

УДК 517.977:629.734.7

**А.И. Бохонский, Л.А Шмидт***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***МЕТОДЫ РИТЦА И МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ СТЕРЖНЕЙ**

*С использованием методов В. Ритца и множителей Ж. Лагранжа найдены непрерывные управления упругим деформированием стержней постоянного и переменного сечения при медленном изменении положения внешней нагрузки, движущейся вдоль стержней. Задача на условный экстремум деформационного критерия качества при ограничениях в виде равенств сводится к задаче на безусловный с использованием множителей Лагранжа.*

**Введение. Метод множителей Лагранжа.** Общая постановка задачи на условный экстремум дважды дифференцируемой функции  $f(x)$  (критериев качества и оптимальности), определенной на множестве  $X = R^n$ , состоит в следующем. Необходимо найти экстремум функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющий дополнительным условиям  $\phi_i(x_1, \dots, x_n) = 0, (i=1, \dots, m)$ , где  $\phi_i$  – действительные функции и  $m < n$ , с использованием функции Лагранжа  $L = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_i$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – произвольные действительные числа [1]. Точки  $x_*$  локального экстремума находятся из необходимых условий:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, \quad k=1, \dots, n; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i=1, \dots, m.$$

При решении задач на условный экстремум могут возникать особенности, которые иллюстрируются на простых примерах.

**Пример 1.** Дано:  $z = (x+1)^2 + (y+1)^2 = \min; \quad x^2 + y = 0$ . С использованием функции *fsolve* в пакете *Maple* получено:  $x_* = -1, \quad y_* = -1, \quad \lambda = 0$ . Пример характеризует вырожденность ограничения, т.е. данное ограничение лишнее, поскольку с ним и без него результат одинаков. Характерно, что если  $\lambda = 0$ , то функция  $z$  при найденных  $x_* = -1, \quad y_* = -1$  равна нулю.

**Пример 2.**  $z = (x+10)^2 + (y+10)^2 = \min; \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0$ . В этом случае функция *fsolve* не находит решения в виду несовместности критерия и ограничения, т.е. задача поставлена некорректно.

Метод множителей Лагранжа особенно эффективен, если непосредственное определение части переменных из ограничений невозможно или крайне затруднено в связи с чрезвычайной трудоемкостью аналитических преобразований.

**Метод В. Ритца. (Вальтер Ритц (1878 – 1909) – немецкий физик и математик).** Метод основан на поиске минимума функционала на сепарабельном банаховом пространстве [2], например, на полном

нормированном пространстве  $R^n$  с евклидовой нормой  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ ; он полезен для практики и при

удачном выборе подходящих функций дает высокую точность результата. Иногда при выборе подходящей функции в виде полинома, степень которого совпадает со степенью полинома для известного точного решения, методом В. Ритца также удастся получить точный результат.

Достаточную практическую точность метода проиллюстрируем на простом примере определения максимального прогиба балки на двух шарнирных опорах от силы, приложенной по середине. Функционал полной энергии записывается следующим образом

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^l EI [W''(x)]^2 dx - P W(l/2) = \min,$$

где  $EI$  – жесткость при изгибе ( $E$  – модуль упругости первого рода;  $I$  – осевой момент инерции);  $W(x)$  – функция прогиба;  $W''(x)$  – кривизна изогнутой оси балки;  $P$  – сосредоточенная сила;  $l$  – пролет.

Если в качестве подходящей функции принять  $W(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ , то после ее подстановки в функционал,

из условия  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = 0$  следует  $a = 0,02054 Pl^3/EI$ ; точное решение, как известно,  $a = Pl^3/48EI$ , т.е. отличие составляет  $\Delta \approx 1,5\%$ , что вполне приемлемо для практических расчетов в механике деформируемого твердого тела.

**Постановка задачи оптимального управления деформированием.** Задачи оптимального управления деформированием твердых тел появляются и продолжают оставаться актуальными при автоматической токарной обработке широкого класса нежестких деталей, использовании рук манипуляторов конечной жесткости, в случае разворачивания и сборки крупногабаритных нежестких конструкций в космическом пространстве [3 – 5].

В общем виде постановка задачи управляемого деформирования при медленном движении внешней нагрузки следующая. Методами механики деформируемого твердого тела (например, для стержня – методом начальных параметров [3]) описывается напряженно-деформированное состояние (с учетом заданной медленно движущейся нагрузки и подлежащих определению сосредоточенных управляющих воздействий – сил и моментов). Задан деформационный критерий качества (критерий оптимальности) и ограничения (в виде равенств) на напряженно-деформированное состояние. Найти: управления, обеспечивающие минимум деформационного критерия с учетом ограничений.

