

УДК 621.3.013

Л.Н. Канов, доцент, канд. техн. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***СХЕМНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С ГИСТЕРЕЗИСОМ**

Предложена гладкая аппроксимация петли гистерезиса ферромагнитных материалов. Обоснована методика схемного моделирования стационарных и переходных режимов электромагнитных цепей переменного тока с учетом влияния гистерезиса.

Введение. Компьютерное моделирование динамических режимов электротехнических систем переменного тока является актуальной задачей, для решения которой применяются известные программные комплексы, такие как Pspice, Simulink, Colo. Последний является отечественной разработкой [1], гораздо более доступен, чем лицензионные программные продукты, и в отличие от них позволяет проводить моделирование динамических режимов в магнитоэлектрических цепях, содержащих большое количество нелинейных элементов. Вместе с тем применение этой программы требует определенной подготовительной работы по построению нормального дерева цепи с использованием приоритета ветвей, получению матриц инцидентий, контуров и сечений, а также записи уравнений связи токов и напряжений на элементах дерева [1]. Кроме того, при моделировании нелинейных магнитных цепей не предоставляется возможность учета гистерезиса, тогда как гистерезис в значительной мере влияет на форму токов в цепи.

Аппроксимации петли гистерезиса и нахождению способов ее математического описания посвящено немало работ. Обзор приведен, например, в [2], где в качестве перспективного метода аппроксимации напряженности магнитного поля H в зависимости от индукции B рекомендуется уравнение

$$H = f(B) + H_C \cdot \cos(\omega t + \varphi); \quad f(B) = a_1 B + a_2 B^3, \quad (1)$$

где H_C – коэрцитивная сила; a_1, a_2 – коэффициенты аппроксимации кривой намагничивания; φ – фаза индукции относительно напряжения на входе цепи. Практическое использование выражений (1) затруднено непосредственной привязкой изменений напряженности и индукции к входному напряжению и применению гармонической функции времени, тогда как токи и напряжения в подобных цепях несинусоидальны.

Более привлекательным представляется применение модели Рэлея [3], в которой магнитный поток Φ выражается через магнитодвижущую силу (МДС) F следующим образом:

$$\Phi(t) = f(F(t) - \rho F_C) + [\varphi(F(t) - \rho F_C) + \rho \Phi_m] \cdot D_i; \quad (2)$$

$$D_i = \frac{\Phi(t_i) - f(F(t_i) - \rho F_C)}{\varphi(F(t_i) - \rho F_C) + \rho \Phi_m}. \quad (3)$$

В этих выражениях $\rho = \text{sign}\left(\frac{dF}{dt}\right)$; t_i – моменты переключения ρ . Восходящая предельная ветвь петли представляется выражением $\Phi^+ = f(F(t) - F_C)$, нисходящая – $\Phi^- = f(F(t) + F_C)$; функция остаточного процесса для восходящей ветви $\varphi^+ = \varphi(F(t) - F_C)$, для нисходящей – $\varphi^- = \varphi(F(t) + F_C)$; Φ_m – коэффициент, определяющий смещение функций остаточного процесса вдоль оси ординат (рисунок 1). Функция остаточного процесса в (2) масштабируется постоянным на монотонном интервале множителем D_i (3), который определяет смещение предельных ветвей для формирования восходящих и нисходящих участков петли. Этот множитель вычисляется в угловых точках петли через разность текущего значения потока $\Phi(t_i)$ и соответствующей предельной кривой. Вид функций $f(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ определяется аппроксимацией петли гистерезиса исследуемого устройства по его вебер-амперной характеристике.

Модели Рэлея не привязаны к конкретным временным зависимостям потока и МДС, они позволяют анализировать как установившиеся, так и переходные режимы магнитных цепей. Для примера на рисунке 2 изображен процесс установления частного цикла перемагничивания при периодической МДС $F(t) = 0,15 \sin 5t + 0,05$ с нормированными функциями

$$f(\cdot) = 0,25 \arctg(10(\cdot)) + 0,025(\cdot); \quad \varphi(\cdot) = -\arctg(10(\cdot)); \quad \Phi_m = 1,5708; \quad F_C = 0,3.$$

В то же время серьезным препятствием, затрудняющим применение моделей Рэлея, например, в схемном моделировании является негладкая аппроксимация потока Φ , связанная с наличием функции ρ , а также с необходимостью пересчета множителя D_i (3) при каждом переходе между нисходящими и восходящими ветвями петли.

