

УДК 681.5

А.Т. Барабанов, профессор, д-р техн. наук,**А.С. Лисогурский, аспирант***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: lisogurskiy@mail.ru***ПОСТРОЕНИЕ СЕКТОРОВ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ
УПРАВЛЕНИЯ БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ**

Рассматривается задача анализа абсолютной устойчивости нелинейной системы управления боковым движением летательного аппарата. Для построения секторов абсолютной устойчивости при дифференцируемых аэродинамических нелинейностях применяются частотный и полиномиальный подходы.

Введение. Пусть рассматривается нелинейная система с одномерным нелинейным блоком

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + by, \quad x \in R^n, \quad y \in R^1; \\ y &= \varphi(\sigma), \quad \sigma = c^T x, \quad \sigma \in R^1, \quad c \in R^n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $y = \varphi(\sigma)$ – дифференцируемая нелинейная функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = 0$, $K_1 \leq \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leq K_2$. Модель системы (1) в форме структурной схемы изображена на рисунке 1.

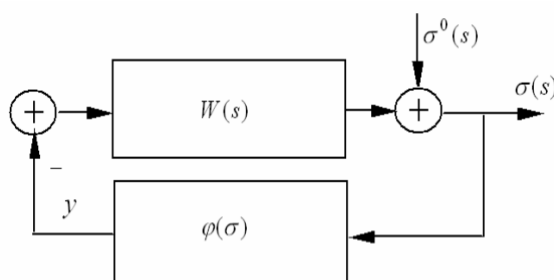


Рисунок 1 – Структурная схема нелинейной системы

На рисунке 1 $W(s) = -c^T (sI - A)^{-1} b$ – передаточная функция линейной части системы.

Частотный критерий абсолютной устойчивости для систем с дифференцируемыми нелинейностями (В.А. Якубович, [1]) формулируется следующим образом.

Теорема. Пусть при некоторой линейной функции $\varphi(\sigma) = K\sigma$, $K_1 \leq K \leq K_2$ система (1) асимптотически устойчива. Если при некоторых числах θ , $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, $\tau_1 + \tau_2 > 0$ и всех $\omega: -\infty < \omega < \infty$ выполняется частотное неравенство

$$\operatorname{Re}\{[1 + K_1 W(-j\omega)][1 + K_2 W(j\omega)]\} + \frac{\theta}{\tau_1 + \tau_2 \omega^2} \operatorname{Re}[j\omega W(j\omega)] > 0, \quad (2)$$

то рассматриваемая система абсолютно устойчива.

Заметим, что из указанного условия на производную функции $\varphi(\sigma)$ следует, что также выполняется неравенство

$$K_1 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq K_2.$$

Поскольку класс линейных функций $\varphi(\sigma) = K\sigma$ содержится в классе указанных дифференцируемых функций, необходимо, чтобы интервал $K_1 \leq K \leq K_2$ содержался в интервале асимптотической устойчивости системы, представленной на рисунке 1 при $\varphi(\sigma) = K\sigma$. Посылка теоремы в таком случае выполняется.

Очевидно [1,2], что в критерии (2) можно ограничиться лишь значениями $\theta \in \{0, 1, -1\}$. Существуют геометрические приемы [1] проверки частотного условия (2), а также определения

наибольшего значения K_2 (при заданном K_1), для которого выполняется (2). Тем не менее, практическая реализация критерия (2) для систем с дифференцируемой нелинейностью достаточно затруднительна. Более простой для практического использования является частотная теорема Воронова [2], дающая достаточные условия выполнения частотного неравенства (2). Кроме того, к анализу частотных условий абсолютной устойчивости может быть применен полиномиальный подход [3], что в определенных отношениях упрощает компьютерную реализацию частотного критерия абсолютной устойчивости, а также позволяет использовать в полной мере потенциальные возможности критерия (2).

Целью данной статьи является разработка компьютерно-ориентированной методики анализа условия абсолютной устойчивости (2) для систем с дифференцируемым нелинейным блоком. В качестве практической выбрана задача анализа системы управления боковым движением летательного аппарата (ЛА) в режиме захода на посадку. Для указанной системы выполняется построение секторов абсолютной устойчивости с помощью частотной теоремы Воронова [2], а так же на основе применения критерия (2) в полиномиальной форме [3].

1. Математическая модель управления ЛА. Дифференциальные уравнения бокового движения ЛА при известных допущениях могут быть приняты в виде [4]

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \frac{G}{mV} \gamma \cos \vartheta - \omega_x \sin \alpha - \omega_y \cos \alpha + \frac{1}{mV} Z^\beta(\beta) + \frac{1}{mV} Z^{\delta_H}(\delta_H) + Z_\epsilon, \\ \dot{\omega}_y = \frac{1}{J_y} (M_y^\beta(\beta) + M_y^{\omega_x}(\omega_x) + M_y^{\omega_y}(\omega_y) + M_y^{\delta_\vartheta}(\delta_\vartheta) + M_y^{\delta_H}(\delta_H)) + M_{y\epsilon}, \\ \dot{\omega}_x = \frac{1}{J_x} (M_x^\beta(\beta) + M_x^{\omega_x}(\omega_x) + M_x^{\omega_y}(\omega_y) + M_x^{\delta_\vartheta}(\delta_\vartheta) + M_x^{\delta_H}(\delta_H)) + M_{x\epsilon}, \\ \dot{\gamma} = \omega_x - \omega_y \tan \vartheta, \\ \dot{\psi} = \frac{\omega_y}{\cos \vartheta}, \\ \dot{z} = V \sin(\psi - \beta). \end{cases} \quad (3)$$