Целью исследований является оценка эффективности одновременного применения методов Ритца и множителей Лагранжа при решении новых задач оптимального управления непрерывным упругим деформированием стержней. Применение этих методов иллюстрируется на примерах.

**Пример 3.** Управление деформированием консольного стержня. Схема консольного стержня изображена на рисунке 1. Необходимо найти такие управляющие воздействия  $P$  и  $M$ , которые обеспечивают

$$W(a)^2 = \min \quad (1)$$

при ограничении на управления, т.е.

$$Pl - M - P_y l = 0, \quad (2)$$

В [3] дано точное решение близкой по смыслу задачи с использованием метода начальных параметров и метода множителей Лагранжа.

Для поиска минимума критерия (1) при ограничении (2) воспользуемся методом Ритца в сочетании с методом множителей Лагранжа. Полная энергия в управляемом деформируемом состоянии в этом случае равна:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EI [W''(x)]^2 dx - P_y W(a) + P W(l) - M W'(l) = \min, \quad (3)$$

где  $W(l)$ ,  $W'(l)$  – соответственно перемещение и угол поворота сечения на консоли. Функция прогиба принята в виде полинома

$$W(x) = b_1 x^2 + b_2 x^3. \quad (4)$$

После подстановки (4) в (3) из системы уравнений  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_1} = 0$  и  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_2} = 0$  найдены коэффициенты:

$$b_1 = -\frac{M l^2 + P_y a^3 + P l^3 - 2 l P_y a^2}{2 EI l^2};$$

$$b_2 = \frac{2 l P_y a^3 + P l^3 - 3 l P_y a^2}{6 EI l^3}.$$

Здесь функция Лагранжа

$$L = W(a)^2 + \lambda (Pl - M - P_y l) = \min. \quad (5)$$

Необходимые условия экстремума функции (5):

$$\frac{\partial L}{\partial P} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial M} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \quad (6)$$

Решение системы (6), найденное в Maple с помощью функции solve:

$$M = \frac{P_y(3a^3 - 8la^2 + 5l^3)}{2l^2}; \quad P = \frac{P_y(3a^3 - 8la^2 + 7l^3)}{2l^3}; \quad \lambda = -\frac{P_y l^3(a^3 - 2la^2 + l^3)}{360 E^2 I^2}. \quad (7)$$

Исходные данные:  $P_y = 100 \text{ Н}$ ;  $l = 1 \text{ м}$ ;  $M, \text{ Н} \cdot \text{м}$   
 $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ МПа}$ ;  $d = 0,01 \text{ м}$ . Графики функций (7) изображены на рисунке 2. Важно отметить, что в этой задаче удастся получить решение и без использования метода множителей Лагранжа.

Метод Ритца незаменим в случае управления  $P, \text{ Н}$  деформированием стержня переменного сечения, так как осевой момент инерции поперечного сечения является функцией продольной координаты и при непосредственном интегрировании дифференциального уравнения изогнутой оси чаще всего не удастся вычислить интеграл, у которого подынтегральная функция является дробью с полиномами в числителе и знаменателе.

Пример 4. Управление для заготовки переменного сечения (рисунок 3). Осевой момент инерции поперечного сечения вычисляется так:

$$I(x) = \pi(d_n^4(x) - d_{вн}^4(x))/64,$$

где  $d_n(x) = (d_1 - d_2)(l^2 - x^2)/l^2 + d_2$ ,

$$d_{вн}(x) = (d_1 - d_2)(l^2 - x^2)/l^2 + d_2 - 2\delta.$$

Здесь  $d_1$  и  $d_2$  – торцевые диаметры опорных сечений;  $\delta$  – толщина стенки. Управление – сосредоточенная сила, приложенная по середине заготовки. Полная энергия при управлении деформированием равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) [W''(x)]^2 dx - P_y W(a) + P W(l/2) = \min.$$

Функция прогиба  $W(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ . Для определения управляющего воздействия  $P(a)$  используется условие  $W(a) = 0$ . При  $d_1 = 5d_2$  следует:

$$P_1 = \frac{16(7345l^3 - 2642l^2 a + 14186a^2 l - 18889a^3)P_y a}{3l^3(11361l + 15728a)}. \quad (8)$$

Если  $d_1 = d_2 = d$ , то управление (8) существенно упрощается:

$$P_2 = \frac{16(l^3 - 2l^2 a + 2a^2 l - a^3)aP_y}{3l^4}. \quad (9)$$

Интересно, что в обоих выражениях (8) и (9) при  $a = l/2$  следует:  $P_1 = P_y$  и  $P_2 = P_y$ . Графики функций  $P_1(a)$  и  $P_2(a)$  изображены на рисунке 4.

В случае переменного сечения симметрия управлений нарушается.

