

ЗАДАЧА ВСЕУКРАИНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ И СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ВУЗОВ 2005г.

Приведены условия, ответы и возможные решения олимпиадных задач, которые предлагались на Всеукраинской олимпиаде по математике среди студентов вузов, экономических и сельскохозяйственных вузов в 2005 году.

Всеукраинские олимпиады по математике для студентов вузов проводятся с 1974-1975 учебного года. Начиная с 1986 г. они проводились в Киевском политехническом институте [1,2]. В 2005 году Всеукраинская студенческая олимпиада по математике впервые проходила в Севастопольском национальном техническом университете.

Все участвующие в олимпиаде вузы делятся на три категории в зависимости от числа академических часов, отводимых на изучение высшей математики. Категория Т – это вузы, в основном, технического профиля: индустриальные, металлургические и горнодобывающие, транспортные, приборостроительные и т.д., – с большим объемом курса высшей математики. Категория С – это сельскохозяйственные, торгово-экономические, а также различного профиля технологические и строительные вузы. К категории М отнесены студенты, обучающиеся по специальности прикладная математика и специальности, где курс математики приближен к факультетам кибернетики и механико-математическим факультетам университетов.

Условия, ответы и решения задач**1. Решить уравнение**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(x + \operatorname{arctg}(x + \operatorname{arctg}(x + \dots + \operatorname{arctg}(x)))) = \frac{\pi}{4}. \quad (C, M, T)$$

Ответ: $1 - \frac{p}{4}$.

Решение

Пусть

$$a_1 = \operatorname{arctg} x, \quad a_2 = \operatorname{arctg}(x + \operatorname{arctg} x),$$

$$a_3 = \operatorname{arctg}(x + \operatorname{arctg}(x + \operatorname{arctg} x)),$$

...

$$a_n = \operatorname{arctg}(x + \operatorname{arctg}(x + \operatorname{arctg}(x + \dots + \operatorname{arctg} x))).$$

$$\text{Тогда } a_{n+1} = \operatorname{arctg}(x + a_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что последовательность $\{a_n\}$ является ограниченной $\left(|a_n| < \frac{\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}\right)$ и монотонной (возрастающей при $x > 0$, убывающей при $x < 0$, постоянной при $x = 0$).

Таким образом, согласно теореме Вейерштрасса последовательность $\{a_n\}$ имеет конечный предел a , который в силу условия задачи равен $\frac{\pi}{4}$:

$$a = \frac{\pi}{4}.$$

С другой стороны, переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$ в (1), получаем $a = \operatorname{arctg}(x + a)$.

$$\text{Отсюда } x = \operatorname{tg} a - a \text{ или окончательно } x = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

2. Могут ли все шесть членов в разложении определителя третьего порядка быть одновременно положительными? (С)

Ответ: нет.

Решение

Рассмотрим разложение произвольного определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} . \quad (2)$$

Если среди элементов определителя есть нули, то в разложении этого определителя есть члены, равные нулю, то есть неположительные

Пусть все элементы определителя отличны от нуля. Тогда из очевидного равенства

$$(a_{11}a_{22}a_{33}) \cdot (a_{12}a_{23}a_{31}) \cdot (a_{13}a_{21}a_{32}) = -(-a_{13}a_{22}a_{31}) \cdot (-a_{12}a_{21}a_{33}) \cdot (-a_{11}a_{23}a_{32})$$

следует, что в разложении (2) есть как положительные, так и отрицательные члены.

Таким образом, все шесть членов в разложении определителя третьего порядка не могут быть одновременно положительными

3. Пусть дан определитель третьего порядка, все элементы которого отличны от нуля. Могут ли все 6 членов в разложении этого определителя быть одновременно положительными? Какое наименьшее число отрицательных членов может содержать такое разложение? (Т)

Ответ: нет; один.

Решение

Среди 6 членов разложения определителя 3-го порядка с ненулевыми элементами есть и положительные, и отрицательные (см. решение задачи 2). Нетрудно привести пример определителя, в разложении которого есть лишь один отрицательный член:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

4. Пусть дан определитель 4-го порядка, все элементы которого отличны от нуля. Выяснить, может ли среди 24 членов разложения этого определителя, быть меньше четырех отрицательных? (М)

Ответ: нет.

Решение

Среди 6 членов разложения определителя 3-го порядка с ненулевыми элементами есть и положительные, и отрицательные (см. решение задачи 2). Если воспользоваться разложением определителя 4-го порядка по элементам какой-нибудь строки (столбца), то нетрудно убедиться, что среди 24 членов разложения определителя 4-го порядка не менее четырех отрицательных.

5. Многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ с целыми коэффициентами принимает при $x=1, x=2$ и $x=3$ значение 5. Существует ли целое число x , при котором этот многочлен равен 6? (М)

Ответ: нет.

Решение

Из условия задачи следует, что $x=1, x=2$ и $x=3$ являются корнями многочлена $P_n(x) - 5$.

Поэтому

$$P_n(x) - 5 = (x-1)(x-2)(x-3)T_{n-3}(x), \quad (3)$$

где $T_{n-3}(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами.