В уравнениях (3): m, J_x, J_y – масса и моменты инерции ЛА; V – скорость; ϑ – угол тангажа; α – угол атаки в балансировочном режиме горизонтального движения в вертикальной плоскости; δ_ϑ – угол отклонения элеронов; δ_H – угол отклонения руля направления; γ – угол крена; φ – угол касательной траектории ($\varphi = \psi - \beta$); β – угол скольжения; ψ – угол рыскания; ω_x – угловая скорость крена; ω_y – угловая скорость рыскания; $v = -V\beta$ – скорость бокового скольжения; z – боковое перемещение. Символ вида $F^\sigma(\sigma)$ означает нелинейную функцию σ , будем говорить нелинейность, из множества переменных уравнения (3). Если функция $F^\sigma(\sigma)$ допускает линейное представление, то можно записать $F^\sigma(\sigma) = F^\sigma \sigma$, где F^σ – коэффициент линеаризации. $Z_\epsilon, M_{x\epsilon}, M_{y\epsilon}$ – возмущающие воздействия внешней среды.

В слабозмущенном движении ЛА в первом приближении для всех указанных функций (нелинейностей) можно принять их линейное представление. Тогда будет иметь место линейная модель бокового движения ЛА

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \frac{G}{mV} \gamma \cos \vartheta - \omega_x \sin \alpha - \omega_y \cos \alpha + \frac{1}{mV} Z^\beta \beta + \frac{1}{mV} Z^{\delta_H} \delta_H + Z_\epsilon, \\ \dot{\omega}_y = \frac{1}{J_y} (M_y^\beta \beta + M_y^{\omega_x} \omega_x + M_y^{\omega_y} \omega_y + M_y^{\delta_\vartheta} \delta_\vartheta + M_y^{\delta_H} \delta_H) + M_{y\epsilon}, \\ \dot{\omega}_x = \frac{1}{J_x} (M_x^\beta \beta + M_x^{\omega_x} \omega_x + M_x^{\omega_y} \omega_y + M_x^{\delta_\vartheta} \delta_\vartheta + M_x^{\delta_H} \delta_H) + M_{x\epsilon}, \\ \dot{\gamma} = \omega_x - \omega_y \tan \vartheta, \\ \dot{\psi} = \frac{\omega_y}{\cos \vartheta}, \\ \dot{z} = V \psi - V \beta. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь также принято, что $\sin(\psi - \beta) = \psi - \beta$. Балансировочные углы ϑ, α заданы.

Линеаризованную модель бокового движения ЛА (4) можно записать в терминах пространства состояний

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad A \in R^{6 \times 6}, \quad B \in R^{6 \times 2}. \quad (5)$$

Здесь $x = [\nu \quad \omega_y \quad \omega_x \quad \gamma \quad \psi \quad z]^T$ – вектор состояний; $\nu = -V\beta$ – параметр (скорость) бокового скольжения; $u = [\delta_\gamma \quad \delta_H]^T$ – вектор управлений; f – вектор внешних возмущений; матрицы A, B соответствуют уравнениям (4).

Задача управления тяжелым гражданским самолетом «Boeing 747» в автоматическом режиме выхода на взлетно-посадочную полосу (ВПП) рассмотрена в [4] (см. также [5]) для линейной модели бокового движения (4), (5) с матрицами A, B , соответствующими аэромеханическими характеристиками указанного самолета в конфигурации, используемой при посадке. По данным [4] примем

$$A = \begin{bmatrix} -0,089 & -2,190 & 0,328 & 0,319 & 0 & 0 \\ 0,076 & -0,217 & -0,166 & 0 & 0 & 0 \\ -0,602 & 0,327 & -0,975 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,150 & 1,000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,000 & 0 & 0 & 0 & 2,210 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0,0264 & 0,2270 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0327 & 0,510 & -0,0636 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Закон управления в [4] предложен в виде оптимальной обратной связи $u(t) = -Gx(t)$, где матрица коэффициентов обратной связи G определяется путем решения задачи линейно-квадратической оптимизации (ЛКО). Минимизируемый функционал определяется как

$$I = \int_0^\infty (x(t)^T Px(t) + 2x(t)^T Lu(t) + u(t)^T Ru(t)) dt,$$

где

$$P = \begin{bmatrix} 0,7921 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,1069 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0,291 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате решения задачи ЛКО матрица коэффициентов обратной связи найдена как

$$G = \begin{bmatrix} 1,9506 & 3,5831 & 1,4375 & 1,6882 & 7,3767 & 0,8656 \\ 1,2301 & 6,3838 & 0,7931 & 1,4163 & 6,0440 & 0,4760 \end{bmatrix}.$$

Отправляясь от решения этой задачи управления, можно рассмотреть влияние отдельных нелинейностей в уравнениях динамики (3) на процесс управления ЛА с указанным законом управления. Устраняя в линейной модели (5) элемент $a_{km}x_m$, введем в рассмотрение систему вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_*x + by, \quad (6)$$

где этот элемент замещен нелинейностью $y = \varphi(\sigma) = F^\sigma(\sigma)$; $\sigma = c^T x$, $c = [0 \dots 010 \dots 0]^T$ (единица стоит на m -ой позиции); $b = \pm[0 \dots 010 \dots 0]^T$ (единица стоит на k -ой позиции); $A_* = A_0 - BG$, матрица A_0 получена из матрицы A замещением $a_{km} = 0$.

