

УДК 62-507

А.Т. Барабанов, профессор, д-р техн. наук,**А.Н. Балабанов***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua***ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ РИККАТИ ПО ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ОБЪЕКТА
УПРАВЛЕНИЯ**

Работа посвящена проблеме построения стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати (АУР) по частотным характеристикам объекта на основе четырехблочного представления резольвенты матрицы Гамильтона и матрицы линейной редукции АУР [1].

1. Введение. Методы линейно квадратической оптимизации (ЛКО) широко применяются в исследованиях и проектировании систем автоматического управления сложными техническими объектами. Как известно, центральное место в методах ЛКО занимает проблема построения стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати (СПАУР) – матричного квадратного уравнения, по решению которого формируются стабилизирующие обратные связи в оптимальной системе.

Известные методы решения этой проблемы [2] получили надёжное программное обеспечение в системе MatLab. Вместе с тем интерес к разработке новых подходов к проблеме СПАУР сохраняется. В настоящей статье предлагается возможная частотная версия метода резольвенты [1,3].

2. Постановка задачи. Пусть рассматривается линейный управляемый объект

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где вектор состояний $x(t) \in R^n$, вектор управлений $u(t) \in R^m$, матрицы A, B заданы.

Для объекта (1) оптимальное управление, минимизирующее функционал качества

$$J(u) = \int_0^{\infty} [x^T(t)Px(t) + u^T(t)Ru(t)] dt,$$

в котором матрицы $P \geq 0, R > 0$ задаются, определяется [2] соотношением

$$u(t) = -R^{-1}B^TKx(t),$$

где $n \times n$ – матрица K – стабилизирующее решение алгебраического уравнения Риккати

$$A^TK + KA + P - KQK = 0, \quad (2)$$

и $Q = BR^{-1}B^T$.

Напомним, решение уравнения (2) называется стабилизирующим, когда матрица $(A - QK)$ – гурвицева.

Предложенный в [1,3] метод резольвенты построения СПАУР рассматривается на основе рациональной $2n \times 2n$ -матрицы

$$\Theta(s) = (sI_{2n} - H)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \Pi(s) \quad (3)$$

– резольвенты матрицы Гамильтона $H = \begin{bmatrix} A & -Q \\ -P & -A^T \end{bmatrix}$.

В (3) $\Delta(s) = \det(sI_{2n} - H)$, $\Pi(s)$ – характеристический многочлен и присоединенная матрица соответственно. Предполагается, что спектр матрицы H не содержит точек на мнимой оси. В этом случае он образует кососимметрическое множество, т.е. $\Delta(-\lambda) = \Delta(\lambda)$, где λ – всякая точка спектра.

Для построения СПАУР в [1,3] вводится в рассмотрение вещественная матрица U , определённая соотношением

$$U = \frac{1}{2\pi j} \int_C \Theta(s) ds, \quad (4)$$

где контур интегрирования C охватывает все правые полюсы резольвенты, как на рисунке 1.

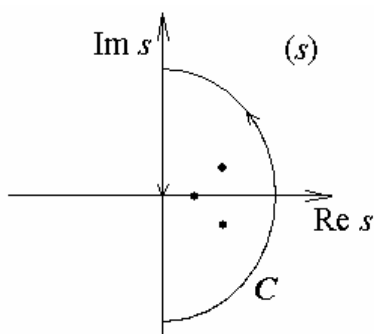


Рисунок 1 – Контур интегрирования C

При четырёхблочном с $n \times n$ блоками представлении резольвенты и соответствующим представлением матрицы (4)

$$\Theta(s) = \begin{bmatrix} \Theta_{11}(s) & \Theta_{12}(s) \\ \Theta_{21}(s) & \Theta_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

матрица U записывается в виде

$$U = [U_1 \quad U_2], \quad U_1 = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Наконец, в [1] показано, что СПАУР можно определить из линейного матричного уравнения

$$U \begin{bmatrix} I_n \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ K \end{bmatrix} = U_2 K + U_1 = 0,$$

в силу которого матрица U называется матрицей линейной редукции (МЛР), а само уравнение – уравнением линейной редукции (УЛР). Устанавливается [1], что если $\text{rank } U_2 = n$ (необходимое и достаточное условие), то решение УЛР единственное, симметрическое и определяет СПАУР.

В работе [3] предлагаются алгоритмы построения МЛР, основанные на представлениях (3), (4). Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы реализовать метод резольвенты на основе частотных характеристик объекта (1). Для этого следует показать, как можно построить МЛР по представлению (4) без использования правой части равенства (3).