Пример 5. При управлении в виде опорного момента в случае постоянного поперечного сечения из условия  $W(a) = 0$  получено:

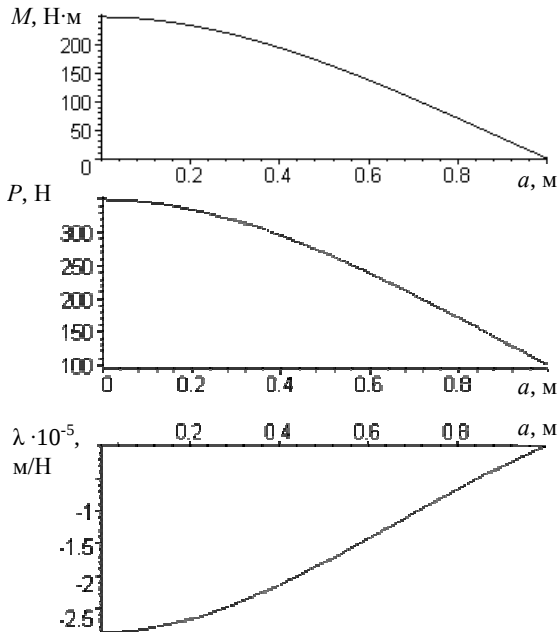


Рисунок 2 – Графики функций:  $M = M(a)$ ,  $P = P(a)$ ,  $\lambda = \lambda(a)$

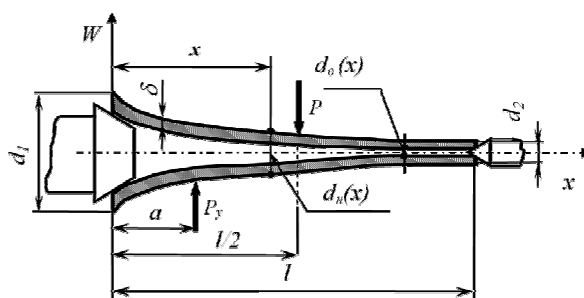


Рисунок 3 – Управление деформированием с использованием сосредоточенной силы  $P$

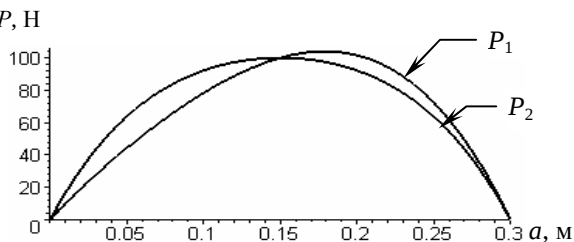


Рисунок 4 – Графики управляющих воздействий:  $P_1 = P_1(a)$  – управление для случая  $d_1 = 5d_2$ ;  $P_2 = P_2(a)$  – при  $d_1 = d_2 = d$

$$M_1(a) = \frac{2(l^3 - 2l^2a + 2a^2l - a^3)P_y a}{l^2(l+a)}. \quad (10)$$

Если принять  $d_2 = d_1/10$ , то вместо выражения (10) для управления получим следующее:

$$M_2(a) = \frac{(205870 l^3 - 54266 l^2 a + 391217 a^2 l - 542821 a^3) P_y a}{l^2(281672 l + 618623 a)}.$$

Значения управляющих моментов при  $a = l/2$ : для постоянного диаметра следует  $M_1 = 0,25P_y l$ , а для  $d_2 = d_1/10$  соответственно  $M_2 = 0,1766P_y l$ .

**Пример 6.** Управление деформированием стержня переменного сечения (усеченного конуса, рисунок 5) в случае двух управляющих воздействий  $P(a)$  и  $M(a)$ . Критерий оптимальности

$$J = \int_0^l [W(x)]^2 dx = \min \text{ и ограничение } W(a) = 0. \text{ Полная энергия в управляемом деформируемом}$$

состоянии для конической заготовки равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) [W''(x)]^2 dx - P_y W(a) + PW(l/2) - MW'(0) = \min.$$

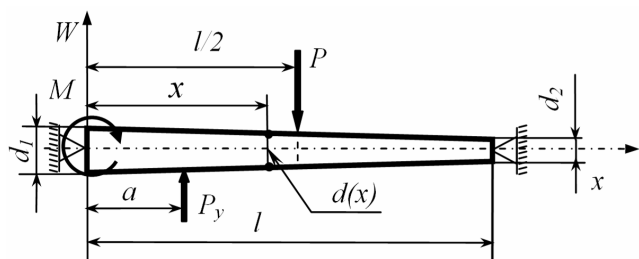


Рисунок 5 – Схема управления деформированием конической заготовки

Функция прогиба принята в виде полинома  $W(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ , где коэффициенты найдены из уравнений:

$$W(l) = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_3} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_4} = 0.$$

Выражения для коэффициентов и другие аналитические зависимости не приводятся ввиду их чрезвычайной громоздкости.