Применяя к системе (6) преобразование Лапласа, получим

$$\begin{aligned} x(s) &= (sI - A_*)^{-1}by(s) + (sI - A_*)^{-1}x(0), \\ \sigma(s) &= -W(s)y(s) + \sigma^0(s), \quad \sigma^0(s) = (sI - A_*)^{-1}x(0). \\ W(s) &= -c^T (sI - A_*)^{-1}b. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, исследуемая система приведена к виду, изображенному на рисунке 1.

Пусть объектом анализа является аэродинамическая характеристика $M_x^\beta(\beta)$. Поскольку в системе (6) переменная β заменена на параметр скольжения $v = -V\beta$, то в этом случае необходим переход к преобразованной характеристике $\hat{M}_x^\beta(v) = M_x^\beta(-\frac{1}{V}v)$. Другими словами за нелинейность в модели (6) принимается $\varphi(v) = \frac{1}{J_x} \hat{M}_x^\beta(v)$. Кроме того, следует принять $c = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $b = -[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Тогда модель (6) при $y = K\sigma$, $K = 0,602$ переходит в линейную модель (5) с указанной выше матрицей A и законом управления. При этом график функции $\varphi(\sigma)$ будет принадлежать первому и третьему квадрантам. Будем далее рассматривать задачу построения сектора абсолютной устойчивости для указанной нелинейности.

Передаточная функция (7) при указанных данных найдена как

$$W(s) = \frac{0,354s^4 + 1,46s^3 + 1,3s^2 + 0,416s + 0,0676}{s^6 + 2,58s^5 + 2,93s^4 + 1,71s^3 + 0,549s^2 + 0,167s + 0,0227}.$$

2. Построение секторов абсолютной устойчивости системы управления боковым движением ЛА. В целях простоты формулировок примем, что $K_1 = 0$, $K_2 = K$. Таким образом, в рассматриваемой задаче имеет место условие

$$\varphi(0) = 0, \quad 0 \leq \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leq K. \quad (8)$$

Для анализа необходимых условий абсолютной устойчивости положим $y = K\sigma$. Тогда получаем следующую линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = Mx,$$

где $M = A_* + bKc^T$.

Выделим область значений K , при которых матрица M будет гурвицевой. Характеристический многочлен матрицы M определяется как

$$\Delta(s, K) = \det(sI - M) = KA(s) + B(s),$$

где $A(s) = 0,35s^4 + 1,46s^3 + 1,30s^2 + 0,417s + 0,0675$; $B(s) = s^6 + 2,58s^5 + 2,93s^4 + 1,72s^3 + 0,552s^2 + 0,168s + 0,0229$.

Воспользовавшись алгоритмом D-разбиения по одному параметру (рисунок 2), получаем следующий интервал асимптотической устойчивости линейной системы:

$$-0,06 < K < 2,349. \quad (9)$$

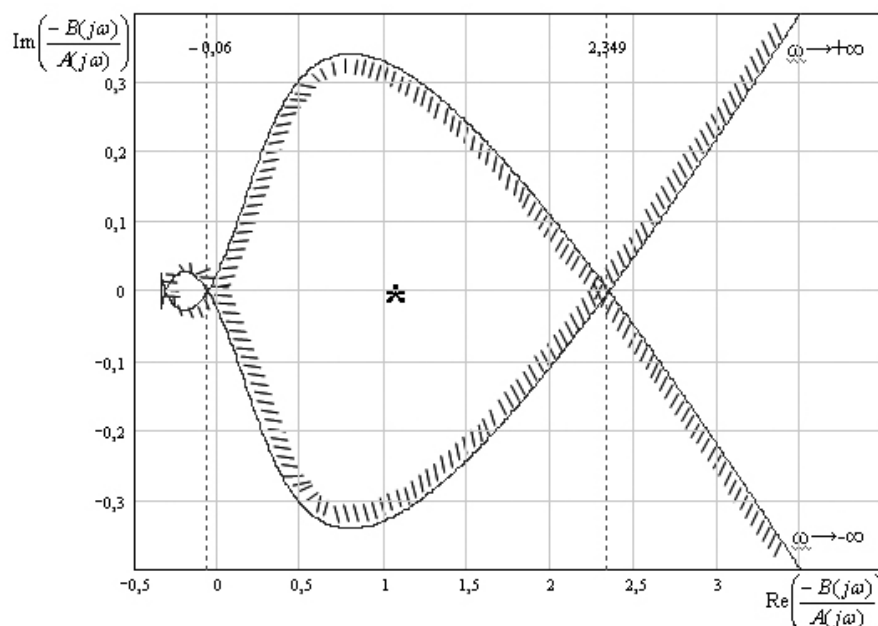


Рисунок 2 – D-разбиение по одному параметру

Теперь рассмотрим применение в рассматриваемой задаче следующего утверждения.