3. Построение МЛР по частотной характеристики объекта. Для этого прежде всего блоки резольвенты предлагается определять прямо из тождества

$$\begin{bmatrix} sI_n - A & Q \\ P & sI_n + A^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \Theta_{11}(s) & \Theta_{12}(s) \\ \Theta_{21}(s) & \Theta_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

Записав это равенство в виде

$$\begin{bmatrix} sI_n - A & Q \\ P & sI_n + A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где под нулями подразумеваются нулевые $n \times n$ матрицы, по тождеству (7) можно выписать две пары уравнений для каждого из столбцов $\Theta_{11}(s)$, $\Theta_{21}(s)$ и $\Theta_{12}(s)$, $\Theta_{22}(s)$. Выполнив некоторые преобразования, получим следующие выражения

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{11}(s) &= (sI_n - A)^{-1} \left[I_n + Q(sI_n + A^T)^{-1} P(sI_n - A)^{-1} \right]^{-1}, \\ \Theta_{21}(s) &= -[sI_n + A^T]^{-1} P \Theta_{11}(s); \\ \Theta_{12}(s) &= -[sI_n - A]^{-1} Q \Theta_{22}(s), \\ \Theta_{22}(s) &= \left[I_n - (sI_n + A^T)^{-1} P(sI_n - A)^{-1} Q \right]^{-1} (sI_n + A^T)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Одна из искоемых матриц может быть принята в качестве основной, а остальные выражены через нее. В качестве основной матрицы возьмем $\Theta_{11}(s)$, тогда выражения (8) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{11}(s) &= (sI_n - A)^{-1} \left[I_n - Q(sI_n + A^T)^{-1} P(sI_n - A)^{-1} \right]^{-1}, \\ \Theta_{21}(s) &= -(sI_n + A^T)^{-1} P \Theta_{11}(s), \\ \Theta_{12}(s) &= (sI_n - A)^{-1} Q \Theta_{11}^T(-s), \\ \Theta_{22}(s) &= -\Theta_{11}^T(-s). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Если ввести матрицу передаточных функций $W(s) = (sI_n - A)^{-1}$, то соотношения (8) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{11}(s) &= W(s) \left[I_n + QW^T(-s)PW(s) \right]^{-1}, \\ \Theta_{21}(s) &= W^T(-s)P\Theta_{11}(s), \\ \Theta_{12}(s) &= W(s)Q\Theta_{11}^T(-s), \\ \Theta_{22}(s) &= -\Theta_{11}^T(-s). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Таким образом, по матрице частотных характеристик объекта $W(j\omega)$, можно определить и частотные представления $\Theta_{kr}(j\omega)$, следующее из (10), а затем и блоки U_{kr} МЛР.

Итак, вернёмся к определению МЛР (4). Из него при четырёхблочных представлениях матриц U и $\Theta(s)$ с учётом (5) следует

$$U_{kr} = \frac{1}{2\pi j} \int_C \Theta_{kr}(s) ds, \quad k, r \in \{1, 2\}. \quad (11)$$

Заметим, что для резольвенты справедливы следующие предельные соотношения

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\Theta_{11}(s) = I_n, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s\Theta_{12}(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s\Theta_{21}(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s\Theta_{22}(s) = I_n.$$

Поэтому устремляя радиус полуокружности контура C в (4), (11) к бесконечности, для компонент МЛР можно получить соотношения

$$\left. \begin{aligned} U_{11} &= \frac{1}{2} I_n - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}(\Theta_{11}(j\omega)) d\omega, \\ U_{12} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}(\Theta_{12}(j\omega)) d\omega, \\ U_{21} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}(\Theta_{21}(j\omega)) d\omega, \\ U_{22} &= I_n - U_{11}^T. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Интегралы в правых частях сходятся, так как элементы $\operatorname{Re}(\Theta_{ij}(j\omega))$ – строго правильные рациональные функции, которые при $\omega \rightarrow \infty$ сходятся к нулю не хуже, чем $\frac{1}{\omega^2}$.

На основе изложенного предлагается схема численных построений для вычисления элементов представления МЛР (12), реализованная на языке пакета MatLab, скрипт код которой с комментариями приведен в конце данного пункта. Численные данные взяты из задачи оптимизации бокового движения тяжёлого гражданского самолёта Боинг-747 при выходе на взлетно-посадочную полосу [4,5], а именно

$$A = \begin{bmatrix} -0,089 & -2,190 & 0,328 & 0,319 & 0 & 0 \\ 0,076 & -0,217 & -0,166 & 0 & 0 & 0 \\ -0,602 & 0,327 & -0,975 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,150 & 1,000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,000 & 0 & 0 & 0 & 2,210 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -0,0327 \\ 0,0264 & 0,151 \\ 0,227 & -0,0636 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,7921 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,1069 \end{bmatrix}.$$

По этим данным и указанной схеме найдена следующая матрица

$$K = \begin{pmatrix} 16,48 & 15,52 & 7,44 & 8,56 & 48,60 & 7,29 \\ 15,52 & 52,06 & 10,36 & 15,19 & 66,80 & 6,57 \\ 7,44 & 10,36 & 5,30 & 5,96 & 25,79 & 3,14 \\ 8,56 & 15,19 & 5,96 & 7,16 & 30,46 & 3,52 \\ 48,60 & 66,80 & 25,79 & 30,46 & 162,94 & 22,41 \\ 7,29 & 6,57 & 3,14 & 3,52 & 22,41 & 4,46 \end{pmatrix},$$

