нам значения реальных величин. Но даже и тогда, когда нам известны точные значения, например, $\sqrt{2}$, π , в

реальных вычислениях их округляют, то есть приближенные числа – это и сырье и продукция реальных вычислений.

Найдем приближенное значение числа π на основе физического эксперимента, исходя из того, что все окружности подобны, а потому $l/d = k$, где l – длина окружности, d – ее диаметр, k – величина постоянная. Для этого, например, в пяти опытах произведем измерения l и d , обработаем результаты и установим, что с тремя значащими цифрами $k = l/d = 3,14$. Итак, $l \approx 3,14 d$.

Аналогичный прием можно использовать при вычислении площадей плоских фигур. Для этого вычерчивают на ватмане или тонком картоне фигуру так, чтобы она находилась внутри некоторого прямоугольника. Обозначим искомую площадь через S_{ϕ} , площадь прямоугольника через S_{Π} , которая легко вычисляется на основании измерения длин его сторон. Затем вырежем этот прямоугольник и взвесим его на аналитических весах. Пусть его вес равен P_{Π} . Далее из этого прямоугольника аккуратно вырезаем вычерченную фигуру и также находим ее вес, который обозначим как P_{ϕ} . Поскольку площадь части листа однородного картона пропорциональна его весу, можно записать равенство $S_{\phi}/S_{\Pi} = P_{\phi}/P_{\Pi}$. Значит $S_{\phi} = S_{\Pi} \cdot P_{\phi}/P_{\Pi}$. Теперь, вычислив S_{ϕ} , находим приближенное значение площади фигуры с 2-3 значащими цифрами. Таким способом также может быть определено и приближенное значение числа π , а поскольку определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, то при помощи взвешивания могут быть приближенно найдены значения многих интегралов.

Известно, что при изучении какого-либо процесса математическими методами, прежде всего, строится его математическая модель. Изменяя в ней параметры, можно оценить влияние различных факторов на поведение процесса, т.е. получить такую же богатую информацию, как и при натурных испытаниях. По существу такая работа очень близка к эксперименту, только роль экспериментальной установки выполняет ЭВМ, а вместо физического процесса исследуется его математическая модель. Именно поэтому изучение физического процесса таким способом в рамках принятой модели называют вычислительным экспериментом.

Одно из его достоинств состоит в том, что он дешевле, проще и безопаснее натурального. В вычислительном эксперименте можно моделировать условия, которые еще невозможно создать в лаборатории. Конечно, вычислительный эксперимент тесно связан с физическим, поскольку математическая модель процесса строится на основе закономерностей, выявленных из опыта, математическая модель должна хорошо отражать определенные стороны физического процесса. Вычислительный и физический эксперименты дополняют друг друга и позволяют получать новые результаты.

Ярким примером удачного применения вычислительного эксперимента в физике было открытие Т-слоя (Теплового слоя).

Его суть состоит в том, что в плазме, взаимодействующей с магнитным слоем, при определенных условиях возникают слои высокой температуры.

Как отмечает академик А.А. Самарский [2, с. 281-291]: «Т-слой был открыт с помощью вычислительных экспериментов. С высокой точностью были описаны условия, при которых должен возникать неизвестный прежде эффект. Физические эксперименты, в которых он мог бы появиться, тогда еще не ставились в силу их сложности. Это породило борьбу мнений, вызвало недоверие со стороны некоторых ученых, занимающихся исследованиями плазмы, – уж очень необычная была ситуация: физический эффект открыт ... математиками.

Между тем, получив от математиков точное описание нового эффекта, физики взялись обнаружить его экспериментально. Три различных научных коллектива Москвы, Новосибирска и Сухуми независимо друг от друга на различных установках зарегистрировали Т-слой».

