

УДК 621.717:621.88

В.Я. Копп, профессор, д-р техн. наук;

Н.В. Серова; О.В. Филипович, доцент, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

Ул. Университетская, 33, Севастополь, Украина, 99053

E-mail: ps@sevntu.com.ua

Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности

ул. Курчатова, 7, Севастополь, Украина, 99033

ОДНО- И МНОГОШАГОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРАМИ СЕЛЕКТИВНОЙ СБОРКИ

Предложены модели для определения количества незавершенного производства. Исследовано влияние управления параметрами селективной сборки на количество незавершенного производства. Рассмотрены одно- и многошаговые алгоритмы управления. Приведены результаты моделирования.

Количество незавершенного производства является одним из важнейших показателей селективной сборки изделий.

Целью статьи является разработка моделей для управления процессом селективной сборки при обеспечении минимума незавершенного производства.

Для управления селективной сборкой необходимо решить задачу определения нижней границы (минимума) незавершенного производства при известных числовых характеристиках размеров двух сопрягаемых деталей (далее – валов и втулок). Построенная модель положена в основу управления селективной сборкой.

Согласно [1] количество незавершенного производства определяется как

$$\bar{Q} = Q \cdot P, \quad (1)$$

где $P = 0,5 \int_{-\beta}^{\beta} |p_1(x) - p_2(x)| dx$ – вероятность некомплектности деталей; Q – количество деталей в партии;

$p_1(x)$ и $p_2(x)$ – плотности распределения случайных величин α_1 и α_2 (сопрягаемых размеров втулок и валов) соответственно; x – отклонение размера; β – пределы разброса размеров сопрягаемых деталей.

Математическая формулировка задачи выглядит следующим образом [2]: найти

$$\min\{Z = \int_{-\beta}^{\beta} (p_1(x) - p_2(x))^2 dx\} \quad (2)$$

при ограничениях

$$\int_{-\beta}^{\beta} p_1(x) dx = 1; \quad (3)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} x \cdot p_1(x) dx = M_1; \quad (4)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} x^2 \cdot p_1(x) dx = \sigma_1^2 + M_1^2; \quad (5)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} p_2(x) dx = 1; \quad (6)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} x \cdot p_2(x) dx = M_2; \quad (7)$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} x^2 \cdot p_2(x) dx = \sigma_2^2 + M_2^2, \quad (8)$$

где M_1, M_2 и σ_1^2, σ_2^2 – математические ожидания и дисперсии, определенные плотностями $p_1(x)$ и $p_2(x)$ соответственно.

Функционалы (1) и (2) достигают экстремума при одних и тех же значениях $p_1(x)$ и $p_2(x)$, чем и обоснована эквивалентная замена функционала (1) функционалом (2). Данная задача разрешима, если известно или $p_1(x)$, или $p_2(x)$, либо введением новой переменной. Пусть

$$\Delta(x) = p_1(x) - p_2(x). \quad (9)$$

При этом из (3) вычтем (6), из (4) вычтем (7), а из (5) вычтем (8). Тогда задача сводится к следующей:

$$\min \{ Z = \int_{-\beta}^{\beta} \Delta(x)^2 dx \},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\beta}^{\beta} \Delta(x) dx = 0, \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\beta}^{\beta} x \cdot \Delta(x) dx = M, \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\beta}^{\beta} x^2 \cdot \Delta(x) dx = \sigma^2. \end{array} \right. \quad (12)$$

Здесь $M = M_1 - M_2$ – разность математических ожиданий; $\sigma^2 = \sigma_{11}^2 - \sigma_{21}^2$ – разность дисперсий с учетом ненулевого математического ожидания: $\sigma_{11}^2 = \sigma_1^2 + M_1^2$; $\sigma_{21}^2 = \sigma_2^2 + M_2^2$.

Поставленная задача отыскания экстремума функционала (2) является вариационной задачей на условный экстремум с интегральными (изопериметрическими) ограничениями [1]. Решая уравнение Эйлера относительно $\Delta(x)$, имеем:

$$\Delta(x) = -\frac{1}{2} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2). \quad (13)$$

Константы λ_1 и λ_2 определяем из (10) – (12), при подстановке в них (13): $\lambda_1 = \sigma^2 \cdot \frac{15}{4 \cdot \beta^3}$, $\lambda_2 = -\frac{3 \cdot M}{\beta^3}$, $\lambda_3 = -\sigma^2 \cdot \frac{45}{4 \cdot \beta^5}$. Тогда (13) примет вид

$$\Delta(x) = -\frac{15}{8 \cdot \beta^3} \cdot \sigma^2 + \frac{3 \cdot M}{2 \cdot \beta^3} \cdot x - \frac{45 \cdot \sigma^2}{8 \cdot \beta^5} \cdot x^2. \quad (14)$$

В качестве примера предполагалось, что плотность распределения параметров втулок $p_1(x)$ имеет усеченное нормальное распределение и определена на интервале $[-1; 1]$ с дисперсией $\sigma_1^2 = 0,1$ и математическим ожиданием $M_1 = 0,1$ отклонения размера. Исследование количества незавершенного производства производилось варьированием значений дисперсии σ_2^2 и математического ожидания M_2 . Полученные данные сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты расчетов вероятности некомплектности деталей

Моменты распределения размеров втулок $\sigma_1^2 = 0,1$; $M_1 = 0,1$				
Моменты распределения размеров валов	$\sigma_2^2 = 0,2$		$\sigma_2^2 = 0,3$	
M_2	0,1	0,2	0,1	0,2
P	0,14434	0,19659	0,28888	0,33701

Вид заданной плотности распределения отклонений размеров втулок и рассчитанной плотности распределения отклонений размеров валов для случая $\sigma_2^2 = 0,2$; $M_2 = 0,2$ показаны на рисунке 1.

