

УДК 517.5

С.В.Доценко, профессор, д-р физ.-мат. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ЧИСЛЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ ЛОКАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ**

Разработан метод численного нахождения интегралов Фурье от гладких функций. Применение локальных сплайнов позволило получить результирующие формулы высокой точности. Тестирование метода с помощью составленных по нему программ показало их достаточно высокую эффективность.

Ключевые слова: преобразования Фурье, локальные сплайны, численный метод, гладкая функция.

Применение гармонического анализа в технике и естествознании очень разнообразно. Метод разложения функций на гармонические составляющие является одним из главных в изучении явлений природы и проблем техники.

Существует обширная литература по теории гармонического анализа и его приложениям. В то же время методы численного преобразования Фурье функций, заданных в виде формул, освещены в значительно меньшей степени [1]. Одна из причин – большое разнообразие свойств преобразуемых функций. Это требует значительного набора методов их численного преобразования, учитывающих эти свойства.

Один из таких методов развивается в данной работе. Он основан на интерполяции исходной функции $f(x)$ эрмитовыми (локальными) сплайнами третьей степени [2].

Рассмотрим задачу численного нахождения значений интегралов Фурье

$$\tilde{f}_c(\omega) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) \cos(\omega x) dx, \quad \tilde{f}_s(\omega) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) \sin(\omega x) dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ – некоторая функция, заданная своей формулой, и интегралы (1) не вычисляются аналитически. Получим соотношения, позволяющие численно найти их значения. Для этого функцию $f(x)$ следует аппроксимировать набором некоторых простых функций, для которых интегралы (1) вычисляются аналитически.

Предположим, что в точках $x_0, x_1, \dots, x_{\max}$ известны не только значения функции $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{\max})$, но и значения ее первых производных $f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_{\max})$. Если функция $f(x)$ задана формулой, то получение наборов значений как $f(x_k)$, так и $f'(x_k)$ (т.е. их отсчетов) обычно не составляет труда. Подчеркнем, что в общем случае интервалы между отсчетами $h_k = x_k - x_{k-1}$ обеих функций $f(x)$ и $f'(x)$ при данном k совпадают, но могут меняться от отсчета к отсчету. Всего таких интервалов n : от h_1 до h_n . Максимальный номер отсчета $k = n$ соответствует значению аргумента функции $x_{\max}$, т.е. $x_n = x_{\max}$. Таким образом, в приведенных ниже формулах номера отсчетов лежат в пределах $1 \leq k \leq n$. Кроме того, имеется нулевой отсчет, для которого $f_0 = f(x_0)$ и $f'_0 = f'(x_0)$.

Будем считать, что в граничных точках k -го элементарного промежутка функция $f(x)$ задается таблицей дискретных значений как ее самой, так и ее первой производной:

x	$f(x)$	$f'(x)$
x_{k-1}	$f_{k-1} = f(x_{k-1})$	$f'_{k-1} = f'(x_{k-1})$
x_k	$f_k = f(x_k)$	$f'_k = f'(x_k)$

По данным этой таблицы в каждом промежутке между отсчетами может быть построен единственный полином Эрмита третьего порядка. В местах стыков пар полиномов совпадают их значения и значения их первых производных. Полная последовательность таких полиномов на интервале

$[x_0, x_{\max}]$ представляє собою ермитов сплайн. Так як кожен поліном строиться незалежно від інших, то такі сплайни називаються також локальними сплайнами.

Будемо шукати k -е звено сплайна в вигляді

$$g_k(x) = a_k + b_k h_k^{-1}(x - x_{k-1}) + c_k h_k^{-2}(x - x_{k-1})^2 + d_k h_k^{-3}(x - x_{k-1})^3, \quad (x_{k-1} \leq x \leq x_k), \quad (k = 1, \dots, n). \quad (2)$$

В цьому вираженні в отличие від общепринятого визначення ермитова сплайна в кожне слагаєме додані негативні степені кроків дискретизації h_k . Тому всі коефіцієнти a_k, b_k, c_k і d_k набувають однакову розмірність, що збігається з розмірністю $g_k(x)$.

Два рівняння для знаходження коефіцієнтів многочлена $g_k(x)$ отримуємо з умов співпадіння їх з вихідною функцією в точках її відліку: $g_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ і $g_k(x_k) = f(x_k)$, т.е. $a_k = f_{k-1}$ і $a_k + b_k + c_k + d_k = f_k$.

