

УДК 621.9.048.6

А.И. Бохонский, Е.В. Пашков*Севастопольский национальный технический университет**Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛЕВИТАЦИОННО ОБРАБАТЫВАЕМОГО НЕЖЕСТКОГО ВАЛА**

Найдены частоты собственных колебаний и рассмотрено динамическое поведение нежесткого вала при левитационном течении.

Исследованию устойчивости движения системы «резец – деталь» при левитационном течении в случае абсолютно жесткой обрабатываемой заготовки посвящена работа [1]. В [2], например, уточнена математическая модель подсистемы «инструмент – деталь», но обрабатываемая заготовка также предполагалась недеформируемой. В этих работах главным образом обращается внимание на динамическую устойчивость процесса в связи с нелинейной характеристикой взаимодействия режущего инструмента с деталью, порождающей автоколебания.

Целью данных исследований является определение динамических параметров левитационно обрабатываемого нежесткого вала (частот собственных колебаний с учетом факторов, определяющих процесс левитационного течения) и, на основе теории колебаний упругих систем [3–5], исследование колебаний заготовки в процессе левитационной обработки (при медленном движении режущего инструмента вдоль заготовки конечной жесткости).

1. Определение частоты собственных колебаний нежесткой заготовки

Моделирование динамических процессов, характерных для левитационного течения, связано с необходимостью определения частот собственных колебаний обрабатываемых заготовок. При обычной (нелевитационной) токарной обработке частоты собственных колебаний зависят от характера закрепления концов заготовки, которые определяют граничные условия при определении мод колебаний. Частота первого тона изгибных колебаний нежесткого вала определяется по формуле

$$p_1 = \lambda_1^2 \sqrt{EJ/m}, \quad (1)$$

где $\lambda_1 = q_1/L$; q_1 – корень соответствующего характеристического уравнения; EJ – жесткость на изгиб (E – модуль упругости первого рода; J – осевой момент инерции поперечного сечения); m – масса единицы длины заготовки; L – длина заготовки. В зависимости от характера закрепления концов следуют корни характеристического уравнения, которые для первого тона колебаний равны: $q_1 = 3,142$ – при закреплении в центрах; $q_1 = 4,73$ – при закреплении в патронах (жесткое защемление); $q_1 = 3,927$ – закрепление в виде патрона и центра; $q_1 = 1,875$ – закрепление одного конца в патроне со свободным другим концом. Интересно, что частота первого тона абсолютно незакрепленной заготовки (в свободном полете) совпадает с частотой первого тона заготовки с жесткими защемлениями концов, т.е. в этом случае $q_1 = 4,73$.

Численный пример. Исходные данные: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $m = 0,221$ кг/м; $L = 0,3$ м; $d = 0,006$ м; $J = \pi d^4/64 = 6,362 \cdot 10^{-11}$ м⁴. Найденные частоты (первый тон): при закреплении заготовки в центрах $p_1 = 1,21 \cdot 10^3$ с⁻¹; при закреплении в патронах (жесткое защемление) $p_1 = 1,935 \cdot 10^3$ с⁻¹; при закреплении в виде патрона и центра $p_1 = 1,334 \cdot 10^3$ с⁻¹; при закреплении только в одном патроне $p_1 = 304,028$ с⁻¹.

В случае левитационного течения схема течения представляет собой свободную заготовку, взаимодействующую с режущим инструментом, и сам инструмент, который можно рассматривать как опору, медленно перемещающейся вдоль заготовки. Такой пример в теории колебаний ранее не рассматривался, но он важен для левитационного течения. Схема заготовки изображена на рисунке 1.

Режущий инструмент является опорой, координата которой равна a . Обрабатываемая заготовка состоит из двух участков. На первом участке выражение для прогиба, определяющее форму изогнутой оси как функции от продольной координаты, записывается следующим образом:

$$W_1(x) = C_1 K_1(\lambda x) + C_2 K_2(\lambda x) + C_3 K_3(\lambda x) + C_4 K_4(\lambda x), \\ a \geq x \geq 0.$$

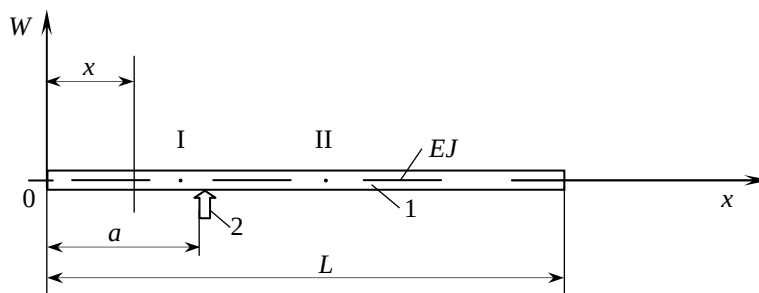


Рисунок 1 – Схема левитационного точения нежесткой заготовки:
1 – нежесткая заготовка; 2 – режущий инструмент

На втором участке – другая функция и для решения задачи следует задавать 8 граничных условий, но возможно следующее упрощение. С учетом краевых условий $W_1''(0) = 0$ и $W_1'''(0) = 0$ следует $C_3 = C_4 = 0$ и функция прогиба на первом участке примет вид

$$W_1(x) = C_1 K_1(\lambda x) + C_2 K_2(\lambda x),$$

где $K_1(\lambda x)$ и $K_2(\lambda x)$ – функции А.Н. Крылова.