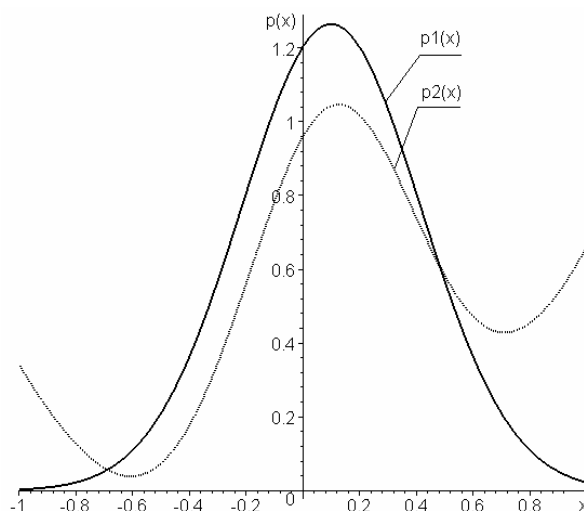


Рисунок 1 – Вид заданной плотности распределения отклонений размеров втулок и рассчитанной плотности распределения отклонений размеров валов для случая $\sigma_2^2 = 0,2$; $M_2 = 0,2$

Подход, описанный выше, пригоден для случаев, когда получаются неотрицательные значения для функции $p_2(x)$. Если же $p_2(x)$ получается отрицательной, то необходимо использовать другой подход. В этом случае математическая формулировка задачи выглядит следующим образом. Найти

$$\min\{Z = \int_{-\beta}^{\beta} (p_1(x) - p_2(x))^2 dx = \int_{-\beta}^{x_m} (p_1(x) - p_2(x))^2 dx + \int_{x_m}^{\beta} (p_1(x) - p_2(x))^2 dx\}$$

при ограничениях

$$\int_{-\beta}^{x_m} p_2(x) dx = P_{2xm}; \quad (15)$$

$$\int_{-\beta}^{x_m} x \cdot p_2(x) dx = M_{2xm}; \quad (16)$$

$$\int_{-\beta}^{x_m} x^2 \cdot p_2(x) dx = \sigma_{2xm}^2 + M_{2xm}^2; \quad (17)$$

$$\int_{x_m}^{\beta} p_2(x) dx = 1 - P_{2xm}; \quad (18)$$

$$\int_{x_m}^{\beta} x \cdot p_2(x) dx = M_2 - M_{2xm}; \quad (19)$$

$$\int_{x_m}^{\beta} x^2 \cdot p_2(x) dx = \sigma_2^2 - \sigma_{2xm}^2 + M_2^2 - M_{2xm}^2, \quad (20)$$

где M_1, M_2 и σ_1^2, σ_2^2 – математические ожидания и дисперсии, определенные плотностями $p_1(x)$ и $p_2(x)$ соответственно; P_{xm} – вероятность, определенная плотностью $p_2(x)$ на интервале $[-\beta; x_m]$; M_{2xm} – часть математического ожидания, приходящаяся на интервал $[-\beta; x_m]$; σ_{2xm}^2 – часть дисперсии, приходящаяся на интервал $[-\beta; x_m]$; x_m – значение абсциссы, при котором $p_2(x)$ обращается в нуль.

Тогда $p_2(x)$ представим в виде

$$p_2(x) = \begin{cases} p_2^{(1)}(x) = p_1^{(1)}(x) + \frac{1}{2} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2), & -\beta \leq x < x_m; \\ p_2^{(2)}(x) = p_1^{(2)}(x) + \frac{1}{2} \cdot (\lambda_4 + \lambda_5 \cdot x + \lambda_6 \cdot x^2), & x_m \leq x \leq \beta, \end{cases} \quad (21)$$

причем константы $\lambda_1 \dots \lambda_6$ определяются с учетом неотрицательности функции $p_2(x)$, минимум которой равен нулю; и зависят от параметров M_1 , M_2 , σ_1^2 , σ_2^2 , M_{2xm} , σ_{2xm}^2 , P_{2xm} , x_m .

Система уравнений для определения $\lambda_1 \dots \lambda_6$ получается из системы (15)–(20) при подстановке в нее (21), т.е.

$$\begin{cases} \lambda_1 = k_1 \cdot P_{xm} + k_2 \cdot M_{xm} + k_3 \cdot \sigma_{xm}^2, & (22) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = k_2 \cdot P_{xm} + k_4 \cdot M_{xm} + k_5 \cdot \sigma_{xm}^2, & (23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = k_3 \cdot P_{xm} + k_5 \cdot M_{xm} + k_6 \cdot \sigma_{xm}^2, & (24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_4 = -g_1 \cdot P_{xm} + g_2 \cdot (M - M_{xm}) + g_3 \cdot (\sigma^2 - \sigma_{xm}^2), & (25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_5 = -g_2 \cdot P_{xm} + g_4 \cdot (M - M_{xm}) + g_5 \cdot (\sigma^2 - \sigma_{xm}^2), & (26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_6 = -g_3 \cdot P_{xm} + g_5 \cdot (M - M_{xm}) + g_6 \cdot (\sigma^2 - \sigma_{xm}^2), & (27) \end{cases}$$

где $P_{xm} = P_{2xm} - P_{1xm}$; $M_{xm} = M_{2xm} - M_{1xm}$; $M = M_2 - M_1$; $\sigma_{xm}^2 = \sigma_{2xm}^2 - \sigma_{1xm}^2 + M_{2xm}^2 - M_{1xm}^2$; $\sigma^2 = \sigma_2^2 - \sigma_1^2 + M_2^2 - M_1^2$, $k_i, g_i, (i = \overline{1,6})$ – константы, введенные для упрощения вида выражения.