Если существует целое число $x=c$ такое, что $P_n(c) = 6$, то из формулы (3) имеем

$$1 = (c-1)(c-2)(c-3)T_{n-3}(c).$$

Однако это невозможно, поскольку единицу нельзя представить в виде произведения четырех целых множителей, по крайней мере три из которых различны.

Таким образом, не существует целого x , о котором идёт речь в задаче.

6. В продажу поступили одинакового диаметра трубы трёх типов, длиной 4, 7 и 10 м соответственно стоимостью 4, 6 и 9 ден. ед. Сколько труб каждого типа можно купить ровно за 100 ден. ед., чтобы суммарная длина их была наибольшей? (С)

Ответ: 1 труба длиной 4 м и 16 труб длиной 7 м.

Обозначим через x, y, z – соответственно число труб первого, второго и третьего типа, которые можно купить, чтобы их суммарная длина была наибольшей при условии

$$4x + 6y + 9z = 100. \quad (4)$$

Решение первое

Из экономических соображений ясно, что нужно купить максимально возможное число труб с наименьшей стоимостью 1 м. Так как $(6/7) < (9/10) < (4/4)$, то больше всего должно быть куплено труб второго вида. Из (4) очевидно $6y \leq 100$, т.е. максимальное целое $y=16$, а потому опять из (4) имеем $4x + 9z = 4$, т.е. $z=0, x=1$, при этом суммарная длина труб составит

$$4 \times 1 + 7 \times 16 + 10 \times 0 = 116 \text{ (м)}$$

Это решение можно завершить на строгом уровне. Предположим, что существует другой набор неизвестных, при котором суммарная длина будет

$$4x + 7y + 10z > 116$$

или

$$4x + 7y + 10z = 4x + 6y + 9z + (y + z) = 100 + y + z > 116,$$

т.е. $y + z > 16$, но это противоречит равенству (4), так как $4x + 6y + 6z + 3z = 100$ или $4x + 3z + 6(y + z) = 100$, т.е. $6(y + z) \leq 100$ или $(y + z) \leq 16$, так как $(y + z)$ – целое. Значит, при $x = 1, y = 16, z = 0$ суммарная длина труб наибольшая.

Второе решение

На 18 ден. ед. можно купить 3 трубы второго типа или 2 трубы третьего типа, при этом длина трех указанных труб составит $7 \times 3 = 21$ (м), а двух других $2 \times 10 = 20$ (м). Поэтому ясно, что в оптимальном решении число труб третьего вида не должно превышать 1, т.е. $z \leq 1$. Но из равенства (4) следует, что z – четное, значит $z = 0$. Теперь учтем, что на 12 ден. ед. можно купить три трубы первого типа или две второго, суммарные длины которых соответственно будут $4 \times 3 = 12$ (м) и $7 \times 2 = 14$ (м). Значит, в оптимальном решении число труб первого вида не должно превышать 2. Но проверка показывает, что при $z = 0, x \neq 0, x \neq 2$, значит $x = 1$. Это также видно из уравнения (4), так как при делении обеих частей равенства, правая дает в остатке 3, поэтому $x = 1$. Итак, снова приходим к выводу, что при $x = 1, y = 16, z = 0$ суммарная длина труб наибольшая.

Решение третье

Нам нужно максимизировать с учетом равенства (4) функцию $4x + 7y + 10z = 100 - 6y - 9z + 7y + 10z = 100 + (y + z)$. Теперь очевидно, что эта функция принимает наибольшее значение при максимальном $(y + z)$. Но из уравнения (4) имеем: $4x + 6y + 6z + 3z = 100$ или $4x + 3z + 6(y + z) = 100$, т.е. $6(y + z) \leq 100$ или $(y + z) \leq 16$, так как $(y + z)$ – целое. Значит, максимальное целое $(y + z) = 16$. Отсюда из уравнения (4) $4x + 3z + 6(y + z) = 100$, т.е. $4x + 3z + 6 \times 16 = 100$ или $4x + 3z = 4$. Откуда $z = 0, x = 1$. Снова приходим к выводу, что при $x = 1, y = 16, z = 0$ суммарная длина труб наибольшая.

7. Является ли информация, подчеркнутая в условии задачи: «Существует ли двузначное число, которое при делении на сумму квадратов его цифр даёт в частном 2 и в остатке 6, а при делении на произведение его цифр даёт в частном 4 и в остатке 6?» лишней? (Т)

Ответ: да.

Решение

Исключим из условия этой задачи информацию о том, что число, о котором идет речь, при делении на сумму квадратов его цифр дает в частном 2 и в остатке 6.

Обозначим через x и y соответственно число десятков и число единиц двузначного числа. Тогда исходя из сохраненной информации, для нахождения неизвестных получим уравнение:

$$10x + y = 4xy + 6, \quad (5)$$

где $1 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9, x, y$ – целые числа.

Так как уравнение (5) равносильно

$$(4x - 1)(5 - 2y) = 7 \times 1, \quad (6)$$

(что легко проверить, раскрыв скобки в равенстве (6), но трудно догадаться, что именно так нужно преобразовать уравнение (5)), и $4x - 1 > 1$, поскольку x – натуральное число, то из (6) с учетом того, что y – число целое, имеем: $4x - 1 = 7$ и $5 - 2y = 1$, т.е. $x = 2$ и $y = 2$. Но, как показывает проверка, число 22 не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, не существует двузначного числа, о котором идет речь и тем более оно не может существовать при других дополнительных условиях, в том числе и исключенных.