Теорема [2]. «Пусть $\varphi(\sigma)$ – стационарная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (9), а передаточная функция $W(s)$ линейной части не вырождена, т.е. имеет тот же порядок знаменателя, что и матрица A , и все полюсы $W(s)$ расположены в левой полуплоскости. Пусть частотная характеристика $W(j\omega)$ удовлетворяет условиям

а) $W(0) > 0$;

б) при возрастании $\omega \geq 0$ характеристика $W(j\omega)$ пересекает отрицательную вещественную ось в одном направлении – снизу вверх;

в) для некоторого числа θ и для всех $\omega \geq 0$ выполняется условие

$$\frac{1}{K} + \operatorname{Re} W(j\omega) - \theta \operatorname{Im} W(j\omega) > 0; \quad (10)$$

г) могут существовать значения $\omega \geq 0$, при которых $\operatorname{Re} W(j\omega) = -1/K$. Если такие значения ω существуют, то обозначим через ω_1 и ω_2 минимальное и максимальное среди них. Пусть характеристика $W(j\omega)$ обладает свойством $\theta \operatorname{Im} W(j\omega) \leq 0$ при $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$.

Тогда рассматриваемая система абсолютно устойчива».

Из теоремы Воронова вытекает весьма интересный для практики вывод: для исследования устойчивости систем с одной стационарной неубывающей нелинейностью, удовлетворяющей условиям (3), и линейной частью, удовлетворяющей условиям а), б) теоремы, условия абсолютной устойчивости получаются непосредственно по кривой Найквиста $W(j\omega)$, которая в данном случае должна располагаться правее относительно прямой Попова. Однако это условие является лишь достаточным для выполнения условия (2).

Частотный годограф $W(j\omega)$ для передаточной функции линейной части системы $W(s)$ (7) изображен на рисунке 3.

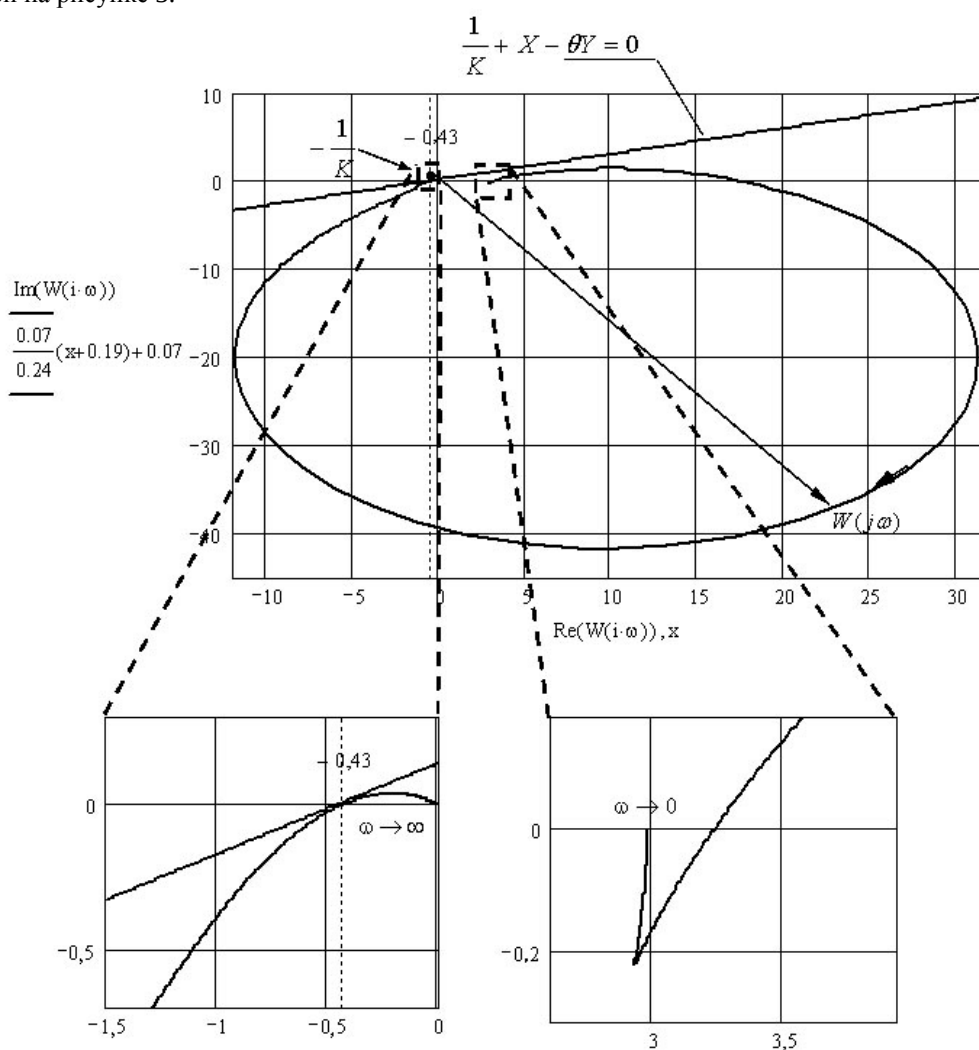


Рисунок 3 – Частотный годограф $W(j\omega)$

Для получения сектора абсолютной устойчивости необходимо для различных значений K из (9) проверить выполнение условий теоремы Воронова. Из рисунка 3 видно, что условия а), б) теоремы выполняются. Выполняются также и частотные условия в), г) с сектором $0 < K < 1/0,43 = 2,32$.