В данных шести уравнениях десять неизвестных: $\lambda_1 \dots \lambda_6$, M_1 , M_2 , σ_1^2 , σ_2^2 , M_{xm} , σ_{xm}^2 , P_{xm} , x_m . Для их определения необходимо использовать следующие четыре условия, предполагая, что искомая функция $p_2(x)$ является гладкой с экстремумом, равным нулю. В этом случае производные в точке x_m равны друг другу при условии их равенства нулю:

$$\begin{cases} p_2^{(1)}(x_m) = 0, & (28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left. \frac{dp_2^{(1)}(x)}{dx} \right|_{x=x_m} = 0, & (29) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2^{(2)}(x_m) = 0, & (30) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left. \frac{dp_2^{(2)}(x)}{dx} \right|_{x=x_m} = 0. & (31) \end{cases}$$

После решения системы (22)–(27) с условиями (28)–(31) найденные неизвестные параметры подставляются в выражение (21). Используя (21), рассчитываем вероятность некомплектности деталей P . Результаты расчетов сведены в таблицу 2. Вид заданной плотности распределения отклонения размеров втулок и рассчитанной плотности распределения отклонения размеров валиков показаны на рисунке 2.

Таблица 2 – Результаты расчетов вероятности некомплектности деталей

Моменты распределения размеров втулок $\sigma_1^2 = 0,1$; $M_1 = 0,1$				
Моменты распределения размеров валов	$\sigma_2^2 = 0,2$		$\sigma_2^2 = 0,3$	
M_2	0,3	0,4	0,3	0,4
P	0,28151	0,38667	0,41673	0,52029

Предложенный метод для определения вероятности некомплектности собираемых деталей позволяет определить нижнюю границу незавершенного производства при указанных выше условиях.

Предлагаемые граничные оценки могут использоваться для прогнозирования объема выпуска собранной продукции, а также для оценки качества управления процессом селективной сборки в качестве эталона сравнения.

Идея управления параметрами селективной сборки предложена в [1]. Методика заключается в организации смещения допуска изготовления валов, что обосновано более простой технологией изготовления наружных поверхностей.

Все алгоритмы управляемой селективной сборки можно разделить на одношаговые и многошаговые.

Сначала рассмотрим одношаговый алгоритм, который организуется следующим образом: объем выпуска валов внутри поля допуска разбивается на n в общем случае неравных частей. Каждая группа имеет свой центр настройки. Управляющими параметрами являются количество групп, их центры

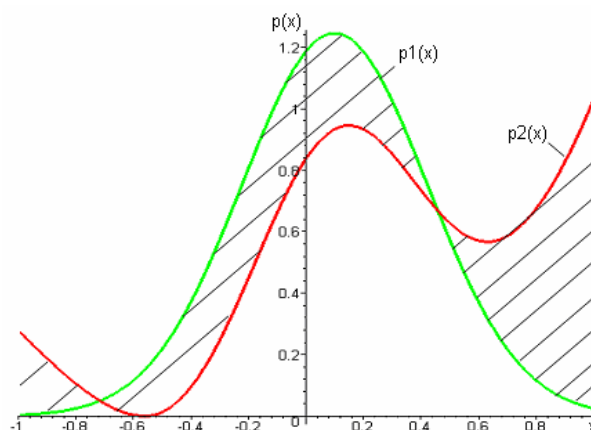


Рисунок 2 – Вид заданной плотности распределения отклонения размеров втулок и рассчитанной плотности распределения отклонения размеров валиков значениях $\sigma_2^2 = 0,2$ и $M_2 = 0,3$

настройки и объемы. Указанные параметры выбираются таким образом, чтобы незавершенное производство было минимальным, то есть решается задача многопараметрической оптимизации.

Задачу управления селективной сборкой можно представить в следующем виде: найти значение вектора $Y(n, c_i, q_i)$, обеспечивающего экстремум функционала

$$Y(n, c_i, q_i) \rightarrow \min \left\{ \bar{Q} = 0,5 \cdot Q \cdot \int_{-\beta}^{\beta} p_1(x) - \sum_{i=1}^n p_{2i}(x, n, c_i, q_i) dx \right\}, \quad (32)$$

где n – число групп; Q_i – объем деталей в i -й подгруппе, $Q_i = Q \cdot q_i$; q_i – вероятность попадания деталей в i -ю подгруппу, причем $\sum_{i=1}^n q_i = 1$.

Вид исходных плотностей распределения $p_1(x)$ и $p_2(x)$ втулок и валиков соответственно, обеспечиваемых существующим оборудованием, считаем известными. Оптимальное число подгрупп n_{opt} определялось полным перебором. Дальнейшие расчеты показали, что разбиение на количество подгрупп, превышающее 4...6, нецелесообразно, так как не приводит к существенному улучшению результата. Поэтому полный перебор не требует значительного машинного времени и может быть использован как метод.

Таким образом, при фиксированном n осуществлялась двухпараметрическая оптимизация по параметрам c_i , q_i . Моделирование производилось для симметричных законов $p_1(x)$ и $p_2(x)$. При этом, как видно из (9), (13), (14), имеет место:

$$p_{2OPT}(x) = p_1(x) + \frac{15}{8 \cdot \beta^3} \cdot \sigma^2 - \frac{45 \cdot \sigma^2}{8 \cdot \beta^5} \cdot x^2.$$

Данное выражение используем как эталон сравнения. Кроме этого необходимо определить математические ожидания $m_{2H}(x)$ и дисперсии $\sigma_{2H}^2(x)$, соответствующие новым плотностям распределения $p_{2H}(x)$, получающимся при разбиении на n подгрупп. Рассмотрим выражения для определения указанных величин при разбиении на 2, 3, 4, 5 подгрупп (33)–(37).