Непрерывный рост объема научной информации, которую должен усвоить студент за период обучения в вузе, привел к тому, что многие традиционные методы преподавания оказываются уже мало эффективными. Поэтому вполне понятны и необходимы усилия преподавателей высшей школы, направленные на поиски новых методов активизации мышления студентов, как при усвоении учебной информации, так и при ее приложении к решению конкретных практических задач. Среди таких методов особый смысл приобретает эксперимент, как методический прием в тех математических дисциплинах, понятия и методы которых имеют простую и наглядную интерпретацию в мире реальных вещей или генетически связаны с экспериментом натурным или модельным. К таким дисциплинам относятся, например, теория вероятностей и математическая статистика.

Одна из основных целей изучения этих дисциплин в техническом университете состоит в том, чтобы с самого начала приучить студентов к пониманию того, что в области случайных явлений можно делать предсказания, но такие, которые осуществляются не наверняка, но почти наверняка, с вероятностью весьма близкой к единице.

Ярким примером такого рода является практически достоверный прогноз того, что если в потоке примерно 70 студентов то среди них существуют хотя бы два человека, дни рождения которых совпадают.

Следуя Е.С. Вентцель, мы не только делаем это предсказание с помощью теоретического расчета, но и проводим его экспериментальную проверку. При этом лектор, обращаясь к студентам, говорит: «Я не ходил в студенческий отдел кадров и не знакомился с вашими личными делами. Да и вряд ли знакомство с ними помогло бы мне сделать такой прогноз: ведь число студентов присутствующих на лекции, есть случайная величина, так как некоторые из них по разным причинам отсутствуют».

Прогноз лектора сразу вызывает в аудитории оживление и даже недоверие, поскольку кажется, что его вероятность невелика, так как в году максимум 366 дней, а в аудитории около 70 человек. (Если бы в аудитории было бы более 366 студентов например, 367, то наверняка нашлись бы в ней два человека, даты рождения которых совпадают). Однако решение этой задачи показывает, что вероятность осуществления прогноза не менее 99,9%.

Чтобы подтвердить или не подтвердить этот расчет экспериментально лектор передает студентам табель-календарь и просит каждого из них отметить дату своего рождения вертикальной черточкой (лучше, конечно, звездочкой, если размеры календаря достаточны). Если дата оказалась уже отмеченной, то нужно сделать на ней еще одну отметку горизонтальной или наклонной черточкой.

Через некоторое время студенты заявляют, что на одной и той же дате появились две отметки. Прогноз лектора осуществился! На этом эксперимент можно было бы закончить. Однако аудитория всегда просит провести его до конца, чтобы каждый мог принять в нем участие. После того, как календарь обойдет всех присутствующих, объявляется результат.

Итак, предсказание осуществилось. Однако лектор подчеркивает, что оно могло и не осуществиться и еще раз объясняет природу вероятностных процессов, которые отличаются одной существенной особенностью: они осуществляются не наверняка, а почти наверняка, с вероятностью весьма близкой к 100%.

На практических занятиях также полезно проводить опыты, в том числе и характеризующие вероятностную (корреляционную) зависимость между случайными величинами.

Например, если X – рост наугад взятого человека, а Y – его вес, то между этими величинами существует вероятностная, не функциональная зависимость, состоящая в том, что в общем случае люди с большим ростом имеют и больший вес. Эту зависимость можно выразить эмпирической формулой

$$Y(\text{кг}) = X(\text{см}) - 100, \quad (1)$$

которая выражается линейной функцией, приближенно отражающей реальную ситуацию. Чтобы в этом убедиться достаточно из множества студентов группы сделать выборку, например, из десяти человек и предложить каждому записать на доске свой рост и вес и подставить эти значения в формулу (1). Указание такой зависимости и проведение соответствующего аудиторного эксперимента дает в понимании корреляционной связи гораздо больше, чем решение какой-то отвлеченной задачи.