Продиференціюємо поліном (2) по x :

$$g'_k(x) = b_k h_k^{-1} + 2c_k h_k^{-2}(x - x_{k-1}) + 3d_k h_k^{-3}(x - x_{k-1})^2.$$

Отсюди з умов співпадіння похідних $g'_k(x_{k-1}) = f'_{k-1}$ і $g'_k(x_k) = f'_k$ отримуємо ще два рівняння: $b_k = f'_{k-1} h_k$ і $b_k + 2c_k + 3d_k = f'_k h_k$.

Рішення отриманої системи рівнянь дає вирази для коефіцієнтів поліномів через відомі величини:

$$a_k = f_{k-1}, \quad b_k = f'_{k-1} h_k, \quad c_k = 3(f_k - f_{k-1}) - (2f'_{k-1} + f'_k) h_k, \quad d_k = (f'_{k-1} + f'_k) h_k - 2(f_k - f_{k-1}). \quad (3)$$

Замінивши в формулах (1) функцію $f(x)$ інтерполюючим її сплайном (2), виразимо формули для інтегралів Фур'є в вигляді сум

$$\tilde{f}_c(\omega) = \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{ck}(\omega) + R_c(\omega), \quad \tilde{f}_s(\omega) = \sum_{k=1}^n \tilde{f}_{sk}(\omega) + R_s(\omega) \quad (4)$$

частинних інтегралів від звеньїв сплайнів

$$\tilde{f}_{ck}(\omega) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} g_k(x) \cos(\omega x) dx, \quad \tilde{f}_{sk}(\omega) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} g_k(x) \sin(\omega x) dx \quad (5)$$

і остаточних погрешностей $R_c(\omega)$ і $R_s(\omega)$, зв'язаних з такою заміною. Відкидання погрешностей робить формули (4) наближеними.

Ураховуючи сплайни (2), запишемо частинні інтеграли (5) в вигляді

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_{ck}(\omega) &= a_k \Phi_{ck}^{(0)} + b_k \Phi_{ck}^{(1)} + c_k \Phi_{ck}^{(2)} + d_k \Phi_{ck}^{(3)}, \\ \tilde{f}_{sk}(\omega) &= a_k \Phi_{sk}^{(0)} + b_k \Phi_{sk}^{(1)} + c_k \Phi_{sk}^{(2)} + d_k \Phi_{sk}^{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь позначені інтеграли

$$\Phi_{ck}^{(m)} = h_k^{-m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})^m \cos(\omega x) dx, \quad \Phi_{sk}^{(m)} = h_k^{-m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})^m \sin(\omega x) dx.$$

Ці інтеграли обчислюються аналітично, і їх значення можуть бути записані в вигляді

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ck}^{(m)} &= (-1)^m [\mu_m(\theta_k) \cos(\omega x_{k-1}) - \nu_m(\theta_k) \sin(\omega x_{k-1})] h_k, \\ \Phi_{sk}^{(m)} &= (-1)^m [\nu_m(\theta_k) \cos(\omega x_{k-1}) + \mu_m(\theta_k) \sin(\omega x_{k-1})] h_k, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де $\theta_k = \omega h_k$ – змінна, а функції $\mu_m(\theta)$ і $\nu_m(\theta)$ визначаються формулами

$$\left. \begin{aligned} \mu_0(\theta) &= \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad \mu_1(\theta) = \frac{1 - \cos \theta - \theta \sin \theta}{\theta^2}, \\ \mu_2(\theta) &= \frac{2\theta \cos \theta - (2 - \theta^2) \sin \theta}{\theta^3}, \quad \mu_3(\theta) = \frac{3(2 - \theta^2) \cos \theta + \theta(6 - \theta^2) \sin \theta - 6}{\theta^4} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