При разбиении на 2 подгруппы (в данном случае очевидно, что объемы подгрупп одинаковы):

$$m_{2H}(x) = \int_{-(a+c)}^{a+c} x \cdot p_{2H}(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-(a+c)}^{(a-c)} x \cdot p_2(x+c) dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{-(a-c)}^{(a+c)} x \cdot p_2(x-c) dx = 0; \quad (33)$$

$$\sigma_{2H}^2(x) = \int_{-(a+c)}^{a+c} x^2 \cdot p_{2H}(x) dx = \sigma_2^2(x) + c^2. \quad (34)$$

При разбиении на 3, 4, 5 подгрупп математические ожидания также равны нулю, поэтому рассмотрим выражения только для дисперсий. При разбиении на 3 подгруппы имеем:

$$\sigma_{2H}^2(x) = \int_{-(a+c)}^{a+c} x^2 \cdot p_{2H}(x) dx = \sigma_2^2(x) + (q_1 + q_3) \cdot c_1^2, \quad |c_1| = |c_2|. \quad (35)$$

При разбиении на 4 подгруппы получаем:

$$\sigma_{2H}^2(x) = \int_{-(a+c)}^{a+c} x^2 \cdot p_{2H}(x) dx = \sigma_2^2(x) + (q_2 + q_3) \cdot c_2^2 + (q_1 + q_4) \cdot c_1^2, |c_2| = |c_3|, |c_1| = |c_4|. \quad (36)$$

При разбиении на 5 подгрупп находим:

$$\sigma_{2H}^2(x) = \int_{-(a+c)}^{a+c} x^2 \cdot p_{2H}(x) dx = \sigma_2^2(x) + (q_2 + q_4) \cdot c_2^2 + (q_1 + q_5) \cdot c_1^2, |c_1| = |c_5|, |c_2| = |c_4|. \quad (37)$$

Номера подгрупп i отсчитываются от левой границы отклонений размера.

Расчеты показывают, что при дисперсиях распределения размеров втулок $\sigma_1^2 = 0,1$ и валов $\sigma_2^2 = \frac{13}{21} \sigma_1^2$ вероятность некомплектности в случае управляемой селективной сборки при разбиении на две подгруппы составляет 0,01642 при граничной оценке неуправляемой 0,05499. Смещения при этом составляют $c = \pm 0,175$. Данный пример наглядно показывает целесообразность управляемой селективной сборки, так как незавершенное производство уменьшилось более чем в 3 раза.

Аналогичные исследования проведены для 3-х, 4-х и 5-ти подгрупп. Полученные результаты сведены в таблицу 3.

Таблица 3 – Результаты расчетов вероятностей некомплектности деталей в случае одношагового алгоритма управления процессом селективной сборки

n	2	3		4		5		
c_i	$\pm 0,175$	0	$\pm 0,298$	$\pm 0,333$	$\pm 0,086$	0	$\pm 0,091$	$\pm 0,31$
q_i	$2 \times 0,5$	0,589	$2 \times 0,205$	$2 \times 0,142$	$2 \times 0,357$	0,42	$2 \times 0,1$	$2 \times 0,19$
P	0,01538	0,0022		0,0018		0,0017		

Виды кривых $p_1(x)$ и $p_{2H}(x)$ для случая $n=2$ изображены на рисунке 3. Для случаев разбиения исходной партии валов на большее количество подгрупп приводить такие графические зависимости нецелесообразно, поскольку кривые практически идентичны.

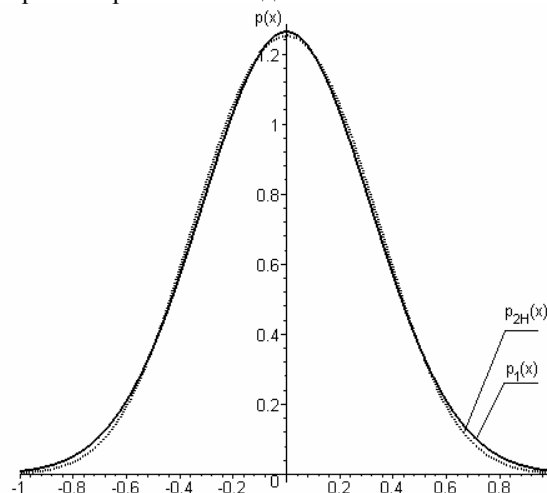


Рисунок 3 – Виды кривых распределений отклонений размеров $p_1(x)$ и $p_{2H}(x)$ при разбиении на 2 подгруппы

Из таблицы видно, что значения вероятности некомплектности деталей при разбиении исходной партии валов на две подгруппы меньше практически в 4 раза, чем граничная оценка вероятность некомплектности при неуправляемой селективной сборке, для трех подгрупп – в 24 раза, для четырех и пяти подгрупп – в 30 и 32 раза соответственно.

Дальнейшее разбиение на подгруппы к значительному улучшению результатов не привело.

Для анализа целесообразности использования управляемой сборки при фиксированном n также была проведена однопараметрическая оптимизация по параметру c_i . Как и ранее, моделирование осуществлялось для симметричных законов $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Кроме того, были определены математические ожидания $m_{2H}(x)$ и дисперсии $\sigma_{2H}^2(x)$, соответствующие новым плотностям

распределения $p_{2H}(x)$, получающимся при разбиении на n подгрупп (являются частными случаями выражений (33)–(37)). Рассмотрим выражения для определения указанных величин при разбиении на 2, 3, 4, 5 подгрупп.

При разбиении на 2 подгруппы получаем:

$$m_{2H}(x) = \int_{-(a+c)}^{a+c} x \cdot p_{2H}(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-(a+c)}^{a-c} x \cdot p_2(x+c) dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{-(a-c)}^{a+c} x \cdot p_2(x-c) dx = 0;$$

$$\sigma_{2H}^2(x) = \int_{-(a+c)}^{a+c} x^2 \cdot p_{2H}(x) dx = \sigma_2^2(x) + c^2.$$

При разбиении на 3, 4, 5 подгрупп математические ожидания также равны нулю, поэтому рассмотрим выражения только для дисперсий.

При разбиении на 3 подгруппы имеем:

$$\sigma_{2H}^2(x) = \int_{-(a+c)}^{a+c} x^2 \cdot p_{2H}(x) dx = \sigma_2^2(x) + \frac{2}{3} \cdot c_1^2, \quad |c_1| = |c_2|.$$

При разбиении на 4 подгруппы находим:

$$\sigma_{2H}^2(x) = \int_{-(a+c)}^{a+c} x^2 \cdot p_{2H}(x) dx = \sigma_2^2(x) + \frac{1}{2} \cdot c_2^2 + \frac{1}{2} \cdot c_1^2, \quad |c_1| = |c_4|, \quad |c_2| = |c_3|.$$

При разбиении на 5 подгрупп можно записать:

$$\sigma_{2H}^2(x) = \int_{-(a+c)}^{a+c} x^2 \cdot p_{2H}(x) dx = \sigma_2^2(x) + \frac{2}{5} \cdot c_2^2 + \frac{2}{5} \cdot c_1^2, \quad |c_1| = |c_5|, \quad |c_2| = |c_4|.$$

Номера подгрупп i отсчитываются от левой границы отклонений размера.