8. Доказать, что функция f является периодической если существует такое $c \neq 0$, что

$$\forall x \in D(f), (x + c) \in D(f), (x - c) \in D(f) \text{ и выполняется условие } f(x + c) = \frac{2005^2}{2005 - f(x)}. \quad (C)$$

Доказательство

Из условия задачи следует, что периодом данной функции может быть лишь числа вида kc где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Кроме того, подставляя в исходное равенство $x + c$ вместо x , получаем

$$f(x + 2c) = \frac{2005^2}{2005 - f(x + c)} \quad (7)$$

Аналогично, подставляя в равенство (7) $x + c$ вместо x , последовательно получаем

$$\begin{aligned}
 f(x+3c) &= \frac{2005^2}{2005 - f(x+2c)} = \frac{2005^2}{2005 - \frac{2005^2}{2005 - f(x+c)}} = \frac{2005^2(2005 - f(x+c))}{-2005 \cdot f(x+c)} = \\
 &= \frac{2005^2 \left(2005 - \frac{2005^2}{2005 - f(x)} \right)}{-2005 \cdot \frac{2005^2}{2005 - f(x)}} = \frac{2005^2(-2005 f(x))}{-2005^3} = f(x).
 \end{aligned}$$

А это значит, что число $3c$ является периодом данной функции, т.е. функция f является периодической, что и требовалось доказать.

9. Доказать, что если функция $A \cos \alpha x + B \cos \beta x + C \cos \gamma x$ является периодической, где $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0; \alpha, \beta, \gamma$ – попарно различные положительные числа, то $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\alpha}{\gamma}$ – рациональные числа. (М)

Доказательство

Пусть

$$f(x) = A \cos \alpha x + B \cos \beta x + C \cos \gamma x. \quad (8)$$

Тогда

$$f''(x) = -A\alpha^2 \cos \alpha x - B\beta^2 \cos \beta x - C\gamma^2 \cos \gamma x, \quad (9)$$

$$f^{(4)}(x) = A\alpha^4 \cos \alpha x + B\beta^4 \cos \beta x + C\gamma^4 \cos \gamma x. \quad (10)$$

Из системы уравнений (8)-(10) имеем

$$\cos \alpha x = \frac{\beta^2 \gamma^2 f(x) + (\beta^2 + \gamma^2) f''(x) + f^{(4)}(x)}{A(\gamma^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2)}.$$

Если функция $f(x)$ имеет период T , то функции $f''(x)$ и $f^{(4)}(x)$ также являются периодическими с периодом T . Поэтому $\cos \alpha x$ имеет период T . С другой стороны, $\cos \alpha x$ имеет период $\frac{2\pi n}{\alpha}, n \in \mathbb{Z}$.

Следовательно $T = \frac{2\pi n}{\alpha}$.

Аналогично, выражая $\cos \beta x$ и $\cos \gamma x$ через $f(x), f''(x)$ и $f^{(4)}(x)$, можно показать, что $T = \frac{2\pi m}{\beta} = \frac{2\pi l}{\gamma}, m \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$.

Отсюда $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n}{m}, \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{n}{l}; n, m, l \in \mathbb{Z}$.

10. Для заданного значения $n \in \mathbb{N}$ найти все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству $f(m+k) = f(mk-n), \forall m, k \in \mathbb{N}; mk > n$. (М)

Ответ: $f(m) = \text{const}$.

Решение

Положим $k=1$. Тогда из условия задачи следует, что $f(m+1) = f(m-n) \forall m > n$.

Это значит, что $T = n+1$ является «периодом» функции f , т.е.

$$f(m+(n+1)) = f(m) \forall m \in \mathbb{N}.$$

Положим теперь $k = n+1$.

Тогда исходное уравнение принимает вид $f(m+(n+1)) = f(m(n+1)-n)$ или $f(m) = f((m-1)(n+1)+1)$.

Отсюда $f(m) = f(1) \forall m \in \mathbb{N}$.

Таким образом $f(m) = \text{const}$.

11. Функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \frac{1}{\pi} \arctg(xy+1) + \frac{1+2xy}{2+2x^2+2y^2}$ и начальному условию $y(0) = 0$. Доказать, что при любом $x > 0$ имеет место неравенство $y(x) < x$. (Т)

Доказательство

$$y = \frac{1}{\pi} \int_0^x \arctg(ty+1)dt + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1+2ty}{1+t^2+y^2} dt < \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x,$$

так как

$$\arctg(ty+1) < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1+2ty}{1+t^2+y^2} \leq 1.$$

12. Чётная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1;1]$. Доказать, что $\int_0^\pi xf(\cos x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\cos x)dx$. (С)

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_0^\pi xf(\cos x)dx &= \left| \begin{matrix} x = t + \frac{\pi}{2} \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t + \frac{\pi}{2}) f(\cos(t + \frac{\pi}{2}))dt = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tf(-\sin t)dt + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)dt + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt = \left| \begin{matrix} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dt = -dx \end{matrix} \right| = -\frac{\pi}{2} \int_\pi^0 f(\sin(\frac{\pi}{2} - x))dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\cos x)dx. \end{aligned}$$

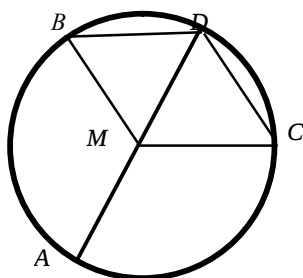


Рисунок 1 – к задаче 13

13. На гиперболе $y = \frac{1}{x}$ взяты точки $M_0(x_0, y_0)$ и $N(-x_0, -y_0)$.