і

$$\left. \begin{aligned} v_0(\theta) &= \frac{1 - \cos \theta}{\theta}, & v_1(\theta) &= \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2}, \\ v_2(\theta) &= \frac{(2 - \theta^2) \cos \theta + 2\theta \sin \theta - 2}{\theta^3}, & v_3(\theta) &= \frac{\theta(\theta^2 - 6) \cos \theta + 3(2 - \theta^2) \sin \theta}{\theta^4}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Подставив коэффициенты (7) в формулы (6), получим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_{ck}(\omega) &= [A_k(\theta_k) \cos(\omega x_{k-1}) - B_k(\theta_k) \sin(\omega x_{k-1})] h_k, \\ \tilde{f}_{sk}(\omega) &= [B_k(\theta_k) \cos(\omega x_{k-1}) + A_k(\theta_k) \sin(\omega x_{k-1})] h_k \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_k(\theta) &= a_k \mu_0(\theta) - b_k \mu_1(\theta) + c_k \mu_2(\theta) - d_k \mu_3(\theta), \\ B_k(\theta) &= a_k v_0(\theta) - b_k v_1(\theta) + c_k v_2(\theta) - d_k v_3(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Учитывая значения коэффициентов (3) и функций (8) и (9), приведем формулы (11) к виду

$$\left. \begin{aligned} A_k(\theta) &= D_{c1}(\theta) f_{k-1} + D_{c2}(\theta) f_k - D_{c3}(\theta) f'_{k-1} h_k - D_{c4}(\theta) f'_k h_k, \\ B_k(\theta) &= D_{s1}(\theta) f_{k-1} + D_{s2}(\theta) f_k - D_{s3}(\theta) f'_{k-1} h_k - D_{s4}(\theta) f'_k h_k. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где введены следующие функции

$$\left. \begin{aligned} D_{c1}(\theta) &= \frac{6(2 - 2 \cos \theta - \theta \sin \theta)}{\theta^4}, & D_{c1}(\theta) &= \frac{12 \cos \theta + \theta(6 + \theta^2) \sin \theta - 12}{\theta^4}, \\ D_{c3}(\theta) &= \frac{6 \cos \theta + 2\theta \sin \theta + \theta^2 - 6}{\theta^4}, & D_{c4}(\theta) &= \frac{(6 - \theta^2) \cos \theta + 4\theta \sin \theta - 6}{\theta^4} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и

$$\left. \begin{aligned} D_{s1}(\theta) &= \frac{6\theta \cos \theta - 12 \sin \theta + 6\theta + \theta^3}{\theta^4}, & D_{s2}(\theta) &= \frac{12 \sin \theta - \theta(6 + \theta^2) \cos \theta - 6\theta}{\theta^4}, \\ D_{s3}(\theta) &= \frac{6 \sin \theta - 2\theta \cos \theta - 4\theta}{\theta^4}, & D_{s4}(\theta) &= \frac{(6 - \theta^2) \sin \theta - 4\theta \cos \theta - 2\theta}{\theta^4}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Функции (13) и (14) изображены на рисунке 1. Они имеют устранимые особенности при $\theta = 0$, раскрытие которых путем предельного перехода $\theta \rightarrow 0$ дает следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} D_{c1}(0) &= D_{c2}(0) = 1/2, & D_{c3}(0) &= -1/12, & D_{c4}(0) &= 1/12, \\ D_{s1}(0) &= D_{s2}(0) = D_{s3}(0) = D_{s4}(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