Полученные значения сравнивались с граничной оценкой неуправляемой селективной сборки. Результаты вычислений приведены в таблице 4.

При дисперсиях распределения размеров втулок $\sigma_2^2 = 0,1$ и валиков $\sigma_1^2 = \frac{13}{21} \sigma_2^2$ незавершенное производство в случае управляемой селективной сборки при однопараметрической оптимизации по параметру c_i для 3-х подгрупп составляет 0,01642 при граничной оценке неуправляемой 0,05499. Смещения при этом составляют $c_0 = 0$, $c_1 = \pm 0,18$. В данном случае незавершенное производство уменьшилось более чем в 3 раза. Для 4-х подгрупп НП составляет 0,00583 при граничной оценке неуправляемой 0,05499. Смещения при этом составляют $c_1 = 0$, $c_2 = \pm 0,27$. Для 5-ти подгрупп НП составляет 0,00515. Смещения при этом составляют $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = \pm 0,27$.

Таблица 4 – Результаты расчетов

n	2	3		4		5		
c_i	$\pm 0,18$	0	$\pm 0,23$	0	$\pm 0,27$	0	$\pm 0,31$	$\pm 0,29$
P	0,01642	0,01196		0,0058		0,0051		

Данные примеры наглядно показывают целесообразность использования одношагового алгоритма управляемой селективной сборки. Дальнейшее разбиение на подгруппы к значительному уменьшению результата НП не приведет.

Многошаговые алгоритмы управляемой селективной сборки.

Многошаговой управляемой селективной сборкой является планирование указанного процесса с учетом незавершенного производства (НП), образующегося после выполнения предыдущего шага. Несобранные детали участвуют в следующем этапе сборки. Причем следующая партия изготавливается с учетом объема и плотности распределения отклонений размеров оставшихся несобранных деталей. Таким образом, задача, поставленная в данной работе, сводится к исследованию влияния управления параметрами селективной сборки в динамике, т.е. осуществляется планирование производства с учетом незавершенного производства выполнения предыдущего этапа.

Управлять процессом селективной сборки в динамике можно с помощью выбора количества групп, на которые разбивается объем собираемых деталей на рассматриваемом этапе, координат центров настройки оборудования и объемов групп изготавливаемых деталей.

Математически задачу можно представить в виде: найти значение вектора $Y(n_j, c_{ij}, q_{ij}, Q_j)$, обеспечивающего экстремум функционала

$$Y(n_j, c_{ij}, q_{ij}, Q_j) \rightarrow \min \left\{ \bar{Q} = 0,5 \cdot \sum_{j=1}^m [Q_j \cdot \int_{-\beta}^{\beta} p_{1j}(x) - \sum_{i=1}^{n_j} p_{2j}(x, n_j, c_{ij}, q_{ij}) dx] \right\}, \quad (38)$$

$$P_j = \int_{-\beta}^{\beta} p_{1j}(x) - \sum_{i=1}^{n_j} p_{2j}(x, c_{ij}, q_{ij}, n_j) dx, \quad (39)$$

$$\bar{Q}_j = 0,5 \cdot Q_j \cdot P_j = 0,5 \cdot P_j \cdot \sum_{i=1}^{n_j} Q_{ij}, \quad Q_{ij} = Q_j \cdot q_{ij},$$

где n_j – число подгрупп на j -м этапе; c_{ij} – координата центра настройки i -й подгруппы j -го этапа; q_{ij} – вероятность попадания деталей в i -ю подгруппу j -го этапа, причем $\sum_{i=1}^{n_j} q_{ij} = 1$; Q_j – объем деталей, собираемых на j -м этапе; Q_{ij} – объем i -й подгруппы j -го этапа; j – номер этапа при осуществлении многошаговой сборки, $j = \overline{1, m}$; m – максимальное число этапов ($m = \overline{2, \infty}$); $Q = \sum_{j=1}^m Q_j$ – общий объем собираемых деталей; $p_{1j}(x)$ – плотность распределения втулок, собираемых на j -м этапе, зависящая от величины некомплектности на $(j-1)$ -м этапе; $p_{2j}(x, c_{ij}, q_{ij}, n_j)$ – плотность распределения валов, собираемых на j -м этапе, зависящая от параметров c_{ij}, q_{ij}, n_j и величины некомплектности на $(j-1)$ -м этапе; P_j – вероятность некомплектности деталей на j -м этапе; $\bar{Q}_j$ – объем неуконкомплектных деталей на j -м этапе.

Если собираемые объемы деталей на каждом этапе одинаковые ($Q_k = Q_l = \frac{1}{m} \cdot Q$; $k \neq l$, $k = \overline{1, m}$; $l = \overline{1, m}$), то выражения (38, 39) примут вид

$$Y(n_j, c_{ij}, q_{ij}, Q) \rightarrow \min \left\{ \bar{Q} = 0,5 \cdot Q \cdot \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \int_{-\beta}^{\beta} p_{1j}(x) - \sum_{i=1}^{n_j} p_{2j}(x, n_j, c_{ij}, q_{ij}) dx \right\}, \quad (40)$$

$$P = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \int_{-\beta}^{\beta} p_{1j}(x) - \sum_{i=1}^{n_j} p_{2j}(x, n_j, c_{ij}, q_{ij}) dx, \quad (41)$$

где P – усредненная вероятность общей некомплектности, соответствующей всему процессу.