Для применения полиномиального подхода следует от частотных неравенств перейти к эквивалентным полиномиальным неравенствам, рассматриваемым на вещественной отрицательной полуоси. Для этого воспользуемся следующими положениями [3].

Пусть

$$W(s) = p(s)/q(s),$$

$$p(s) = b_0 s^m + \dots + b_{m-1} s + b_m, \quad q(s) = a_0 s^n + \dots + a_{n-1} s + a_n,$$

где $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, n > m$.

Для частотных характеристик $P(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega), Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega), M^2(\omega) = |W(j\omega)|^2$ воспользуемся представлениями $P(\omega) = \frac{1}{2}[W(j\omega) + W(-j\omega)], Q(\omega) = \frac{1}{2j}[W(j\omega) - W(-j\omega)],$

$M^2(\omega) = W(j\omega)W(-j\omega)$, из которых при $x = -\omega^2$ следует

$$P(\omega) = A(x)/D(x), \quad \omega Q(\omega) = B(x)/D(x), \quad M^2(\omega) = d(x)/D(x),$$

$$A(s^2) = \frac{1}{2}[p(s)q(-s) + p(-s)q(s)] = \text{чет } p(s)q(-s),$$

$$B(s^2) = \frac{1}{2}[(-s)p(s)q(-s) + sp(-s)q(s)] = \text{чет } (-s)p(s)q(-s),$$

$$D(s^2) = q(s)q(-s) = \text{чет } (s)q(-s), \quad d(s^2) = p(s)p(-s) = \text{чет } p(s)p(-s),$$

где $\text{чет}(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots) = a_0 + a_2 s^2 + \dots$.

Если многочлены $p(s)$ и $q(s)$ записать в виде

$$p(s) = u(s^2) + sv(s^2), \quad q(s) = U(s^2) + sV(s^2),$$

где

$$u(x) = b_m + b_{m-2}x + b_{m-4}x^2 + \dots; \quad v(x) = b_{m-1} + b_{m-3}x + b_{m-5}x^2 + \dots;$$

$$U(x) = a_n + a_{n-2}x + a_{n-4}x^2 + \dots; \quad V(x) = a_{n-1} + a_{n-3}x + a_{n-5}x^2 + \dots,$$

то нетрудно получить

$$A(x) = u(x)U(x) - xv(x)V(x), \quad B(x) = x[u(x)V(x) - v(x)U(x)],$$

$$D(x) = U^2(x) - xV^2(x), \quad d(x) = u^2(x) - xv^2(x).$$

Выполнив элементарные операции в неравенстве (2) и воспользовавшись представлениями (11) – (14), частотному неравенству абсолютной устойчивости (2) нетрудно придать равносильный полиномиальный вид [3]

$$\pi(x) = (\tau_1 - \tau_2 x)G(x) - \theta B(x) > 0, \quad x \leq 0,$$

где $G(x) = D(x) + (K_1 + K_2)A(x) + K_1 K_2 d(x)$.

Вещественные отрицательные корни многочленов определяют далее свойства функций, рассматриваемых при анализе неравенств.

Имеет место следующее исходное утверждение [3].

Лемма. Если неравенство (15), $\tau_1 > 0$ выполняется при $\theta \neq 0$, то а) верно неравенство

$$G(0) > 0;$$

б) для всех различных вещественных отрицательных корней $\beta_i, i = 1, 2, \dots$ многочлена $B(x)$

$$G(\beta_i) > 0, \quad i = 1, 2, \dots;$$

в) для всех различных вещественных отрицательных корней $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, l$ многочлена $G(x)$

$$B(\gamma_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad \text{либо} \quad B(\gamma_i) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

Для дальнейшего анализа неравенства (15) вводится в рассмотрение рациональная функция $r(x) = B(x)/G(x)$. Тогда неравенство (15) принимает вид

$$\pi(x) = G(x)[\tau_1 - \tau_2 x - \theta r(x)] > 0, \quad x \leq 0. \quad (19)$$