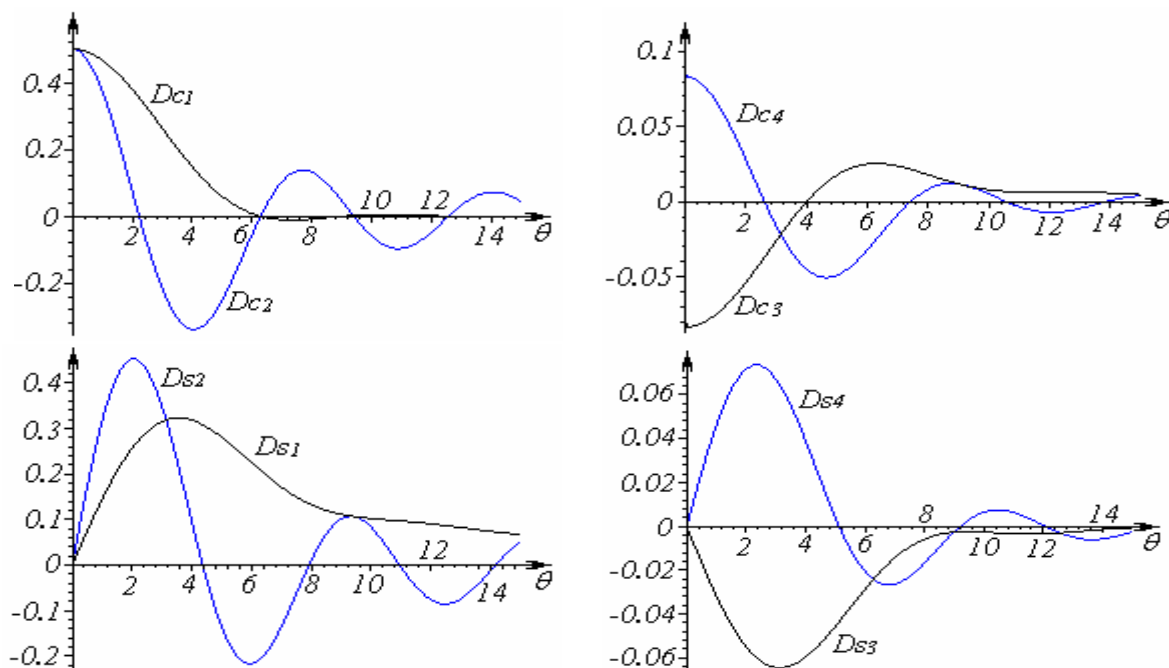


Рисунок 1 – Зависимость функций D_{cm} и D_{sm} от параметра θ

Конечные формулы для численного нахождения интегралов Фурье получим, подставив частичные интегралы от звеньев сплайнов (10) в формулы (5) с учетом соотношений (12), в которых аргумент θ заменяется на θ_k .

Эти выражения вместе с формулами (13) и (14) решают поставленную задачу.

Найденные формулы существенно упрощаются, если $x_0 = 0$, шаг между отсчетами функции $f(x)$ и ее производной постоянен $h_k = h$ и $x_k = kh$. При этом входящие в формулы (10) функции $D_{cm}(\theta)$ и $D_{sm}(\theta)$ не зависят от номера k .

Обозначив

$$\xi_c(\theta) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k \cos(k\theta), \quad \eta_c(\theta) = \sum_{k=1}^{n-1} f'_k \cos(k\theta), \quad \xi_s(\theta) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k \sin(k\theta), \quad \eta_s(\theta) = \sum_{k=1}^{n-1} f'_k \sin(k\theta) \quad (16)$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f_k \cos(k\theta) &= \xi_c(\theta) + f_n \cos(n\theta), & \sum_{k=1}^n f'_k \cos(k\theta) &= \eta_c(\theta) + f'_n \cos(n\theta), \\ \sum_{k=1}^n f_k \sin(k\theta) &= \xi_s(\theta) + f_n \sin(n\theta), & \sum_{k=1}^n f'_k \sin(k\theta) &= \eta_s(\theta) + f'_n \sin(n\theta), \\ \sum_{k=1}^n f_{k-1} \cos(k\theta) &= f_0 \cos \theta + \xi_c(\theta) \cos \theta - \xi_s(\theta) \sin \theta, \\ \sum_{k=1}^n f'_{k-1} \cos(k\theta) &= f'_0 \cos \theta + \eta_c(\theta) \cos \theta - \eta_s(\theta) \sin \theta, \\ \sum_{k=1}^n f_{k-1} \sin(k\theta) &= f_0 \sin \theta + \xi_c(\theta) \sin \theta + \xi_s(\theta) \cos \theta, \\ \sum_{k=1}^n f'_{k-1} \sin(k\theta) &= f'_0 \sin \theta + \eta_c(\theta) \sin \theta + \eta_s(\theta) \cos \theta, \end{aligned}$$