Отметим, что в целом управляемая селективная сборка включает одно- и многошаговые алгоритмы в различных комбинациях. Одношаговый алгоритм описан ранее, а многошаговый можно разделить на два вида:

- многошаговая селективная сборка с заданным объемом собираемых деталей;
- многошаговая селективная сборка с неограниченным объемом собираемых деталей в течение m месяцев ($m = \overline{2, \infty}$) при наличии или отсутствии плановых месячных заданий.

Многошаговая селективная сборка с заданным объемом собираемых деталей выполняется по следующему алгоритму. Осуществляется разбиение собираемого общего объема деталей Q на m групп для изготовления и сборки на m этапах. Изготовление деталей на указанных этапах осуществляется последовательно во времени, т.е. каждая группа изготавливается с учетом сборки предыдущей при обеспечении минимума незавершенного производства. Рассмотрим реализацию управления многошаговой селективной сборкой на примере двухэтапного процесса.

Многошаговая селективная сборка с заданным объемом собираемых деталей происходит согласно следующему алгоритму

1. Изготавливаются две полупартии деталей объемами Q' .
2. Производится их сборка в узлы, в результате которой остается незавершенное производство объемом q' .

3. Изготавливаются две полупартии деталей объемами $Q'' = Q' - q'$, то есть количество деталей в новых партиях меньше требуемого на q' . Смещения функций распределения этих партий подбираются таким образом, чтобы уровень незавершенного производства при сборке партий $\overline{Q''}$ был минимальным, т.е. на сборку поступает требуемое количество деталей, так как в партию добавляются детали, невостребованные на предыдущем этапе сборки.

Таким образом, происходит управление процессом селективной сборки в динамике.

Определим вид закона распределения отклонения размеров втулок и валиков на втором этапе. На данном этапе образуется смесь деталей, оставшихся с предыдущего (первого) этапа и изготовленных на текущем (втором) этапе.

Обозначим плотности распределения отклонений размеров изготавливаемых двух полупартий деталей (втулок и валов) $p_1(x)$ и $p_2(x)$ соответственно. На практике их можно определить путем построения гистограмм частот попадания втулок и валов в тот или иной интервал. При наличии сортировочных автоматов этот процесс выполняется автоматически. В результате сборки на предыдущем этапе осталось незавершенное производство.

Необходимо найти функции распределения $p_{1\Sigma}(x)$ и $p_{2\Sigma}(x)$ отклонений размеров валов и втулок, участвующих в сборке на текущем (втором) этапе, предварительно определив распределения отклонений размеров деталей $p_{11}(x)$ и $p_{21}(x)$, входящих в незавершенное производство, оставшееся после предыдущего этапа.

Пусть событие A – попадание втулок в заданный интервал $[-\beta; x]$ на очередном этапе сборочного процесса. Тогда $P(A)$ – вероятность того, что втулка попала в заданный интервал $[-\beta; x]$ или функция распределения $F_{1\Sigma}(x)$ втулок, образующих совместную партию из деталей, оставшихся с предыдущего этапа и изготовленных на текущем.

По формуле полной вероятности можно записать, что

$$P(A) = \sum_{j=1}^2 P(H_j) \cdot P(A/H_j). \quad (42)$$

Событие A может наступить при условии реализации одной из гипотез H_1, H_2 . Гипотеза H_1 состоит в том, что на текущем этапе сборки используются втулки, изготовленные на данном этапе. Гипотеза H_2 состоит в том, что на текущем этапе сборки используются втулки, изготовленные на предыдущем и оказавшиеся несобранными, так как не нашли контрдеталей. Таким образом, $P(H_1)$ – вероятность того, что в сборке участвуют втулки, изготовленные на текущем этапе, $P(H_2)$ – вероятность того, что в сборке участвуют втулки, изготовленные на предыдущем этапе и не нашедшие контрдеталей. $P(A/H_1)$ – вероятность попадания втулок в интервал $[-\beta; x]$ при условии реализации гипотезы H_1 равная функции распределения $F_1(x)$ отклонения размеров деталей 1 (втулок) на данном этапе. $P(A/H_2)$ – вероятность попадания втулок в интервал $[-\beta; x]$ при условии реализации гипотезы H_2 равная функции распределения $F_{11}(x)$ отклонения размеров деталей 1 (втулок), оставшихся с предыдущего этапа. Плотности, соответствующие указанным функциям распределения обозначены $p_1(x)$, $p_{11}(x)$.

Таким образом, формула (42) примет вид

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = P(H_1) \cdot F_1(x) + P(H_2) \cdot F_{11}(x). \quad (43)$$

Сказанное полностью относится и к деталям 2 (валикам). Соответственно функции и плотности распределения валиков, изготовленных на предыдущем и данном этапах, обозначены $F_2(x)$, $F_{21}(x)$, $p_2(x)$, $p_{21}(x)$.

Вероятность реализации гипотезы H_2 равна относительной доле деталей не собранных на предыдущем этапе от общего объема M собираемых деталей на данном этапе. С учетом сказанного и формулы (1) $P(H_1)$ и $P(H_2)$ равны, т.е.

$$P(H_2) = \frac{\overline{Q}}{M} = k_2; \quad (44)$$

$$P(H_1) = 1 - P(H_2) = k_1. \quad (45)$$

Тогда функции и плотности распределения отклонения размеров втулок и валиков, получаемые из (43)–(45), соответственно равны:

$$F_{1\Sigma}(x) = k_1 \cdot F_1(x) + k_2 \cdot F_{11}(x); \quad (46)$$

$$F_{2\Sigma}(x) = k_1 \cdot F_2(x) + k_2 \cdot F_{21}(x). \quad (47)$$

$$p_{1\Sigma}(x) = k_1 \cdot p_1(x) + k_2 \cdot p_{11}(x); \quad (48)$$

$$p_{2\Sigma}(x) = k_1 \cdot p_2(x) + k_2 \cdot p_{21}(x). \quad (49)$$

Выражение для $p_{11}(x)$ определяется следующим образом:

$$p_{11}(x) = \begin{cases} \frac{p_1(x) - p_2(x)}{0,5 \cdot P}, & p_1(x) > p_2(x); \\ 0, & p_1(x) < p_2(x). \end{cases} \quad (50)$$

Здесь P определяется в соответствии с (39), а в частных случаях с (41).