Нумерацию корней примем далее в порядке их убывания. Пусть выполняются условия леммы и $B(\gamma_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, l$. В противном случае можно заменить θ на $(-\theta)$. Будем рассматривать сужения функции $r(x)$ на интервалы, определяемые ее точками разрыва, – ветви функции. Это будут ветви $r_i^+(x)$, $r_i^-(x)$ с положительными и отрицательными бесконечными значениями соответственно. Первые определены в интервалах (γ_{i+1}, γ_i) отрицательности, а вторые – положительности $G(x)$. Значения $r_i^+(x) > 0$, а значения $r_i^-(x)$ могут быть и разных знаков, – когда многочлен $B(x)$ меняет знак в указанном интервале. Поскольку γ_1 принадлежит интервалу отрицательности $B(x)$ и так как $G(0) > 0$, $G(\gamma_1 + 0) > 0$, а $B(\gamma_1) < 0$, то $r(\gamma_1 + 0) = -\infty$. Следовательно, начальная ветвь получает обозначение $r_0^-(x)$. Когда интервал $(\beta_1, 0)$ – интервал отрицательности $B(x)$ (годограф от начальной точки $W(j0)$ идет вниз, то есть $Q(0+) < 0$ и $B(-0) < 0$), содержащий корни $G(x)$, то $r_0^-(x) < 0$, $\gamma_1 < x < 0$. Когда же первым интервалом отрицательности, содержащим корни $G(x)$, является, например, интервал (β_2, β_1) , то $r_0^-(x) > 0$ при $\beta_1 < x \leq 0$ и $r_0^-(x) < 0$ при $\gamma_1 < x < \beta_1$. Для последней ветви (слева от прямой $x = \gamma_L$) имеем $G(\gamma_L - 0) > 0$, так как $G(-\infty) > 0$ и $B(\gamma_L) < 0$. Значит, для этой ветви следует принять обозначение $r_L^-(x)$. Отметим также, что $r_L^-(x) = 0$ при $m < n - 1$ или конечному значению при $m = n - 1$. Ветвь $r_L^-(x)$ всегда имеет горизонтальную асимптоту. Экстремальные значения ветвей определяются корнями многочлена

$$E(x) = G'(x)B(x) - G(x)B'(x).$$

В рассматриваемом случае ($G(x) = 0$, $x = \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, l$; $B(\gamma_i) < 0$) неравенство (15) будет выполняться при $\theta > 0$. Следовательно, неравенству (15) можно придать равносильный вид

$$G(x)[\delta - \alpha x - r(x)] > 0, \quad (20)$$

где $\delta = \tau_1/\theta \geq 0$, $\alpha = \tau_2/\theta \geq 0$.

Будем рассматривать прямые

$$y = -\alpha x + \delta. \quad (21)$$

Очевидно, что всякая прямая вида (21) делит плоскость (x, y) на две полуплоскости D^+ , D^- сверху и снизу от прямой соответственно.

Пусть прямая (21) разделяет ветви функции $r(x)$, когда все ветви $r_i^+(x)$ принадлежат полуплоскости D^+ , а все ветви $r_i^-(x)$ – полуплоскости D^- . Для разделяющей прямой необходимо $\alpha \geq 0$, т.к. в противном случае прямая вида (21) пересекает ветвь $r_L^-(x)$.

В множестве прямых (21) выделим касательные прямые к ветвям функции $r(x)$ следующим образом. Параметры касательной из точки $(0, \delta)$ к кривой $r(x)$ x_* и α_* определяют равенства

$$\begin{aligned} -\alpha_* &= r'(x_*), \\ -\alpha_* x_* + \delta &= r(x_*), \end{aligned}$$

где $r'(x) = dr(x)/dx$. Поскольку $r(x) = B(x)/G(x)$ и $r'(x) = -E(x)/G^2(x)$, то корни x_* (абсциссы точек касания) многочлена

$$F(x) = -xE(x) + \delta G^2(x) - B(x)G(x), \quad (22)$$

в заданном интервале (γ_{i+1}, γ_i) , $i \in \{1, 2, \dots, L\}$, $\gamma_{L+1} = -\infty$ определяют касательные прямые к ветви $r(x)$ в этом интервале.

Для всякого корня γ_k многочлена $G(x)$ имеем $F(\gamma_k) = -\gamma_k B(\gamma_k) G'(\gamma_k)$. Поэтому во всяком интервале (γ_{i+1}, γ_i) , определяемом соседними корнями $G(x)$ нечетной кратности, многочлен (22) имеет, по крайней мере, один корень, так как на концах указанного интервала его значения разных знаков.

Пусть $\alpha_{\min}^+$ и $\alpha_{\max}^-$ – наименьшее и наибольшее значение при заданном $\delta \geq 0$ среди значений параметра α_i , касательных прямых из точки $(0, \delta)$ к ветвям $r_i^+(x)$ и $r_i^-(x)$ соответственно. Имеет место следующее утверждение.

Теорема [3]. Пусть выполняются условия леммы и $B(\gamma_i) < 0$, $i \in \{1, 2, \dots, L\}$. Тогда

- 1) для выполнения неравенства (20) необходимо и достаточно, чтобы в плоскости (x, y) существовала разделяющая прямая (21);
- 2) для выполнения неравенства (22) необходимо и достаточно существование такого $\delta \geq 0$, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \leq \alpha_{\max}^- < \alpha < \alpha_{\min}^+.$$

Здесь 1), 2) – равносильные геометрическая и аналитическая формы утверждения.

