

УДК 62.50

Б.А. Скороход, профессор, д-р техн. наук,**А.С. Бегун, ассистент***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: AntonBegun@rambler.ru***АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ***Предложен адаптивный алгоритм управления с прогнозирующим функционалом.*

1. Постановка задачи. Одна из основных проблем, возникающих при использовании оптимальных законов управления, связана с необходимостью получения оценок значений параметров модели объекта, от которых зависит управление. Вместе с тем, во многих случаях такая информация является неполной или неточной. Стандартный подход для решения подобных задач состоит в использовании адаптивных законов управления. Модель объекта параметризуется и оценки неизвестных параметров рассчитываются одновременно с управлением в системе в темпе реального времени.

Целью статьи является разработка адаптивного алгоритма управления, который должен обеспечивать изменение выхода системы в соответствии с заданной траекторией, при этом значения параметров объекта изначально неизвестны, более того, они могут меняться с течением времени.

В работе предполагается, что объект описывается моделью авторегрессии (ARX) с экзогенной управляющей переменной вида [1]

$$A(q)y(t) = B(q)v(t - nk), \quad (1)$$

где $A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}$, $B(q) = b_1 + b_2q^{-1} + \dots + b_nq^{-n}$; $na = nb = n$ – порядки полиномов $A(q)$, $B(q)$; q – оператор задержки; nk – запаздывание сигнала управления; $v(t)$ – управление в системе; a_i , b_i – коэффициенты $A(q)$, $B(q)$ соответственно; $y(t)$ – выход системы в момент времени. Параметры модели a_i , b_i , n , nk неизвестны. Причём a_i , b_i могут меняться в процессе функционирования объекта, а n , nk – фиксированы.

Перейдем от ARX-модели (1) к модели пространства состояния

$$\begin{cases} x(t+1) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (2)$$

здесь $x \in R^{n \times 1}$ – вектор состояния; $u(t) = v(t - nk)$; $\theta = [\theta_a \quad \theta_b]^T$; $\theta_a = [a_1 \quad \dots \quad a_n]$; $\theta_b = [b_1 \quad \dots \quad b_n]$ – вектор неизвестных параметров;

$$A = \begin{bmatrix} -\theta_a & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = [\theta_b], \quad C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Введём критерий качества работы системы

$$J(t) = \sum_{k=N_1}^{N_2} Q_{1(k)} (\hat{y}(t+k|t) - r(t+k))^2 + \sum_{i=0}^{N_3-1} Q_{2(i)} \Delta \hat{u}(t+i|t)^2, \quad (3)$$

где N_1 – начальный горизонт прогноза (положим $N_1 = 1$); N_2 – горизонт прогноза выхода, N_3 – горизонт управления, причём $N_3 \leq N_2$; $\hat{y}(t+k|t)$ – прогноз выхода системы на k шагов вперёд; $r(t+k)$ – желаемая траектория выхода системы на k -м шаге; $\Delta \hat{u}(t+i|t) = \hat{u}(t+i|t) - \hat{u}(t+i-1|t)$ – приращение прогнозируемого сигнала управления $\hat{u}(t|t)$ на i -м шаге прогноза; $\Delta \hat{u}(t+i|t) = 0$ для $N_3 \leq i \leq N_2$; $Q_{1(k)}$ – штраф рассогласования траектории и предсказанного выхода системы, $Q_{2(i)}$ – штраф изменений в сигнале управления.

Задача управления системой состоит в оценке неизвестных параметров модели и выборе управляющего воздействия из условия минимума критерия качества (3).

2. Адаптивный алгоритм управления. Предлагается двух этапная процедура управления. На первом этапе определяется порядок модели и ее параметры – величины n , a_i , b_i на основе сравнения функций потерь (4) и метода наименьших квадратов (МНК) для конкурирующих ARX-моделей с заданным диапазоном возможных значений n

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_k^2}, \quad (4)$$

где $\delta_k = \hat{y}(t_k) - y(t_k)$ – рассогласование между оценкой МНК $\hat{y}(t_k)$ и измеренным выходом $y(t_k)$ системы в момент времени t_k , N – объём выборки измерений выхода системы. Управление $v(t - nk)$ представляет собой белый шум, обеспечивая несмещённость и состоятельность оценок параметров системы. На втором этапе, полученные оценки параметров модели используются в качестве начального приближения для построения собственно адаптивного алгоритма управления.

Для одновременной оценки значений параметров модели объекта и расчёта управления используется представление критерия качества (3) в виде сепарабельной регрессии, в которой неизвестные параметры системы разделяются на линейно и нелинейно, входящие в функционал. В работе [2] показано, что линейно входящие параметры при этом могут быть рассчитаны аналитически, далее минимум критерия достигается при подстановке найденного решения в функционал и решения нелинейной оптимизационной задачи. Покажем возможность применения такого подхода для решения задачи адаптивного управления с прогнозирующим функционалом.