после простых, но достаточно громоздких преобразований получим искомые формулы, представляющие собой соответственно численные косинус-преобразование и синус-преобразование Фурье функции $f(x)$ при равномерных отсчетах как самой функции, так и ее производных:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_c(\omega)/h &= D_{c1}(\theta)[f_0 + 2\xi_c(\theta) + f_n \cos(n\theta)] + D_{s1}(\theta)f_n \sin(n\theta) - \\ &- D_{c3}(\theta)h[f'_0 - f'_n \cos(n\theta)] + D_{s3}(\theta)h[2\eta_s(\theta) + f'_n \sin(n\theta)] \end{aligned} \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{f}_s(\omega)/h &= D_{c1}(\theta)[2\xi_s(\theta) + f_n \sin(n\theta)] + D_{s1}(\theta)[f_0 - f_n \cos(n\theta)] + \\ &+ D_{c3}(\theta)h f'_n \sin \theta - D_{s3}(\theta)h[f'_0 + 2\eta_c(\theta) + f'_n \cos(n\theta)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что входящие в формулы (17) и (18) выражения $[f_0 + 2\xi_c(\theta) + f_n \cos(n\theta)]$ и $[2\xi_s(\theta) + f_n \sin(n\theta)]$ дают удвоенные значения соответствующих преобразований Фурье функции $f(x)$, найденные по формуле трапеций. Эти выражения периодичны по θ с периодом 2π . Поэтому, чтобы избежать в найденном спектре эффекта «перепутывания частот», величину θ следует выбирать в диапазоне $0 \leq \theta \leq \pi$. Так как $\theta = \omega h$, то максимальная частота ω , при которой рассчитываются спектры по формулам (17) и (18), не должна превышать величины $\omega_{\max} = \pi/h = n\pi/x_{\max}$. Эта граничная частота при заданном $x_{\max}$ тем выше, чем большим числом отсчетов n представлена преобразуемая функция. В свою очередь, величину $x_{\max}$ необходимо выбирать таким образом, чтобы остаточные погрешности

$$R_c(\omega) = \int_{x_{\max}}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx, \quad R_s(\omega) = \int_{x_{\max}}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

не превышали заданной величины. Обычно при больших x функция $f(x)$ упрощается, что позволяет сравнительно просто получить оценки этих погрешностей.

Выше отмечалось, что при $\theta=0$ функции $D_{cm}(\theta)$ и $D_{sm}(\theta)$ имеют особенности, что может при малых частотах привести к заметным погрешностям вычисления преобразований. Улучшить точность здесь можно, разложив эти функции в ряды Маклорена по степеням θ и сохранив в них конечное число членов. С погрешностью не хуже $1,5 \cdot 10^{-7}$ в диапазоне $0 \leq \theta \leq 1$ имеем такие разложения:

$$D_{c1}(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{10} \left(\frac{1}{3} - \frac{\theta^2}{112} \left(1 - \frac{\theta^2}{675} \right) \right), \quad D_{s1}(\theta) = \frac{3\theta}{20} \left(1 - \frac{5\theta^2}{126} \left(1 - \frac{7\theta^2}{360} \left(1 - \frac{9\theta^2}{770} \right) \right) \right),$$

$$D_{c3}(\theta) = -\frac{1}{12} + \frac{\theta^2}{120} \left(1 - \frac{5\theta^2}{168} \left(1 - \frac{7\theta^2}{450} \right) \right), \quad D_{s3}(\theta) = -\frac{\theta}{30} \left(1 - \frac{\theta^2}{21} \left(1 - \frac{\theta^2}{48} \left(1 - \frac{2\theta^2}{165} \right) \right) \right)$$

Положив в найденных формулах для численного преобразования Фурье $\omega=0$, получим, согласно (1), формулы численного нахождения определенного интеграла от функции $f(x)$:

$$S = \int_{x_0}^{x_{\max}} f(x) dx.$$

Вычисление этого интеграла представляет самостоятельный интерес при решении многих задач. При переменном шаге дискретизации h_k формула (17) имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (f_{k-1} + f_k) h_k + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n (f'_{k-1} - f'_k) h_k^2,$$

при постоянном $h_k = h$ – вид

$$S = \left(f_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} f_k + f_n/2 \right) h + \frac{1}{12} (f'_0 - f'_n) h^2.$$

Если отбросить в последнем выражении второе слагаемое, то оно сведется к известной формуле численного интегрирования по методу трапеций.

Найденные соотношения численных преобразований Фурье могут с успехом применяться в различных областях теоретической физики, в цифровой обработке сигналов, в исследовании систем передачи сообщений и т.д.

Библиографический список

1. Крылов В.И. Справочная книга по численному гармоническому анализу / В.И.Крылов, Л.Г. Кругликова. — Минск: Наука и техника, 1968. — 166 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. — М.: Высш. шк., 2002. — 848 с.
3. Доценко С.В. Численное преобразование Фурье, основанное на интерполяции функции кубическим сплайном / С.В. Доценко // Вестн. СевГТУ. Сер. Физика и математика: сб. науч. тр. — Севастополь, 2005. — Вып. 70. — С. 134–141.

Поступила в редакцию 16.04.2009 г.