Проиллюстрируем выполнение условий теоремы на примере системы управления боковым движением ЛА с нелинейностью $M_x^\beta(\beta)$. Многочлены (11) определяются следующим образом:

$$A(x) = 0,354x^5 - 1,43x^4 + 0,436x^3 - 3,54 \cdot 10^{-2}x^2 - 2,85 \cdot 10^{-3}x + 1,535 \cdot 10^{-3};$$

$$B(x) = -0,547x^5 - 0,735x^4 + 0,436x^3 + 7,12 \cdot 10^{-2}x^2 + 1,85 \cdot 10^{-3}x;$$

$$d(x) = 0,125x^4 - 1,21x^3 + 0,523x^2 + 2,7 \cdot 10^{-3}x + 4,57 \cdot 10^{-3};$$

$$D(x) = x^6 - 0,796x^5 + 0,859x^4 - 0,523x^3 - 0,137x^2 - 2,96 \cdot 10^{-3}x + 5,15 \cdot 10^{-4}.$$

Из интервала (9) выберем $K = 0,5$. Геометрическая интерпретация теоремы представлена на рисунке 4.

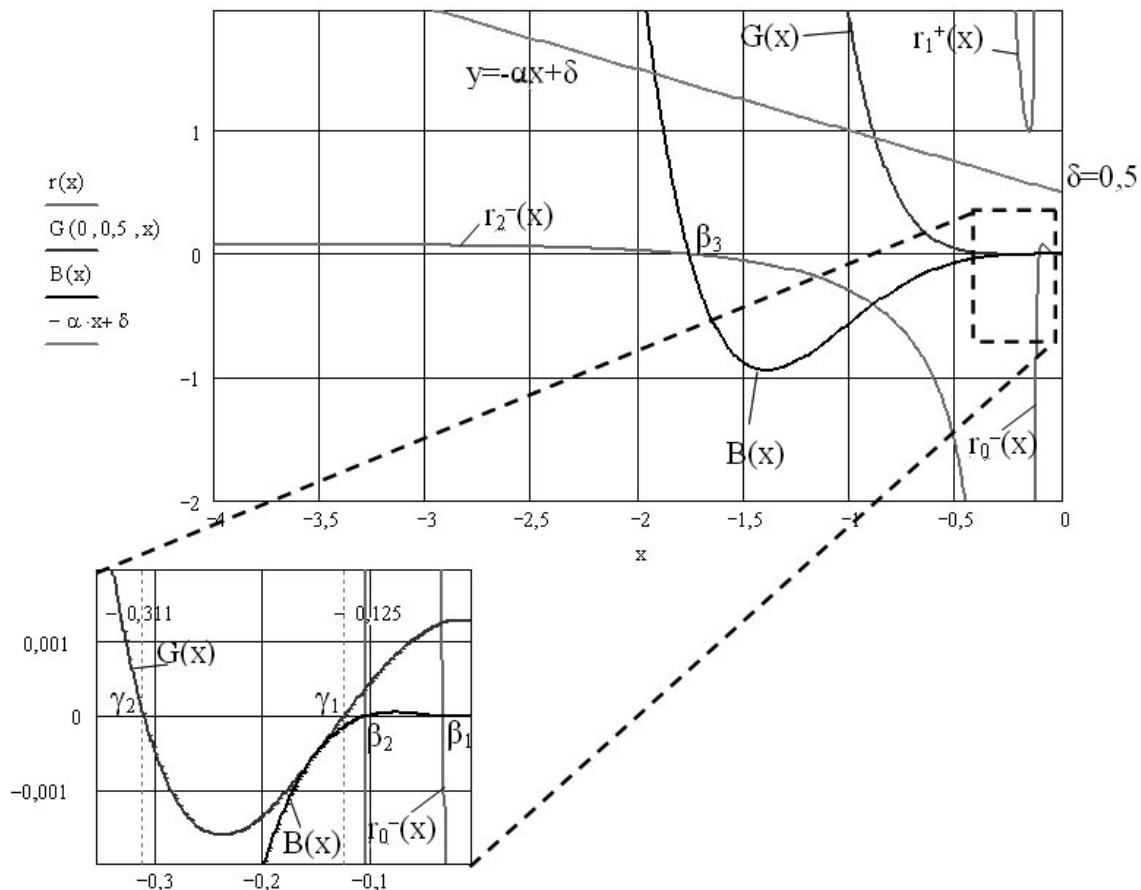


Рисунок 4 – Многочлены $G(x)$, $B(x)$, ветви функции $r(x)$ и разделяющая прямая (21)

Из рисунка видно, что разделяющая прямая (21) существует, следовательно, система абсолютно устойчива.

Теперь применим аналитическую интерпретацию теоремы. При анализе неравенств (19), (20) можно выделить частные случаи:

- а) многочлен $G(x)$ не меняет знака на полупрямой $x \leq 0$, т.е. $G(0) > 0$, $\rho^-(G) = 0$, где ρ^- – число всех различных отрицательных корней многочлена $G(x)$. Тогда неравенство (20) выполняется, например, при $\delta = r_{\max}$, $\alpha > 0$ (функция $r(x)$ не имеет разрывов и ограничена);

б) многочлен $B(x)$ не меняет знака на полупрямой $x \leq 0$, т.е. $\rho^-(B) = 0$. Тогда неравенство (2-) выполняется, например, при $0 < \delta < r_{\min}^+$, $\alpha = 0$ (ветви $r^+(x) > 0$, ветви $r^-(x) < 0$).