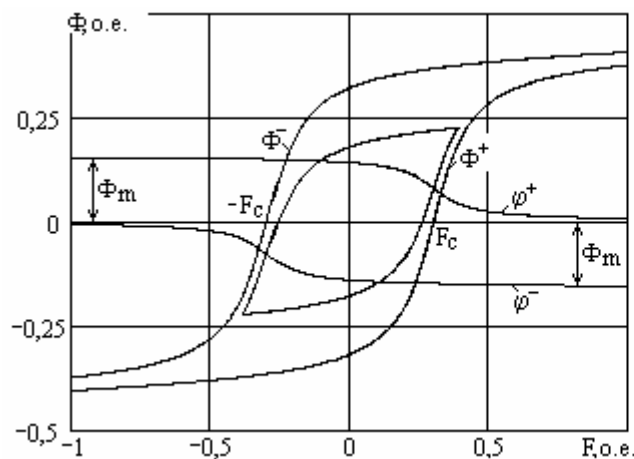


Рисунок 1 – Модель Рэлея петли гистерезиса

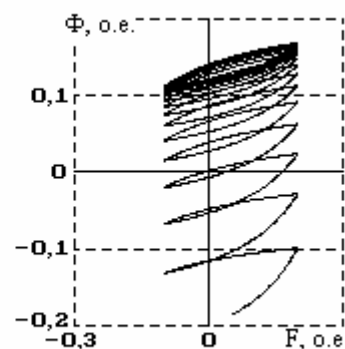


Рисунок 2 – Процесс установления цикла перемagnetизования

Постановка задачи, цель исследования. В статье ставится задача построения математического описания петли гистерезиса, пригодного для применения в схемном моделировании [4] при анализе динамических режимов электромагнитных цепей с учетом влияния гистерезиса.

Материалы исследования. Схемное моделирование является эффективным методом численного анализа динамических режимов электротехнических систем и основано на итерационном решении совокупности нелинейных алгебраических уравнений на каждом шаге процесса. Наличие в моделях типа Рэлея негладкого множителя ρ ухудшает сходимость итераций и затрудняет применение схемного моделирования. Рассмотрим возможность аппроксимации петли гистерезиса гладкими функциями. Для этого применим расщепление кривой намагничивания вдоль координатных осей по аналогии с выражением (1):

$$y(t) = f(x(t)) + \varphi\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right). \quad (4)$$

Здесь функция f аппроксимирует кривую намагничивания, а функция φ определяет отклонение от нее. Расщепление должно проявляться лишь в пределах области гистерезиса и вне ее должно обеспечивать перемagnetизование по основной кривой. Удобным средством для этого являются симметричные колоколообразные функции.

На рисунке 3 изображены петли гистерезиса, полученные расщеплением кривой намагничивания вдоль оси индукции а) и вдоль оси напряженности б). В качестве функции φ здесь применяется выражение вида

$$\varphi(x) = -a \cdot \arctg\left(b \frac{dx}{dt}\right) \cdot \exp(-(cx)^2), \quad (5)$$

где коэффициенты a, b, c выбираются по характерным параметрам предельной петли гистерезиса, таким как остаточная индукция B_r , коэрцитивная сила H_c и предельная точка с координатами B_m, H_m . Первый множитель в (5) обеспечивает расщепление кривой намагничивания на восходящую и нисходящую ветви в зависимости от знака производной, а второй – формирование предельных размеров петли.

Проиллюстрируем определение коэффициентов a, b, c для случая, изображенного на рисунке 3, а, где $x = H$, $y = B$. Пусть при $H = 0$ имеем максимальную скорость изменения магнитного состояния, тогда из выражений (4) и (5) для определения коэффициента a получаем $1,5708a = B_r$. На основании предельной напряженности петли H_m получаем возможность определения коэффициента c : $\varepsilon = \exp(-(cH_m)^2)$, где ε – малое положительное число $10^{-3} \dots 10^{-4}$. С использованием значения

коэрцитивной силы H_C и оценки скорости изменения напряженности $\frac{dH_C}{dt}$ в точке H_C получаем уравнение для определения коэффициента b :

$$f(H_C) - a \cdot \operatorname{arctg}\left(b \frac{dH_C}{dt}\right) \exp(-(cH_C)^2) = 0,$$

откуда следует $b \frac{dH_C}{dt} = \operatorname{tg}(a^{-1} f(H_C) \exp((cH_C)^2))$.