определяющая СРАУР. Спектр матрицы $A_* = A - BR^{-1}B^TK$ оптимальной системы показан на рисунке 2. Здесь же приведён спектр матрицы оптимальной системы, найденный с помощью стандартных средств MatLab-а синтеза линейно-квадратических регуляторов. Спектры обозначены как $eigs(A-QK)$ и $eigs(A-QK_{ml})$ соответственно, $Q = BR^{-1}B^T$. Они практически совпадают, что свидетельствует о точности и успешности численных построений СРАУР.

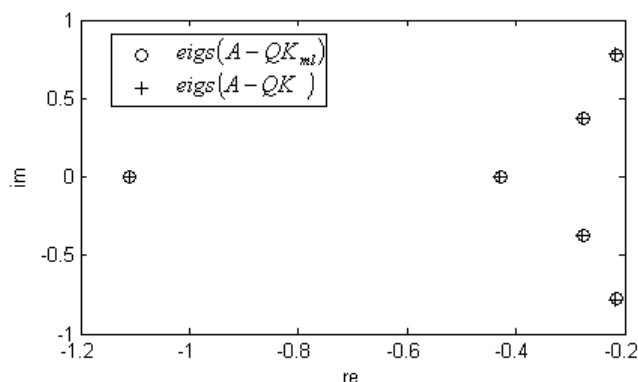


Рисунок 2 – Спектр оптимальной системы

Предлагается следующая программная реализация:

```
[A,B,P,R,n,m]= SetValues; %М. СООТВ. РАЗМЕРНОСТЕЙ, ПАРАМ. МОДЕЛИ И КРИТЕРИЯ
In= eye(n);
Q= B*inv(R)*B'; H=[A -Q; -P -A']; %МАТРИЦА ГАМИЛЬТОНА H
Ws= ss(A,In,In,0);
[reWjw,imWjw,w]= nyquist(Ws,{1e-3 1e20}); %ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТ. МАТР. ОБЪЕКТА
Wjw= reWjw+j*imWjw;
nr= size(w,1);
THETA11jw= zeros(n,n,nr); reTHETA11jw= zeros(n,n,nr);
reTHETA12jw= zeros(n,n,nr); reTHETA21jw= zeros(n,n,nr);
for i=1:nr
    THETA11jw(:, :, i)= inv(In+Wjw(:, :, i)*Q*conj(Wjw(:, :, i).')*P)*Wjw(:, :, i);
    reTHETA11jw(:, :, i)= real(THETA11jw(:, :, i));
    reTHETA12jw(:, :, i)= real( Wjw(:, :, i)*Q*conj(THETA11jw(:, :, i).') );
    reTHETA21jw(:, :, i)= real( conj(Wjw(:, :, i).')*P*THETA11jw(:, :, i) );
end;
%ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОВБСТВ. ИНТЕГРАЛА, ВЫЧИСЛЕНИЕ МЛР
U11= 1/2 * In - 1/pi * trapz(w,reTHETA11jw,3);
U12= -1/pi * trapz(w,reTHETA12jw,3);
U21= -1/pi * trapz(w,reTHETA21jw,3);
U22= In-U11';
```

```
U1= [U11;U21]; U2= [U12;U22];  
K= -inv(U2'*U2)*U2'*U1; K= 0.5*(K+K'); %ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УЛР
```

4. Заключение. Предложенная методика позволяет построить СРАУР по частотным характеристикам объекта управления, заданного моделью пространства состояний. Таким образом расширяется применение частотных характеристик объекта управления в общей проблеме проектирования системы управления, включающей задачи анализа и синтеза системы частотными методами. Предложенная вычислительная схема показала достаточную эффективность при решении практической задачи управления летательным аппаратом. Результаты получены, как показано выше, с высокой точностью. Схема реализуется на основе стандартных функций MatLab-a. Представляет интерес в дальнейшем анализ её главных компонент и их связи со свойствами процесса управления.

Библиографический список

1. Барабанов А.Т. Стабилизирующее решение алгебраического уравнения Риккати. Метод резольвенты / А.Т. Барабанов // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 3. — С. 20–31.
2. Кватернак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Кватернак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
3. Барабанов А.Т. Алгоритмы построения стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати на основе его линейной редукции в задачах аналитического конструирования регуляторов / А.Т. Барабанов // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 6. — С. 53–68.
4. Брайсон А.Е. Новые идеи по теории управления / А.Е. Брайсон // Аэрокосмическая техника. — 1986. — № 8. — С. 31–42.
5. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский. — М.: Высш. шк., 1989. — 447 с.

Поступила в редакцию 24.09.2008 г.