Решение задачи облегчается, если для всей заготовки выражение для прогиба записать в виде:

$$W(x) = C_1 K_1(\lambda x) + C_2 K_2(\lambda x) + \frac{P_r}{EJ\lambda^3} K_4[\lambda(x-a)], \quad (1)$$

где P_r – реакция опоры (радиальная составляющая силы резания). Для определения частот в этом случае дополнительно использованы условия: при $x = a$, $W(a) = 0$; при $x = l$, $W''(l) = 0$, $W'''(l) = 0$. Эти условия с учетом выражения (1) приводят к системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 K_1(\lambda a) + C_2 K_2(\lambda a) &= 0, \\ C_1 K_3(\lambda L) + C_2 K_4(\lambda a) + BK_2(\lambda(L-a)) &= 0, \\ C_1 K_2(\lambda L) + C_2 K_3(\lambda L) + BK_1(\lambda(L-a)) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $B = \frac{P_r}{EJ\lambda^3}$. Уравнение для определения частот находится из определителя, составленного из коэффициентов системы (2):

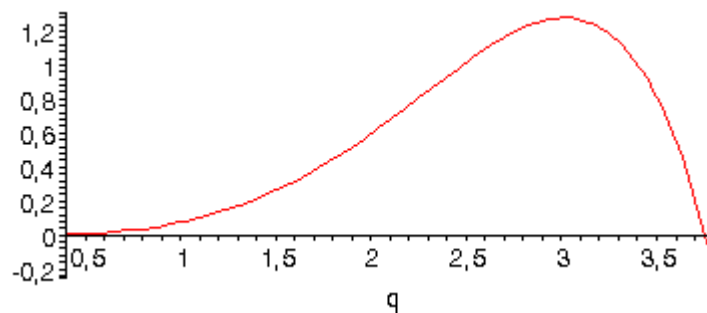
$$\begin{vmatrix} K_1(\lambda a) & K_2(\lambda a) & 0 \\ K_3(\lambda L) & K_4(\lambda L) & K_2(\lambda(L-a)) \\ K_2(\lambda L) & K_3(\lambda L) & K_1(\lambda(L-a)) \end{vmatrix} = 0.$$

Частотное уравнение получено с помощью функции `det` в пакете `linalg` системы Maple и на языке Maple записывается так:

$$\begin{aligned} D(q) := & -1/2 * \sinh(1/2 * q) * \cosh(1/2 * q) * \cos(1/2 * q)^2 - \\ & 1/4 * \sinh(1/2 * q)^3 * \cosh(1/2 * q) + 1/4 * \sinh(1/2 * q) * \cosh(1/2 * q)^3 - \\ & 1/4 * \sinh(1/2 * q) * \cosh(1/2 * q)^2 * \cos(1/2 * q) - \\ & 1/2 * \cos(1/2 * q) * \sinh(1/2 * q) + 3/4 * \sin(1/2 * q) * \cos(1/2 * q) * \cosh(1/2 * q)^2 - \\ & 1/4 * \sin(1/2 * q) * \cos(1/2 * q) * \sinh(1/2 * q)^2 - \\ & 1/2 * \sin(1/2 * q) * \sinh(1/2 * q)^2 * \cosh(1/2 * q) + 1/2 * \sin(1/2 * q) * \cosh(1/2 * q)^3 - \\ & 1/4 * \sin(1/2 * q) * \cos(1/2 * q) = 0; \end{aligned}$$

Уравнение решено графически с помощью функции `plot`. График зависимости $D = D(\lambda)$ для случая $a = L/2$ изображен на рисунке 2. Из графика следует, что $q_1 = 3,75$.

В связи с изменением координаты a режущего инструмента частота собственных колебаний меняется в пределах: от наименьшего значения $13,9875\sqrt{EJ/m_o L^4}$ при $a = L/4$ до $22,5675\sqrt{EJ/m_o L^4}$ при $a = L/2$; при $a = 0$ и $a = L$ частота первого тона равна $15,6025\sqrt{EJ/m_o L^4}$.

Рисунок 2 – График функции $D(q)$

Численный анализ показывает, что частота вращения вала ω при обработке мало влияет (в пределах 8 %) на частоту первого тона собственных колебаний, которая в этом случае [3] вычислялась по формуле

$$p_1 = \frac{\pi^2 \rho^2}{L^2} \cdot \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 + \left(1 + \frac{\pi^2 \rho^2}{L^2}\right) \frac{EJ}{m_o \rho^2}}}{1 - \frac{\pi^2 \rho^2}{L^2}},$$

где ρ – радиус инерции поперечного сечения вала; ω – угловая скорость его вращения. Если воздух рассматривать как упругое основание, то, как показывает численный анализ, частота собственных колебаний p_2 вычисленная по формуле [4]

$$p_2 = \sqrt{\frac{(4,73)^4 EJ}{L^4 m_o} + \frac{c}{m_o}},$$

мало зависит от коэффициента жесткости c упругого основания, но частота первого тона весьма мала и вычисляется по формуле $p_1 = \sqrt{c/m_o}$.