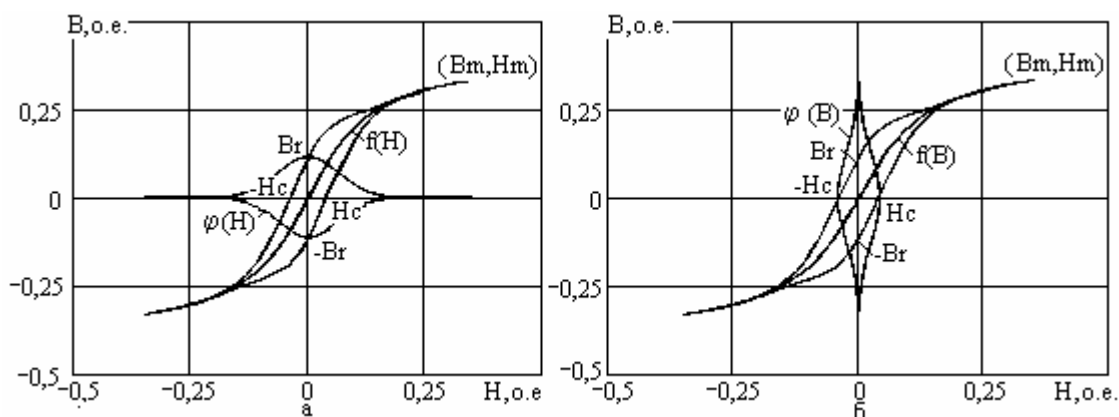


Рисунок 3 – Формирование петли гистерезиса расщеплением вдоль оси индукции а); вдоль оси напряженности б)

Так, принимая нормированные значения ($B_r = 0,125$; $\varepsilon = 10^{-3}$; $H_m = 0,15$; $H_C = 0,035$) и полагая, что кривая намагничивания аппроксимируется выражением $f(H) = 0,25 \operatorname{arctg} 10H + 0,025H$, получаем следующие значения коэффициентов: $a = 0,08$; $c = 11$; $b \frac{dH_C}{dt} = 2,846$. При оценке скорости $\frac{dH_C}{dt} \approx 0,6 \dots 0,8$ получаем $b \approx 4$. Аналогично могут быть определены коэффициенты аппроксимации и для варианта формирования петли, изображенного на рисунке 3,б. Предложенная аппроксимация пригодна для описания как симметричных, так и несимметричных, частных циклов перемагничивания.

Обсуждение результатов. Для иллюстрации предложенного метода аппроксимации петли гистерезиса рассмотрим переходный процесс включения однофазного трансформатора с ферромагнитным сердечником под резистивной нагрузкой на переменное напряжение, рисунок 4, а. Переходный процесс описывается совокупностью нелинейных уравнений

$$u(t) = i_1 r_1 + L_{S1} \frac{di_1}{dt} + w_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad 0 = i_2 r_2 + i_2 r_H + L_{S2} \frac{di_2}{dt} + w_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad F = w_1 i_1 + w_2 i_2,$$

$$\Phi = 0,25 \operatorname{arctg} 10F + 0,025F - a \cdot \operatorname{arctg}\left(b \frac{dF}{dt}\right) \exp(-(cF)^2) \quad (6)$$

в соответствии с (4) и (5), где r_1, r_2, r_H – сопротивления обмоток и нагрузки; L_{S1}, L_{S2} – индуктивности рассеяния обмоток; w_1, w_2 – числа витков. В (6) предлагаемая аппроксимация магнитного потока представлена в соответствии с рисунком 3, а и в координатах вебер-амперной характеристики магнитной цепи. Записать совокупность уравнений (6) в нормальной форме, пригодной для расчета известными математическими пакетами, затруднительно. В соответствии с методикой схемного моделирования [4] построим параллельную схемную модель цепи, изображенную на рисунке 4, б.

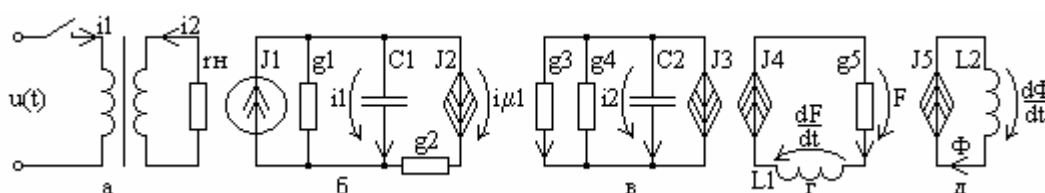


Рисунок 4 – Однофазный трансформатор а) и его параллельная схемная модель: б, в) контуры первичной и вторичной обмоток; г, д) формирование МДС, потока и их производных