Не менее полезно проведение на практических занятиях натуральных экспериментов вообще и в частности экспериментов с бросанием монет. Такие эксперименты позволяют убедиться в том, что теоретические результаты согласуются с практическими. Сравним вероятность выпадения герба и цифры при подбрасывании двух монет с её эмпирическим аналогом – относительной частотой, определяемой экспериментально. Теоретическая, идеализированная частота, то есть вероятность, в этом случае равна 0,5. Экспериментальное решение можно получить так: каждый студент из группы, например в 25 человек, пять раз подбрасывает две монеты и регистрирует сколько раз выпали герб и цифра. Всего, таким образом, будет проведено 125 опытов, примерно в половине которых выпадет герб и цифра, а потому относительная частота указанного события 0,5.

В этой связи заметим, что Даламбер, как пишут в некоторых книгах, считал: при подбрасывании двух монет три события – выпадение двух гербов, двух цифр, а также одного герба и одной цифры – равновероятные. Если бы это было так, то относительная частота выпадения герба и цифры равнялась бы $1/3$. Но как было отмечено выше, относительная частота выпадения герба и цифры, получаемая на основе опыта близка к 0,5. Таким образом, гипотеза Даламбера неверна. (Правда, трудно поверить, чтобы он мог её высказать).

Важное дидактическое значение при изложении теории вероятностей имеют мысленные эксперименты – дедуктивные рассуждения, проводимые без обращения к натурным испытаниям. С помощью таких экспериментов с успехом можно решать как задачи, так и обосновывать справедливость теорем.

Рассмотрим задачу: Один стрелок даёт 80% попаданий в мишень, другой (при тех же условиях стрельбы) – 70%. Найти вероятность (процент) попадания в мишень обоими стрелками, если они стреляют в неё одновременно (залпом).

Мысленно представим, что произведено N двойных выстрелов (залпов). В нашей идеализированной схеме (модели) предполагается, что при всех сериях залпов соответствующий стрелок даёт точно 80% и 70% попаданий. В действительности эти значения являются средними.

Итак, в принятой модели первый стрелок при N залпах попадает в мишень $0,8N$ раз, а второй, стреляющий независимо от первого, при $0,8N$ попаданиях первого, попадает $0,8N \cdot 0,7 = 0,56N$ раз. Следовательно, при N залпах будет $0,56N$ таких, в которых в мишень попадёт и первый и второй стрелок, т. е. вероятность (статистическая, когда $N \rightarrow \infty$) попадания обоими стрелками будет $0,56N/N = 0,56$ или 56%.

Рассмотренный выше мысленный эксперимент даёт возможность совсем просто сформулировать и обосновать справедливость теоремы: Если события A и B независимы в данном опыте, то вероятность их произведения (совместного наступления) равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Для этого достаточно заменить 0,8, т. е. 80% на $P(A)$, а 0,7 – на $P(B)$. А ещё лучше обосновать указанную теорему мысленным экспериментом над независимыми событиями A и B с вероятностями $P(A)$ и $P(B)$ в общем виде, не связывая их с рассмотренной конкретной задачей.

В заключение отметим, что если роль индуктивных рассуждений в практике преподавания математики в последние годы довольно активно исследуется главным образом под воздействием идей выдающегося математика и педагога Д. Пойя [3,4], то роль и методика эксперимента в преподавании математики в дидактическом аспекте практически не изучена. Здесь предстоит сделать еще много.

Библиографический список

1. Мазлумян Т.М. О проведении аудиторных экспериментов при изучении теории вероятностей / Т.М. Мазлумян, К.Д. Филиппова, А.Ф. Хрусталёв // Вестн. СевГТУ. Сер. Педагогика: Сб. науч. тр. — Севастополь, 2005. — Вып. 64. — С. 43–49.
2. Самарский А.А. Вычислительный эксперимент в физике / А.А. Самарский, Ю.П. Попов // Наука и человечество: Сб. науч. тр. — М., 1974. — С. 281–291.
3. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойя. — М.: Наука, 1975. — 464 с.
4. Пойя Д. Математическое открытие / Д. Пойя. — М.: Наука, 1970. — 452 с.

Поступила в редакцию 18.04.2005 г.