В общем случае (каждый из многочленов $G(x)$, $B(x)$ меняет знак на полупрямой $x \leq 0$) выполняется проверка условия существования разделяющей прямой (21).

Используя полученные выше многочлены и принимая $K = 0,5$, вычисляем

$$G(0) = D(0) + KA(0) = 1,283 \cdot 10^{-3} > 0;$$

все различные отрицательные корни $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, l$ многочлена $G(x)$ (функция roots Matlab)

$$\gamma_1 = -0,125; \quad \gamma_2 = -0,311;$$

все различные отрицательные корни $\beta_i, i = 1, 2, \dots$ многочлена $B(x)$

$$\beta_1 = -0,033; \quad \beta_2 = -0,106; \quad \beta_3 = -1,756;$$

значения $G(\beta_i) > 0, i = 1, 2, \dots$

$$G(\beta_1) = 42,044; \quad G(\beta_2) = 3,66 \cdot 10^{-4}; \quad G(\beta_3) = 1,27 \cdot 10^{-3};$$

значения $B(\gamma_i)$

$$B(\gamma_1) = -0,012; \quad B(\gamma_2) = -1,33 \cdot 10^{-4}.$$

Все условия леммы выполняются. Поскольку многочлены $G(x)$ и $B(x)$ меняют свой знак на отрицательной полуоси, имеет место общий случай анализа полиномиального критерия абсолютной устойчивости. Далее выделяем интервалы ветвей $r_2^-(x)$, $r_1^+(x)$, $r_0^-(x)$ функции $r(x)$. В нашем случае это будут $(-\infty, \gamma_2)$, (γ_2, γ_1) , $(\gamma_1, 0)$ соответственно. Задавшись значением $\delta = 0,5$, вычисляем вещественные отрицательные корни многочлена (22) $x_*^i, i = 1, 2, \dots$: $x_*^1 = -1,107$; $x_*^2 = -0,149$, а по ним значения $\alpha_* = E(x_*)/G^2(x_*)$ для ветвей $r_1^+(x)$, $r_0^-(x)$ соответственно: $\alpha(x_*^1) = 3,334$; $\alpha(x_*^2) = -0,645$; наконец выделяем значения $\alpha_{\min}^+$ и $\alpha_{\max}^-$, учитывая асимптоту $r_2^-(x)$: $\alpha_{\max}^- = 0$; $\alpha_{\min}^+ = 3,334$. Условие $\alpha_{\max}^- < \alpha_{\min}^+$ выполняется. Следовательно, рассматриваемая система абсолютно устойчива.

Компьютерная реализация рассмотренной вычислительной процедуры реализована в математических пакетах Matlab и MathCad. При этом выбор значений неопределенного параметра δ осуществляется простым перебором. Предложенный алгоритм позволяет выделить в области параметров системы (в частности, коэффициентов секторов нелинейностей) область абсолютной устойчивости (область выполнения критерия (2)). Так для рассматриваемой системы управления боковым движением ЛА с нелинейностью $M_x^\beta(\beta)$, получен сектор абсолютной устойчивости $0 < K < 2,349$.

Заключение. Рассмотрены два подхода к решению задачи построения секторов абсолютной устойчивости систем рассматриваемого класса с дифференцируемым нелинейным блоком. Частотный основан на теореме Воронова, которая имеет достаточно наглядную геометрическую интерпретацию, однако следует из теоремы Якубовича при существенных ограничениях на вид частотного годографа. При использовании полиномиального подхода частотные неравенства теоремы Якубовича преобразуются в полиномиальную форму с помощью многочленов вещественной переменной, рассматриваемых на отрицательной полуоси. Тем самым достигается полная локализация анализа частотных условий абсолютной устойчивости, т.е. построение и анализ частотных неравенств сводится к анализу свойств соответствующих многочленов вещественной переменной, определяемых распределением их вещественных корней. На основе полиномиальной формы критерия разработана эффективная методика построения сектора абсолютной устойчивости для систем с дифференцируемой нелинейностью с применением математических пакетов MathCad, Matlab. Полиномиальная форма критерия (2) не содержит ограничений на свойства частотного годографа, в отличие от теоремы Воронова. С помощью обоих подходов построены секторы абсолютной устойчивости системы управления боковым движением ЛА с дифференцируемыми аэродинамическими нелинейностями. Как видно, они различаются незначительно, поскольку частотный годограф удовлетворяет условиям теоремы Воронова. В дальнейшем будут рассмотрены структуры нелинейной системы, дающие существенно альтернативные результаты применения рассматриваемых подходов.

Библиографический список

1. Справочник по теории автоматического управления; под ред. Красовского А.А. — М.: Наука, 1987. — 712 с.
2. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость / А.А. Воронов. — М.: Наука, 1979. — 336 с.
3. Барабанов А.Т. Вещественный полиномиальный анализ частотных критериев абсолютной устойчивости / А.Т. Барабанов // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. — 2000. — № 1. — С. 5–14.
4. Брайсон А. Новые идеи по теории управления / А. Брайсон //Аэрокосмическая техника. — 1986. — № 8. — С. 31–42.
5. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский. — М.: Высш. шк., 1989. — 447 с.

Поступила в редакцию 26.09.2008 г.