Окружность с центром в точке M_0 , проходящая через точку N , пересекает гиперболу ещё в трёх точках. Докажите, что эти точки лежат в вершинах правильного треугольника (М)

Доказательство

Пусть окружность с центром в точке M_0 , которая проходит через N , пересекает гиперболу еще в трёх точках $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ и $C(x_C, y_C)$. Тогда координаты этих точек удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4(x_0^2 + y_0^2) \end{cases}$$

Исключая y из этой системы, получаем уравнение

$$(x - x_0)^2 + \left(\frac{1}{x} - y_0\right)^2 = 4(x_0^2 + y_0^2)$$

или

$$x^4 - 2x_0x^3 + (x_0^2 + y_0^2 - 4(x_0^2 + y_0^2))x^2 - 2y_0x + 1 = 0.$$

Согласно теореме Виета сумма всех корней этого уравнения, включая и корень $-x_0$, равна $2x_0$.

Поэтому $x_A + x_B + x_C = 3x_0$.

Аналогично, $y_A + y_B + y_C = 3y_0$.

Таким образом, $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3\overline{OM}$, где O – начало координат

Отсюда следует, что $(\overline{OA} - \overline{OM}) + (\overline{OB} - \overline{OM}) + (\overline{OC} - \overline{OM}) = 0$.

Поэтому $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$ или $\overline{MA} = -(\overline{MB} + \overline{MC})$.

Пусть $\overline{MB} + \overline{MC} = \overline{MD}$, тогда $|\overline{MD}| = |\overline{MA}|$. Значит $MDBC$ – ромб, диагональ MD которого равна стороне. Поэтому $\angle BMC = 120^\circ$. Аналогично, $\angle AMC = \angle AMB = 120^\circ$. А это и означает, что $\triangle ABC$ – правильный.

14. Доказать, что если корни квадратного трёхчлена $P(x)$ принадлежат отрезку $[-1;1]$, причём $\max_{|x| \leq 1} |P(x)| = 1$, то справедливо неравенство $\max_{|x| \leq 1} |P'(x)| \geq 1$. (С)

Доказательство

Из условия задачи следует, что $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $-1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, причём можно считать, что $a > 0$. Тогда $P'(x) = a(2x - x_1 - x_2)$.

Функция $|P(x)|$ на отрезке $[-1; 1]$ принимает наибольшее значение или в т. $x = 1$ ($x = -1$), или в т. $x = x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

1) Пусть $\max_{|x| \leq 1} |P(x)| = P(1)$. Тогда из уравнения $P(1) = 1$ следует, что $a = \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2)}$ и поэтому

$$P'(1) = \frac{2 - x_1 - x_2}{(1 - x_1)(1 - x_2)} = \frac{1}{1 - x_2} + \frac{1}{1 - x_1} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

то есть $\max_{|x| \leq 1} |P'(x)| \geq 1$.

Аналогично исследуется случай, когда $|P(x)|$ принимает наибольшее значение в т. $x = -1$.

2) Пусть $\max_{|x| \leq 1} |P(x)| = \left| P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right| = -P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

Тогда из уравнения $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = -1$ имеем $a = \frac{4}{(x_2 - x_1)^2}$ и поэтому

$$P'(x_2) = \frac{4}{(x_2 - x_1)^2} \cdot (x_2 - x_1) = \frac{4}{x_2 - x_1} \geq \frac{4}{2} = 2, \text{ то есть } \max_{|x| \leq 1} |P'(x)| \geq 1.$$

15. Пусть a и b – цифры, $a \neq 0, b \neq 0$. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-2n} (\overline{ab} + \overline{abab} + \dots + \underbrace{\overline{abab \dots ab}}_{2n \text{ знаков}})$. (Т)

Ответ: $\frac{1000a + 100b}{9801}$.

Решение

$$10^{-2n} (\overline{ab} + \overline{abab} + \dots + \underbrace{\overline{abab \dots ab}}_{2n \text{ знаков}}) = 10^{-2n} [(10a + b) + (10a + b)(10^2 + 1) + \dots$$

$$\begin{aligned} &+ (10a + b)(10^{2n-2} + 10^{2n-4} + \dots + 10^2 + 1)] = \\ &= (10a + b)10^{-2n} [1 + (10^2 + 1) + \dots + (10^{2n-2} + 10^{2n-4} + \dots + 10^2 + 1)] = \\ &= (10a + b)10^{-2n} [n + 10^2(n-1) + 10^4(n-2) + \dots + 10^{2n-4} \cdot 2 + 10^{2n-2}] = \\ &= (10a + b) \left[\frac{1}{100} + 2 \left(\frac{1}{100} \right)^2 + 3 \left(\frac{1}{100} \right)^3 + \dots + n \left(\frac{1}{100} \right)^n \right] = \\ &\frac{10a + b}{100} \left[1 + 2 \frac{1}{100} + 3 \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \dots + n \left(\frac{1}{100} \right)^{n-1} \right] = \\ &= \frac{10a + b}{100} \cdot \frac{1 - \left(1 + n - \frac{n}{100} \right) \left(\frac{1}{100} \right)^n}{\left(1 - \frac{1}{100} \right)^2}. \end{aligned}$$