Свяжем управление в системе (2) и приращения прогнозирующего управления в функционале (3). В результате этого имеем следующее:

$$\begin{aligned}\hat{u}(t | t) &= u(t - 1) + \Delta \hat{u}(t | t); \\ \hat{u}(t + 1 | t) &= u(t - 1) + \Delta \hat{u}(t | t) + \Delta \hat{u}(t + 1 | t); \\ &\vdots \\ \hat{u}(t + N_3 - 1 | t) &= u(t - 1) + \Delta \hat{u}(t | t) + \Delta \hat{u}(t + 1 | t) + \dots + \Delta \hat{u}(t + N_3 - 1 | t).\end{aligned}\quad (5)$$

здесь $u(t - 1)$ – известный сигнал управления, рассчитанный на предыдущем шаге работы алгоритма со скользящим окном.

Используя (2), выражения (5) и полагая $\Delta \hat{u}(t + i | t) = 0, \forall i = \overline{N_3, N_2}$, можно получить соотношения [3] в векторно-матричной форме для прогноза поведения решений (3)

$$\hat{x}(t) = S_x(\theta)x(t) + S_u(\theta)u(t - 1) + S_{du}(\theta)\Delta \hat{u}(t), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \begin{bmatrix} \hat{x}(t + 1 | t) \\ \vdots \\ \hat{x}(t + N_3 | t) \\ \hat{x}(t + N_3 + 1 | t) \\ \vdots \\ \hat{x}(t + N_2) \end{bmatrix}, \quad S_x(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) \\ \vdots \\ A(\theta)^{N_3} \\ A(\theta)^{N_3 + 1} \\ \vdots \\ A(\theta)^{N_2} \end{bmatrix}, \quad S_u(\theta) = \begin{bmatrix} B(\theta) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_3-1} A(\theta)^i B(\theta) \\ \sum_{i=0}^{N_3} A(\theta)^i B(\theta) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_2-1} A(\theta)^i B(\theta) \end{bmatrix}; \\ S_{du}(\theta) &= \begin{bmatrix} B(\theta) & \dots & 0 \\ A(\theta)B(\theta) + B(\theta) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_3-1} A(\theta)^i B(\theta) & \dots & B(\theta) \\ \sum_{i=0}^{N_3} A(\theta)^i B(\theta) & \dots & A(\theta)B(\theta) + B(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N_2-1} A(\theta)^i B(\theta) & \dots & \sum_{i=0}^{N_2-N_3} A(\theta)^i B(\theta) \end{bmatrix}, \quad \Delta \hat{u}(t) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}(t | t) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}(t + N_3 - 1 | t) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (7)$$

Представим критерий качества (3) системы (2) в виде

$$J(t) = (\hat{y}(t) - r(t))^T Q_1 (\hat{y}(t) - r(t)) + \Delta \hat{u}(t)^T Q_2 \Delta \hat{u}(t), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} C\hat{x}(t + 1 | t) \\ \vdots \\ C\hat{x}(t + N_2 | t) \end{bmatrix}, \quad r(t) = \begin{bmatrix} r(t + 1) \\ \vdots \\ r(t + N_2) \end{bmatrix}, \\ Q_1 &= \begin{bmatrix} Q_{1(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_{1(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_{1(N_2)} \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} Q_{2(0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_{2(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_{2(N_3-1)} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Критерий (9) для системы (2), с учётом (6)-(8) записывается в виде квадратичной нормы вектора

$$J(t, \theta) = \left\| \begin{bmatrix} S_q(C(S_x(\theta)x(t) + S_u(\theta)u(t-1) + S_{du}(\theta)\Delta\hat{u}(t)) - r(t)) \\ S_R\Delta\hat{u}(t) \end{bmatrix} \right\|^2, \quad (10)$$

где $Q_1 = S_q^T \cdot S_q$, $Q_2 = S_R^T \cdot S_R$.

В нашем случае $\Delta\hat{u}(t)$ входит в выражение под нормой (10) линейно, а вектор неизвестных параметров θ – соответственно нелинейно, поэтому критерий (10) можно представить в виде сепарабельной регрессии

$$J(t, \theta) = \|\Phi(\theta)\Delta\hat{u}(t) - y(\theta)\|^2, \quad (11)$$

где

$$y(\theta) = - \begin{bmatrix} S_q C S_x(\theta) x(t) + S_q C S_u(\theta) u(t-1) - S_q r(t) \\ 0_{N_3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad y(\theta) \in R^{N_2 + N_3 \times 1},$$

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} S_q C S_{du}(\theta) \\ S_R \end{bmatrix}, \quad \Phi(\theta) \in R^{N_2 + N_3 \times N_3}, \quad \text{rank } \Phi(\theta) \leq N_3.$$

В общем случае, поскольку $\Phi(\theta)$ – произвольная $N_2 + N_3 \times N_3$ прямоугольная матрица, для искомого $\Delta\hat{u}(t)$ может быть получено бесконечное множество решений. В случае если матрица $\Phi(\theta)$ имеет полный столбцовый ранг, т.е. $\text{rank } \Phi(\theta) = N_3$, значение $\Delta\hat{u}(t)$, при котором критерий (11) принимает минимальное значение, вычисляется единственным образом с помощью МНК

$$\Delta\hat{u}(t) = \Phi(\theta)^+ y(\theta), \quad (12)$$

где $\Phi(\theta)^+ = (\Phi(\theta)^T \Phi(\theta))^{-1} \Phi(\theta)^T$.