Выражение для $p_{21}(x)$ определяется аналогично:

$$p_{21}(x) = \begin{cases} \frac{p_2(x) - p_1(x)}{0,5 \cdot P}, & p_1(x) < p_2(x); \\ 0, & p_1(x) > p_2(x). \end{cases} \quad (51)$$

Приведем пример использования полученных выражений. Допустим, плотности распределений отклонения размеров втулок и валов соответствуют рисунку 4.

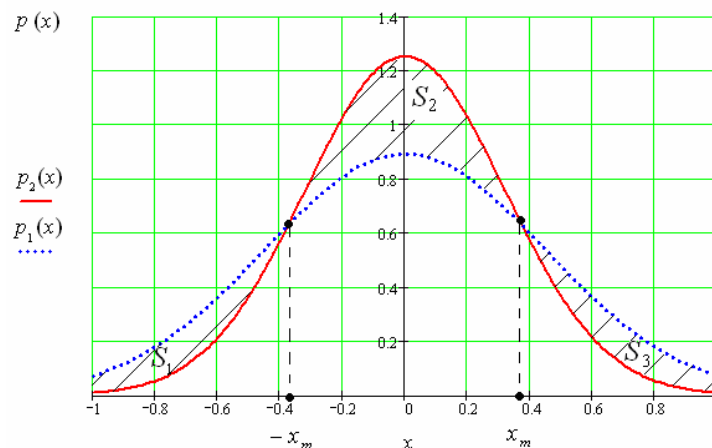


Рисунок 4 – Плотности распределений отклонений размеров валов и втулок $p_1(x)$ и $p_2(x)$

В данном случае число точек пересечения кривых $p_1(x)$ и $p_2(x)$ равно 2, причем $p_1(0) < p_2(0)$ (то есть ордината плотности распределения отклонения размеров втулок при значении $x = 0$ больше ординаты плотности распределения валов, как показано на рисунке). Вид плотностей $p_{11}(x)$ и $p_{21}(x)$ полученных в соответствии с выражениями (50), (51) представлен на рисунках 5 и 6. Вид плотностей $p_{1\Sigma}(x)$ и $p_{2\Sigma}(x)$ полученных в соответствии с выражениями (48), (49) изображен на рисунке 7. Величина некомплектности, рассчитанная в соответствии с формулами (38), (39), (48)–(51) равна 0,00395 при смещении $c_2 = \pm 0,28$ и равных объемах в подгруппах.

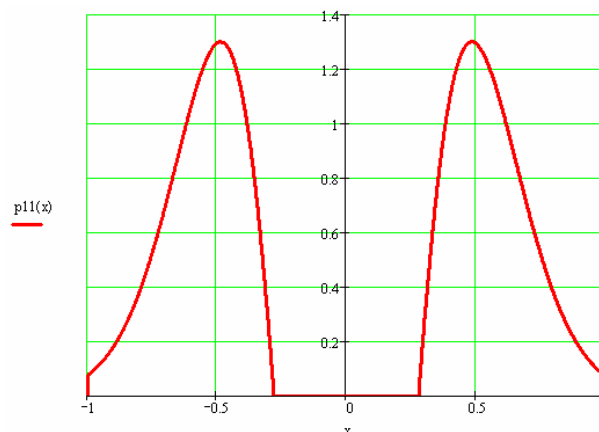


Рисунок 5 – Плотность распределения втулок, оставшихся от предыдущего этапа

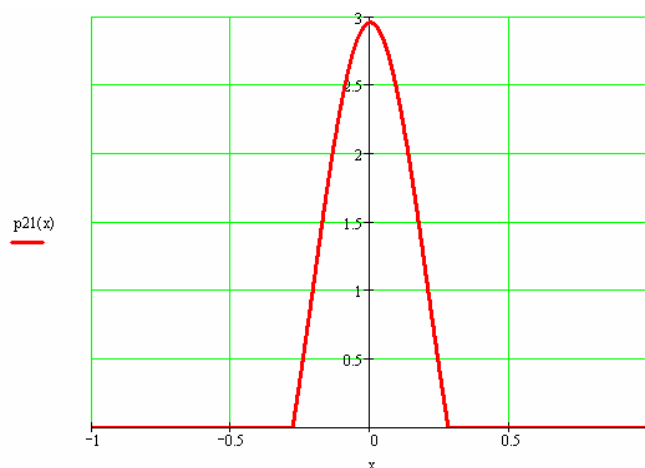
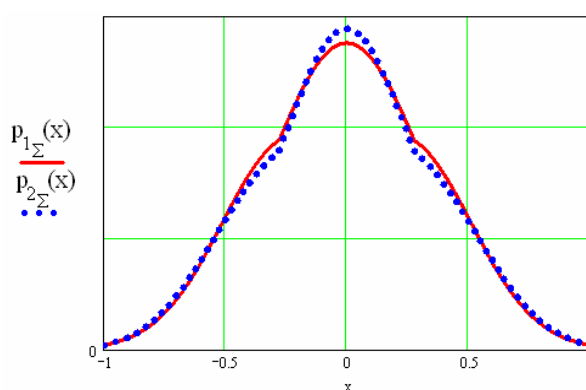


Рисунок 6 – Плотность распределения валов, оставшихся от предыдущего этапа

Рисунок 7 – Плотности распределения $p_{1\Sigma}(x)$ и $p_{2\Sigma}(x)$ отклонений размеров втулок и валов соответственно

Результаты моделирования приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Результаты моделирования процесса многошаговой управляемой селективной сборки с заданным объемом собираемых деталей

n	c_i		q_i			P
2	$\pm 0,28$	–	–	0,5	0,5	0,0395
3	0	$\pm 0,3$	0,1	$2 \times 0,45$	–	0,00184
4	$\pm 0,25$	$\pm 0,4$	–	$2 \times 0,4$	$2 \times 0,1$	0,00141

При необходимости обеспечения заданного объема собираемых узлов, требуется определить объем деталей, изготавливаемых на втором этапе. Эта процедура выполняется итерационно (подбором) и сложности не представляет.