Выше была использована формула

$$1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} = (q + q^2 + \dots + q^n)' = \left(\frac{q - q^{n+1}}{1 - q} \right)' = \frac{1 - (1 + n - nq)q^n}{(1 - q)^2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-2n} (\overline{ab} + \overline{abab} + \dots + \underbrace{\overline{abab \dots ab}}_{2n \text{ знаков}}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10a + b}{100} \cdot \frac{1 - \left(1 + n - \frac{n}{100} \right) \left(\frac{1}{100} \right)^n}{\left(1 - \frac{1}{100} \right)^2} = \frac{10a + b}{100} \cdot \frac{100^2}{99^2} = \frac{100(10a + b)}{9801}. \end{aligned}$$

16. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2 + \frac{1}{2})^2} dx$. (М)

Ответ: $\sqrt{\pi}$.

Решение

Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{-x^2}}{(x^2 + \frac{1}{2})^2} dx &= \int \left(\frac{-e^{-x^2}}{2x} \right) \left(\frac{-2x}{(x^2 + \frac{1}{2})^2} \right) dx = \int \left(\frac{-e^{-x^2}}{2x} \right) d \left(\frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} \right) = \\&= \frac{-e^{-x^2}}{2x(x^2 + \frac{1}{2})} + \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} d \left(\frac{e^{-x^2}}{2x} \right) = -\frac{e^{-x^2}}{x(2x^2 + 1)} - \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} \cdot \frac{(2x)^2 e^{-x^2} + 2e^{-x^2}}{(2x)^2} dx = \\&= -\frac{e^{-x^2}}{x(2x^2 + 1)} - \int \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx = -\frac{e^{-x^2}}{x(2x^2 + 1)} + \int e^{-x^2} d \left(\frac{1}{x} \right) = \\&= -\frac{e^{-x^2}}{x(2x^2 + 1)} + \frac{e^{-x^2}}{x} - \int \frac{1}{x} de^{-x^2} = \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2 + 1} + 2 \int e^{-x^2} dx.\end{aligned}$$

Следовательно

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2 + \frac{1}{2})^2} dx = \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2 + 1} \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

17. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2005} dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}$. (С, Т).

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Решение

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2005} dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})} = \int_0^1 \frac{x^{2005} dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})} + \int_1^{\infty} \frac{x^{2005} dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}. \quad (11)$$

Преобразуем второй интеграл в правой части формулы (11) к интегралу по отрезку [0;1].

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{2005} dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})} = \left| x = \frac{1}{t} \right| = \int_1^0 \frac{(-dt)}{t^{2005} t^2 \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \left(1 + \frac{1}{t^{2005}} \right)} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{2005})}.$$

Следовательно

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{2005} dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получаем

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x^{2005} dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})} &= \int_0^1 \frac{x^{2005} dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})} + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \\&= \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

18. Найти множество точек z комплексной плоскости $\mathbb{C}$, которые можно представить в виде:

$$z = \frac{1-ix}{1+ix}, \text{ где } x \in \mathbb{R}. \quad (\mathbb{C}, \mathbb{T})$$

Ответ: окружность $|z|=1$ за исключением точки $z=-1$.

Решение

$$\text{Пусть } z = \frac{1-ix}{1+ix}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Тогда } |z| = \frac{|1-ix|}{|1+ix|} = 1.$$

Кроме того, $z \neq -1$, иначе $\frac{1-ix}{1+ix} = -1$, откуда $1-ix = -1-ix$, или $1 = -1$, то есть приходим к противоречию.

Пусть, наоборот, выполняется условие $|z|=1$, причём $z \neq -1$.

Тогда $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, где $-\pi < \varphi < \pi$.

Поэтому

$$z = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} + i \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + 2i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{(1 + i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})^2}{(1 - i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})(1 + i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})} = \frac{1 + i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - ix}{1 + ix}, \text{ где } x = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, точки окружности $|z|=1$ (за исключением точки $z=-1$) и только они могут быть представлены в виде $z = \frac{1 - ix}{1 + ix}$, $x \in \mathbb{R}$.

19. Задана последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$|z_n| = 2, \operatorname{Im} z_n > 0, n \in \mathbb{N}. \text{ Найти сумму ряда } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \text{ где } a_n = \frac{\sum_{m=1}^{n+2} z_m}{\sum_{m=1}^{n+2} \prod_{l=1, l \neq m}^{n+2} z_l}. \quad (M)$$

Ответ: 1.