2. Изгибные колебания нежесткого вала в процессе обработки

При численном исследовании изгибных колебаний нежесткой заготовки с учетом упругого основания (воздушной среды) и произвольного положения режущего инструмента по длине заготовки дифференциальное уравнение вынужденных колебаний [4] без учета сил сопротивления имеет вид

$$m_o \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EJ_z \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + cW = P_r \delta(x-a),$$

где P_r – радиальная составляющая силы резания (в установившемся режиме обработки); $\delta(x-a)$ – дельта-функция, которая раскладывается в ряд по формам собственных колебаний, т.е.

$$\delta(x-a) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi vt}{L} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L},$$

где $a = vt$, v – скорость движения режущего инструмента вдоль заготовки.

Для численного анализа колебаний использовалось следующее решение уравнения, которое в данном случае учитывает только первую моду колебаний:

$$W(x,t) = \frac{2P_r}{m_o L} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{L} \left[\sin \frac{\pi v}{L} t - \frac{\frac{v\pi}{L} \cdot \sin \left(t \sqrt{\frac{EJ\pi^4}{L^4} + \frac{c}{m_o}} \right)}{\frac{EJ\pi^4}{L^4} + \frac{c}{m_o}} \right]}{\frac{EJ\pi^4}{L^4} + \frac{c}{m_o} - \left(\frac{\pi v}{L} \right)^2}.$$

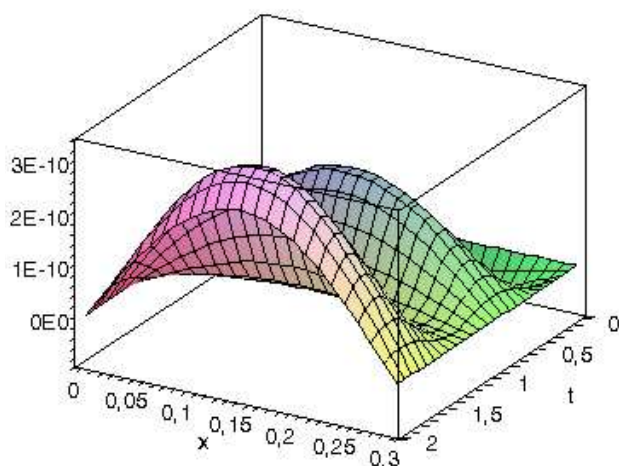


Рисунок 3 – График перемещения $W(x, t)$ заготовки

График, изображенный на рисунке 3, построен при $v = 0,002$ м/с и $P_r = 100$ Н.

Как следует из графика, с увеличением времени, т.е. соответственно с возрастанием координаты a , амплитуда колебаний увеличивается и максимальное ее значение достигается при $a = L/2$; в данном случае проявляет себя первая мода колебаний.

Выводы

1. При точении угловая скорость вращения обрабатываемой заготовки, как правило, существенно ниже частоты первого тона колебаний, т.е. критическая скорость вращения практически не достижима. При точении заготовок весьма малой жесткости возможен даже переход через резонанс (при

низкой частоте первого тона колебаний заготовки).

2. Определение частот собственных колебаний нежестких заготовок позволяет уточнить характер импульсного компенсирующего воздействия, обеспечивающего равный единице динамический коэффициент и устранение радиальных упругих перемещений заготовки от силы резания [6] в сечении, где приложена эта сила.

В перспективе предполагается исследование поведения различного типа нежестких заготовок при левитационном точении, в том числе – с использованием импульсного компенсирующего воздействия, учитывающего действительный (найденный на основании предложенного решения) спектр частот и нелинейную характеристику трения.

Библиографический список

1. Бохонский А.И. Устойчивость движения системы «резец–деталь» при левитационном точении / А.И. Бохонский, Е.В.Пашков, А.А. Вожгов // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. — Севастополь, 2001. — Вып. 7. — С. 3–8.
2. Бохонский А.И. Совершенствование динамической модели подсистемы «инструмент–деталь» при левитационном точении / А.И. Бохонский, Е.В. Пашков // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. — Севастополь, 2005. — Вып. 8. — С. 38–43.
3. Гробов В.А. Теория колебаний механических систем / В.А. Гробов. — К.: Выща шк., 1982. — 183 с.
4. Светлицкий В.А. Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стасенко. — М.: Высш. шк., 1973. — 454 с.
5. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1980. — 408 с.
6. Бохонский А.И. Импульсная компенсация упругих перемещений нежестких заготовок при автоматической токарной обработке / А.И. Бохонский, Е.В. Пашков, Л.А. Шмидт // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. — Севастополь, 2004. — Вып. 7. — С. 184–195.

Поступила в редакцию 3.09.2007 г.