Многошаговая селективная сборка с неограниченным объемом отличается от предыдущей отсутствием ограничения на общий объем деталей Q , изготавливаемых в течение n месяцев, причем n заранее не определено. На каждом ее этапе (за этап принимаем месячную программу) используется либо одношаговый алгоритм, либо многошаговый с заданным объемом собираемых деталей, рассмотренный выше. В общем случае месячные программы могут быть различны. На каждом этапе в сборке участвуют детали как оставшиеся с предыдущего этапа, так и изготовленные на текущем. Их количество подбирается с учетом заданной месячной программы итерационно, как об этом было сказано выше. Плотности и функции распределения отклонений размеров деталей как оставшихся с предыдущего этапа, так и образующих смесь на данном, определяются по формулам (46)–(53). Управление процессом сборки производится с помощью тех же параметров, что и в многошаговой селективной сборке с заданным объемом собираемых деталей. Основным отличием данного процесса от предыдущего заключается в том, что его длительность, а следовательно, и объем собираемых деталей, заранее не определены.

Приведем следующий пример использования построенной модели. Допустим, плотности распределений отклонения размеров втулок и валиков после i -го этапа соответствуют рисунку 8. Здесь же показан вид модуля разности плотностей распределения отклонений размеров втулок и валиков $q(x)$.

На указанном этапе сборки количество точек пересечения кривых $p_1(x)$ и $p_2(x)$ равно четырем, причем $p_1(0) > p_2(0)$ (т.е. ордината плотности распределения отклонения размеров втулок при значении $x=0$ больше ординаты плотности распределения валов, рисунок 8).

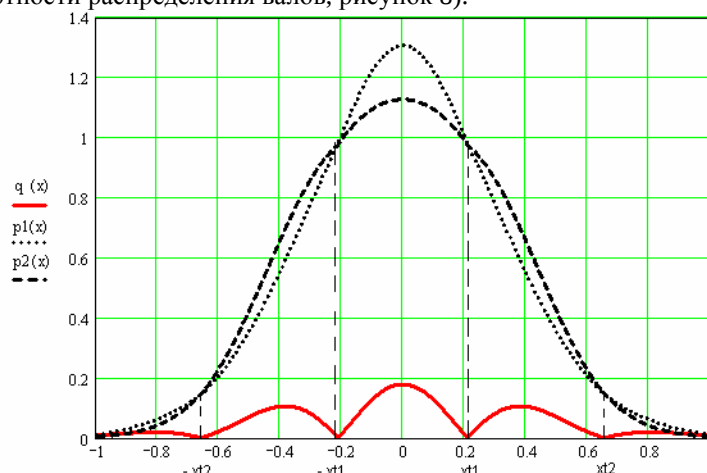


Рисунок 8 – Плотности распределения $p_1(x)$ и $p_2(x)$ отклонений размеров втулок и валов соответственно, $q(x) = |p_1(x) - p_2(x)|$ – модуль разности плотностей, x_{tj} – координаты абсцисс точек пересечения, где $i = 4$

Обозначим через $p_{1,i-1}(x)$ и $p_{2,i-1}(x)$ плотности распределения отклонений размеров втулок и валов, оставшихся в результате некомплектации на $(i-1)$ -ом этапе, а через $p_{1,i\Sigma}(x)$ и $p_{2,i\Sigma}(x)$ – плотности распределения отклонений размеров втулок и валов, образующих смесь на i -ом этапе. Вид этих плотностей приведен на рисунках 7, 8. Координаты точек пересечения x_{tj} кривых $p_{1,i\Sigma}(x)$ и $p_{2,i\Sigma}(x)$ определялись численно с помощью отдельной процедуры.

Сложность использования построенной модели заключается в том, что процесс оперирования с $p_{1,i\Sigma}(x)$ и $p_{2,i\Sigma}(x)$ уже после двух шагов является крайне трудоемким. Поэтому в модели используется их аппроксимация степенными полиномами не ниже десятого порядка методом наименьших квадратов.

Результаты моделирования приведены в таблице 6.

Таблица 6 – Результаты моделирования процесса многошаговой управляемой селективной сборки с неограниченным объемом собираемых деталей при разбиении месячной партии деталей на две подгруппы

Количество месяцев	1	2	3	4	5	6
c	$\pm 0,18$	$\pm 0,18$	$\pm 0,18$	$\pm 0,15$	$\pm 0,17$	$\pm 0,18$
P	0,153	0,00435	0,00164	0,00935	0,00181	0,00358

Проведенные исследования показывают, что управление процессом селективной сборки позволяет снизить уровень незавершенного производства на порядок, а в некоторых случаях, как видно из таблиц, на 1,5 порядка. Таким образом целесообразность использования предлагаемых методов управления селективной сборкой очевидна, тем более, что предлагаемые методы не требуют дополнительных аппаратных затрат, а следовательно, и больших финансовых вложений.

В дальнейшем целесообразно провести исследования, связанные с определением максимума незавершенного производства при использовании в качестве исходных данных не двух, а трех моментов распределения размеров сопрягаемых деталей в партиях.

Библиографический список

1. Буловский П.И. Автоматизация селективной сборки приборов / П.И. Буловский, П.И. Крылов, В.А. Лапухин. — Л.: Машиностроение, 1978. — 232 с.
2. Копп В.Я. Вариационный подход к оценке незавершенного производства при селективной сборке при несовпадающих точечных оценках случайных величин / В.Я. Копп, Н.В. Серова // Сб. науч. работ СНИЯЭиП. — Севастополь: СНИЯЭиП, 2004. — Вып. 10. — С. 41–48.

Поступила в редакцию 6.10.2008 г.