Решение

Запишем z_m в показательной форме:

$$z_m = 2e^{i\varphi_m}, m = 1, 2, \dots; \varphi_m = \arg z_m.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } a_1 &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2} = \frac{1}{2} \frac{e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_3}}{e^{i(\varphi_2+\varphi_3)} + e^{i(\varphi_1+\varphi_3)} + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}} = \\ &= \frac{1}{2} e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)} \cdot \frac{e^{-i(\varphi_2+\varphi_3)} + e^{-i(\varphi_1+\varphi_3)} + e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}}{e^{i(\varphi_2+\varphi_3)} + e^{i(\varphi_1+\varphi_3)} + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$|a_1| = \frac{1}{2},$$

так как числитель и знаменатель дроби $\frac{e^{-i(\varphi_2+\varphi_3)} + e^{-i(\varphi_1+\varphi_3)} + e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}}{e^{i(\varphi_2+\varphi_3)} + e^{i(\varphi_1+\varphi_3)} + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$ комплексно сопряженные числа (которые в силу условия $\operatorname{Im} z_n > 0$ отличны от нуля).

Аналогично,

$$a_n = \frac{2 \sum_{m=1}^{n+2} e^{i\varphi_m}}{2^{n+1} \cdot \sum_{m=1}^{n+2} e^{i \sum_{e=1}^{n+1} \varphi_e}} = \frac{1}{2^n} \cdot e^{i \sum_{m=1}^{n+2} \varphi_m} \cdot \frac{\sum_{m=1}^{n+2} e^{-i \sum_{e=1}^{n+2} \varphi_e}}{\sum_{m=1}^{n+2} e^{i \sum_{e=1}^{n+2} \varphi_e}}, \quad |a_n| = \frac{1}{2^n}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

20. Пусть X и Y – независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[-a; a]$. Найти вероятность того, что уравнение $t^2 + tX + Y = 0$ имеет действительные корни, принадлежащие интервалу $(-a, a)$. (C)

$$\text{Ответ: } P(A) = \begin{cases} \frac{12a - 8\sqrt{a} - 3}{12a}, & \text{при } a \in [4, \infty), \\ \frac{a^2 + 12a - 6}{24a}, & \text{при } a \in (1, 4), \\ \frac{7a}{24}, & \text{при } a \in (0, 1]. \end{cases}$$

Решение

Пусть x и y значения случайных величин X и Y соответственно. Уравнение $t^2 + xt + y = 0$ имеет действительные корни $t_1, t_2 \in (-a, a) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(a) > 0, \\ f(-a) > 0, \\ -a < \frac{t_1 + t_2}{2} < a, \\ -a \leq x, y \leq a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4y \geq 0, \\ a^2 + xa + y > 0, \\ a^2 - xa + y > 0, \\ -2a < -x < 2a, \\ -a \leq x, y \leq a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{x^2}{4}, \\ y > -ax - a^2, \\ y > ax - a^2, \\ -a \leq x \leq a, \\ -a \leq y \leq a. \end{cases}$$

Событие A – действительные корни уравнения принадлежат интервалу $(-a, a)$.
Рассмотрим три случая (рисунок 2).

а) Если $a \geq 4$, то

$$S_1 = \int_0^{2\sqrt{a}} \left(a - \frac{x^2}{4}\right) dx = 2a\sqrt{a} - \frac{8a\sqrt{a}}{12} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}, \quad S_2 = \frac{a}{2},$$

$$P(A) = \frac{4a^2 - a - \frac{8}{3}a\sqrt{a}}{4a^2} = \frac{12a - 8\sqrt{a} - 3}{12a}.$$