Функция Лагранжа в этом случае  $L = J + \lambda W(a) = \min$ . Достаточные условия минимума (положительная определенность

квадратичной формы) проверены с использованием матрицы Гессэ:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial P^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial P \partial M} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial P \partial M} & \frac{\partial^2 L}{\partial M^2} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2 L}{\partial P^2} > 0, \quad \Delta_2' = \frac{\partial^2 L}{\partial M^2} > 0.$$

Графики управлений, значение критерия и множителя Лагранжа, как функций координаты  $a$ , изображены на рисунке 6. Графики построены для следующих исходных данных:  $P_y = 100 \text{ Н}$ ;  $l = 0,3 \text{ м}$ ;

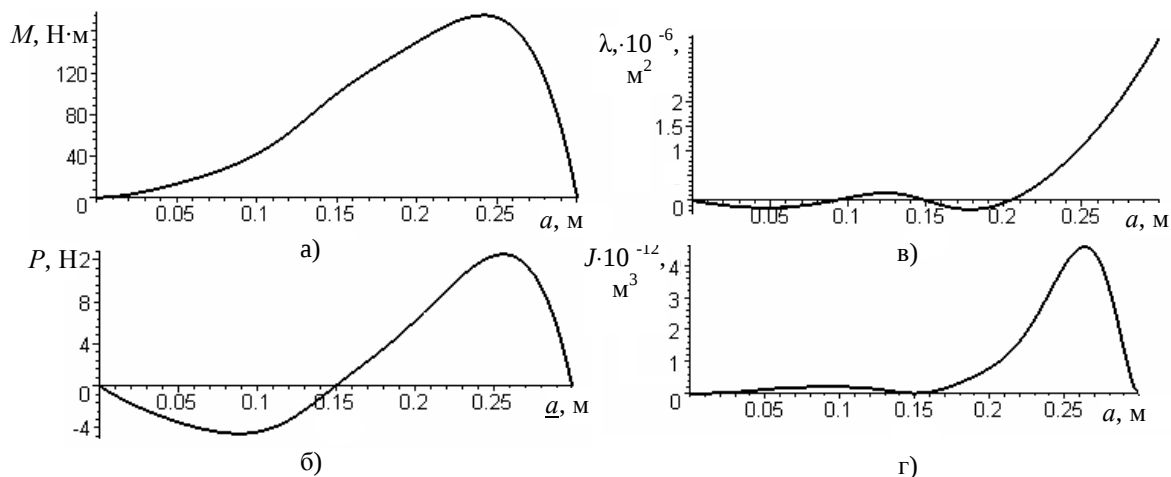


Рисунок 6 – Графики: а, б) управляющих воздействий  $M = M(a)$  и  $P = P(a)$ ;

в) множителя Лагранжа  $\lambda = \lambda(a)$ ; г) критерия  $J = J(a)$

$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ МПа}$ ;  $d_1 = 0,02 \text{ м}$   $d_2 = 0,01 \text{ м}$ . В случае заготовки постоянного сечения расход энергии на управление уменьшается.

**Выводы.** 1. Метод Ритца позволяет использовать единую аналитическую функцию прогибов в управляемом деформированном состоянии стержней, что существенно упрощает получение управлений с достаточной для практики точностью.

2. В задачах управляемого деформирования множители Лагранжа являются функциями координаты подвижной нагрузки; они обладают все еще не выявленными до настоящего времени экстремальными свойствами. По существу оптимальное управляемое деформирование является задачей непрерывной оптимизации.

3. Разработанные процедуры поиска управлений позволяют решать актуальные технологические задачи повышения точности автоматической токарной обработки нежестких заготовок со сложным характером изменения поперечного сечения по длине.

Дальше предполагается распространить разработанные подходы и алгоритмы на задачи стабилизации положения равновесия манипуляторов конечной жесткости (минимальной массы).

#### **Библиографический список**

1. Пантлеева А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантлеева, Т.А. Летова. — М.: Высш. шк., 2002. — 544 с.
2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С. Фомин. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
3. Бохонский А.И. Управляемое деформирование твердых тел / А.И. Бохонский // Динамические системы: межвед. науч. сб. — Симферополь: КФТ, 1999. — Вып. 15. — С. 30 – 36.
4. Бохонский А.И. Управление деформированием нежестких деталей при токарной обработке / А.И. Бохонский, А.Н. Вохмянин. — Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1999. — 240 с.
5. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. — 246 с.

*Поступила в редакцию 15.12.2008 г.*