На этом рисунке обозначены проводимости g_1, g_4 , численно равные сопротивлениям обмоток r_1, r_2 ; проводимости g_2, g_3 , численно равные сопротивлению стали r_c (для имитации потерь энергии на перемагничивание) и сопротивлению нагрузки; единичная проводимость g_5 , напряжение на которой численно равно МДС. Емкости C_1, C_2 численно соответствуют индуктивностям рассеяния обмоток. Линейные источники тока J_2, J_3, J_4 предназначены для формирования слагаемых $w_1 \frac{d\Phi}{dt}$, $w_2 \frac{d\Phi}{dt}$ и $F = w_1 i_1 + w_2 i_2$ соответственно; нелинейный источник тока J_5 , управляемый МДС и ее производной, формирует магнитный поток в соответствии с выражением (6). Единичные индуктивности L_1, L_2 предназначены для получения производных $\frac{dF}{dt}$, $\frac{d\Phi}{dt}$. Напряжения на емкостях C_1, C_2 численно равны токам в обмотках; напряжение на источнике тока J_2 – намагничивающему току первичной обмотки $i_{\mu 1}$.

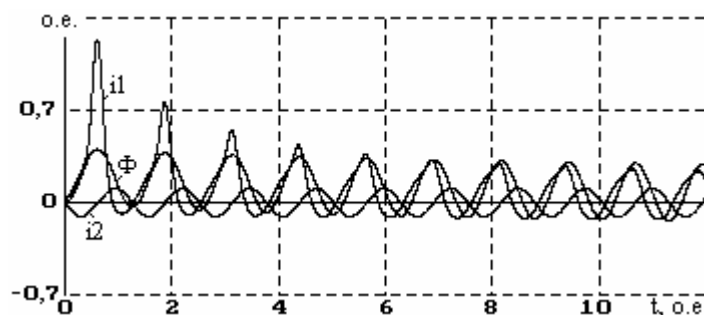


Рисунок 5 – Переходный процесс включения однофазного трансформатора на переменное напряжение с учетом влияния гистерезиса

На рисунке 5 изображены графики переходного процесса включения трансформатора на синусоидальное напряжение, полученные с использованием предложенной схемной модели с относительной точностью $2 \cdot 10^{-3}$ со следующими значениями параметров (в относительных единицах): $r_1 = r_2 = 0,1$; $L_{S1} = L_{S2} = 0,01$; $r_c = 100$; $r_H = 10$; $u_{BX}(t) = 1,1 \sin 5t$. Коэффициенты аппроксимации петли гистерезиса приведены выше.

Полученные графики полностью соответствуют представлениям о переходных процессах в цепях с ферромагнитными сердечниками с гистерезисом. Первичный ток имеет несимметричные всплески значительной амплитуды; ярко выражен процесс установления магнитного потока. Вместе с тем переходный процесс во вторичной обмотке гораздо более слабый. После завершения переходного процесса в цепи устанавливается стационарный режим с искаженной формой первичного тока вследствие влияния гистерезиса.

Выводы. Предложена гладкая аппроксимация петли гистерезиса, возникающей при перемагничивании ферромагнитных сердечников. Она основана на расщеплении кривой намагничивания. В отличие от существующих способов предложенная аппроксимация позволяет применять методику схемного моделирования для исследования переходных и стационарных режимов переменного тока в реакторах и трансформаторах с учетом влияния гистерезиса. Весьма перспективным в этом направлении представляется схемное моделирование процессов в силовых трехфазных трансформаторах, что входит в объем будущих исследований.

Библиографический список

1. Тиховод С.М. Система компьютерного моделирования динамических процессов в нелинейных магнитоэлектрических цепях / С.М. Тиховод // Технічна електродинаміка. — 2008. — № 3. — С. 16–23.
2. Король Е.Г. Анализ методов моделирования петли гистерезиса ферромагнитных материалов / Е.Г. Король // Електротехніка і електромеханіка. — 2007. — № 6. — С. 44–47.
3. Золотарев Н.А. Обобщение моделей гистерезиса типа Рэлея-Мазинга / Н.А. Золотарев // Известия вузов. Сер. Электромеханика. — 2004. — № 1. — С. 3–7.
4. Канов Л.Н. Схемное моделирование электроэнергетических систем переменного тока / Л.Н. Канов // Електротехніка та електроенергетика. — 2004. — № 1. — С. 5–9.

Поступила в редакцию 24.09.2008 г.