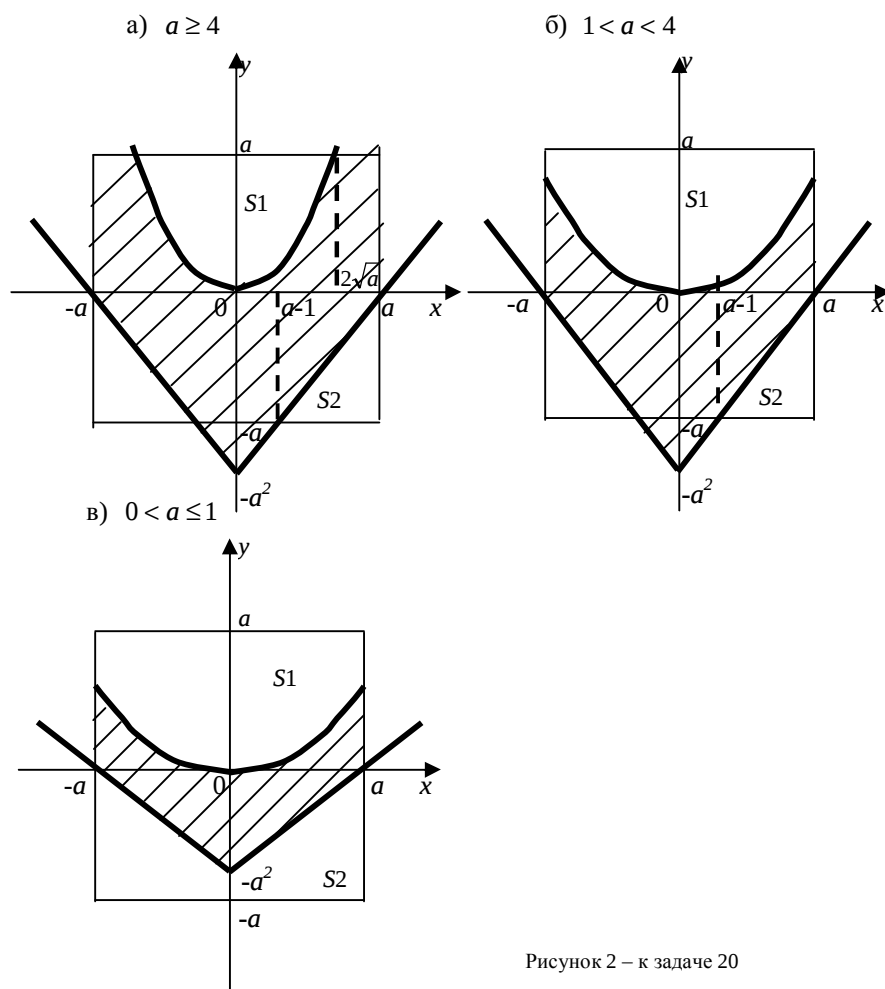


Рисунок 2 – к задаче 20

б) Если $1 < a < 4$, то

$$S_1 = \int_0^a \left(a - \frac{x^2}{4}\right) dx = a^2 - \frac{a^3}{12}, \quad S_2 = \frac{a}{2},$$

$$P(A) = \frac{4a^2 - a - 2a^2 + \frac{a^3}{6}}{4a^2} = \frac{a^2 + 12a - 6}{24a}.$$

в) Если $0 < a \leq 1$, то

$$S_1 = a^2 - \frac{a^3}{12}, \quad S_2 = a^2 - \frac{1}{2}a^3,$$

$$P(A) = \frac{4a^2 - 2a^2 + \frac{a^3}{6} - 2a^2 + a^3}{4a^2} = \frac{7a}{24}.$$

21. Из урны, содержащей 2 белых и 1 чёрный шар, наудачу последовательно извлекаются шары (извлечённый шар после извлечения возвращается в урну обратно). Найти вероятность того, что серия из трёх белых шаров подряд появится раньше, чем серия из двух чёрных шаров подряд. (М)

Ответ: $\frac{32}{51}$.

Решение

Введём обозначения событий

A – серия из трёх белых шаров подряд появится раньше, чем серия из двух чёрных шаров подряд;

B_i – появление белого шара при i -ом извлечении;

C_i – появление чёрного шара при i -ом извлечении.

Согласно формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(C_1)P(A/C_1),$$

или

$$P(A) = \frac{2}{3}P(A/B_1) + \frac{1}{3}P(A/C_1), \quad (13)$$

так как $P(B_i) = \frac{2}{3}, P(C_i) = \frac{1}{3}$.

Пусть $H_1 = B_2B_3, H_2 = B_2C_3, H_3 = C_2$.

Тогда, снова применяя формулу полной вероятности, получаем

$$P(A/B_1) = P(H_1)P(A/B_1H_1) + P(H_2)P(A/B_1H_2) + P(H_3)P(A/B_1H_3). \quad (14)$$

Так как события B_i и C_i независимы в совокупности то

$$P(H_1) = P(B_2B_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(H_2) = P(B_2C_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

$$P(H_3) = P(C_2) = \frac{1}{3}.$$

Кроме того, очевидно, что

$$P(A/B_1H_1) = P(A/B_1B_2B_3) = 1,$$

$$P(A/B_1H_2) = P(A/B_1B_2C_3) = P(A/C_1),$$

$$P(A/B_1H_3) = P(A/B_1C_2) = P(A/C_1).$$

Поэтому формула (14) принимает вид

$$P(A/B_1) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9}P(A/C_1) + \frac{1}{3}P(A/C_1) \text{ или } P(A/B_1) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9}P(A/C_1) \quad (15)$$

Аналогично, $P(A/C_1) = P(B_2)P(A/C_1B_2)$ или $P(A/C_1) = \frac{2}{3}P(A/B_1) \quad (16)$

Из системы уравнений (15), (16) имеем $P(A/B_1) = \frac{12}{17}, P(A/C_1) = \frac{8}{17}$.

Подставляя эти значения в формулу (13), окончательно получаем $P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{17} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{17} = \frac{32}{51}$.

22. Найти вероятность того, что при подбрасывании монеты серия из трёх «гербов» подряд появится раньше, чем серия из двух «цифр» подряд. (Т)

Ответ: $\frac{3}{10}$.

Решение

Введём обозначения событий:

A – серия из трёх «гербов» подряд появится раньше, чем серия из двух «цифр» подряд;

Γ_i – появление «герба» при i -ом подбрасывании;

Π_i – появление «цифры» при i -ом подбрасывании.

Согласно формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(\Gamma_1)P(A/\Gamma_1) + P(\Pi_1)P(A/\Pi_1) \text{ или}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}P(A/\Gamma_1) + \frac{1}{2}P(A/\Pi_1). \quad (17)$$

Пусть $H_1 = \Gamma_2\Gamma_3, H_2 = \Gamma_2\Pi_3, H_3 = \Pi_2$. Тогда, снова применяя формулу полной вероятности, получаем

$$P(A/\Gamma_1) = P(H_1)P(A/\Gamma_1H_1) + P(H_2)P(A/\Gamma_1H_2) + P(H_3)P(A/\Gamma_1H_3). \quad (18)$$

Так как события Γ_i и Π_i – независимы в совокупности то

$$P(H_1) = P(\Gamma_2\Gamma_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(H_2) = P(\Gamma_2\Pi_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(H_3) = P(\Pi_2) = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, очевидно, что

$$P(A/\Gamma_1H_1) = P(A/\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3) = 1,$$

$$P(A/\Gamma_1H_2) = P(A/\Gamma_1\Gamma_2\Pi_3) = P(A/\Pi_1),$$

$$P(A/\Gamma_1H_3) = P(A/\Gamma_1\Pi_2) = P(A/\Pi_1).$$

Поэтому формула (18) принимает вид

$$P(A/\Gamma_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}P(A/I_1) + \frac{1}{2}P(A/I_1) \text{ или } P(A/\Gamma_1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}P(A/I_1). \quad (19)$$

Аналогично,

$$P(A/I_1) = P(\Gamma_2)P(A/I_1\Gamma_2). \text{ Отсюда } P(A/I_1) = \frac{1}{2}P(A/\Gamma_1). \quad (20)$$

Из системы уравнений (19), (20) имеем $P(A/\Gamma_1) = \frac{2}{5}, P(A/I_1) = \frac{1}{5}$.

Подставляя эти значения в формулу (17), окончательно получаем $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$.

23. Решить дифференциальное уравнение $x^2(1-y)dy = y(x+y^2)dx$. (Т, М)

Ответ: $\ln\left|\frac{x+y}{y}\right| + \frac{xy-x}{x+y} = C$; $y=0$; $y=-x$.

Решение

Нетрудно убедиться, что $x=0$ и $y=0$ – решения данного уравнения.

Пусть $x \neq 0, y \neq 0$. Тогда последовательно имеем:

$$\begin{aligned} yxdx + y^3dx + x^2ydy - x^2dy &= 0 \\ x^3 \frac{ydx - xdy}{x^2} + y(y^2dx + x^2dy) &= 0 \\ -x^3d\left(\frac{y}{x}\right) + y^3x^2\left(\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2}\right) &= 0 \\ xd\left(\frac{y}{x}\right) + y^3d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Функция $y=-x$ является решением данного уравнения.

Пусть $y \neq -x$. Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = v \end{cases}, \text{ отсюда } \begin{cases} y = \frac{u+1}{v} \\ x = \frac{u+1}{uv} \end{cases}, \quad u \neq 0, v \neq 0, u \neq -1.$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{u+1}{uv}du + \frac{(u+1)^3}{v^3}dv = 0, \quad \frac{1}{u(u+1)^2}du + \frac{dv}{v^2} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|u| - \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} - \frac{1}{v} = C.$$

Возвращаясь к старым переменным, имеем

$$\ln\left|\frac{x+y}{y}\right| + \frac{xy-x}{x+y} = C.$$

($C=0$ соответствует решению $x=0$).

24. Решить дифференциальное уравнение: $(x^2-y)dx + x(y+1)dy = 0$. (С)

Ответ: $x\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2} + \ln(\frac{y}{x} + \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}) = C$; $x=0$.

Решение

$$\begin{aligned} x^2dx - ydx + xydy + xdy &= 0 \\ x(d\frac{x^2}{2} + d\frac{y^2}{2}) + xdy - ydx &= 0 \end{aligned}$$

$x=0$ – решение данного уравнения. Пусть $x \neq 0$. Тогда

$$\frac{1}{x}d\frac{x^2+y^2}{2} + \frac{xdy-ydx}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{x}d\frac{x^2+y^2}{2} + d\frac{y}{x} = 0. \quad (21)$$

Введем новые переменные $u = \frac{x^2 + y^2}{2}$, $v = \frac{y}{x}$. Отсюда $x = \pm \sqrt{\frac{2u}{1+v^2}}$ и уравнение (21) принимает вид:

$$\pm \frac{\sqrt{1+v^2}}{\sqrt{2u}} du + dv = 0 \quad \text{или} \quad \pm \frac{du}{\sqrt{2u}} + \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = 0.$$

Интегрируя получаем: $\pm \sqrt{2u} + \ln(v + \sqrt{1+v^2}) = C$.

Возвращаясь к старым переменным, имеем

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} + \ln\left(\frac{y \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\right) = C \quad \text{или} \quad x\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = C.$$

Отметим, что выше для каждой задачи приведено одно из возможных решений (исключение составляет лишь задача 6). Однако, как правило, олимпиадные задачи носят исследовательский характер и допускают несколько возможных способов решения. В этом смысле не стала исключением и Всеукраинская студенческая олимпиада по математике 2005 года: в целом ряде случаев участники олимпиады нашли решения задач, отличные от предложенных выше.

Библиографический список

1. Булдыгин В.В. Задачи Всеукраинской олимпиады по математике для студентов вузов и сельскохозяйственных вузов / В.В. Булдыгин, А.С. Шкабара // Математика сегодня. — К., 1997. — Вып. 11. — С. 117–157.
2. Булдыгин В.В. Задачи Всеукраинских студенческих олимпиад, проводившихся в НТУУ (КПИ) в 1997-2000 гг. / В.В. Булдыгин, В.А. Кушнеревич, А.С. Шкабара // Математика сегодня. — К., 2001. — Вып. 12. — С. 185–255.

Поступила в редакцию 15.06.2005 г.