Подставляя выражение (12) в (11), получаем

$$J(t, \theta) = \|P_\Phi^\perp(\theta) y(\theta)\|^2, \quad (13)$$

где $P_\Phi^\perp(\theta) = \Phi(\theta)\Phi(\theta)^+ - I$. В работе [2] показано, что оптимизация функционала (13) с учётом (12) эквивалентна минимизации (11).

Неизвестные параметры θ критерия (13) системы (2) предлагается уточнять итерационно на каждом шаге с помощью градиентного метода

$$\theta_t^{k+1} = \theta_t^k - \bar{\lambda}_t \cdot \nabla J(\theta_t^k), \quad (14)$$

где k – номер итерации; $\bar{\lambda}_t$ – коэффициент, определяющий скорость настройки параметров системы; с учётом обозначения $\bar{r}(\theta) = P_\Phi^\perp(\theta) y(\theta)$ $\nabla J(\theta) = \frac{\partial J(t, \theta)}{\partial \theta} = 2J(\theta)^T \bar{r}(\theta)$ – градиент выражения (13), где J – Якобиан, i -й столбец которого равен [4]

$$J_{:,i}(\theta) = -[(P_\Phi^\perp \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta_i} \Phi(\theta)^+) + (P_\Phi^\perp \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta_i} \Phi(\theta)^+)^T] y(\theta) + P_\Phi^\perp \frac{\partial y(\theta)}{\partial \theta_i}, \quad (15)$$

где

$$\frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} S_q \frac{\partial (C S_{du}(\theta))}{\partial \theta} \\ 0_{N_3 \times N_3} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial y(\theta)}{\partial \theta} = - \begin{bmatrix} S_q \frac{\partial (C S_x(\theta) x(t))}{\partial \theta} + S_q \frac{\partial (C S_u(\theta))}{\partial \theta} u(t-1) \\ 0_{N_3 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Таким образом, адаптивный алгоритм позволяет одновременно уточнять параметры модели, а также вырабатывать сигнал управления в каждый момент времени.

Алгоритм состоит из шагов, которые перечислены ниже.

1. Выполняется этап идентификации модели объекта, в результате которого рассчитываются начальные приближения значений параметров θ_0 .

2. На каждом шаге управления параметры θ уточняются с использованием рекуррентной процедуры (14) для функционала (13).

3. Рассчитывается приращение сигнала управления (12) системы с текущим приближением значений параметров.

4. Найденный сигнал управления подаётся в систему, делается переход на 2 шаг.

Следует отметить, что в отличие от решения оптимизационных задач на основе сепарабельной регрессии, не связанных с управлением, специфика предложенного адаптивного алгоритма заключается в том, что оптимизация выполняется на каждом шаге управления в темпе реального времени. Кроме того, серьёзной проблемой является сложность вычисления частных производных (16) в выражении (15).

3. Числовой пример. Рассматривается система (2) 1-го порядка ($n=1$, $nk=1$) с вектором неизвестных параметров $\theta=[a_1]$, при этом частные производные (16) имеют вид:

$$\frac{\partial S_{du}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial S_{du}}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial S_x(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial S_x}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial S_u(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial S_u}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial A}{\partial a_1} = -1;$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial A} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N_3 A^{N_3-1} \\ (N_3+1)A^{N_3} \\ \vdots \\ N_2 A^{N_2-1} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial S_u}{\partial A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_3-1} i A^{i-1} B \\ \sum_{i=1}^{N_3} i A^{i-1} B \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_2-1} i A^{i-1} B \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial S_{du}}{\partial A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ B & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_3-1} i A^{i-1} B & \cdots & 0 \\ \sum_{i=1}^{N_3} i A^{i-1} B & \cdots & B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_2-1} i A^{i-1} B & \cdots & \sum_{i=1}^{N_2-N_3} i A^{i-1} B \end{bmatrix}.$$

Для иллюстрации предложенного адаптивного алгоритма управления используется модель объекта с параметрами $a_1=0,7$; $b_1=-0,1$; $c=1$. Начальное приближение параметров настраиваемой модели $am_1=0,8$; $bm_1=-0,1$; $cm=1$. Состояние системы предполагается известным в каждый момент времени.

На рисунке 1 показана работа предложенного адаптивного алгоритма идентификации и управления. Желаемый выход системы 20, $N_2=3$, $N_3=1$, $Q_1=10I$, $Q_2=I$. Коэффициент $\bar{\lambda}_t$ изменяется в диапазоне $10^{-8} \dots 10^{-4}$ таким образом, что при большой ошибке рассогласования желаемого и реального выхода системы, значения параметров модели практически не изменяются, в тоже время по мере уменьшения ошибки рассогласования скорость настройки параметров увеличивается.

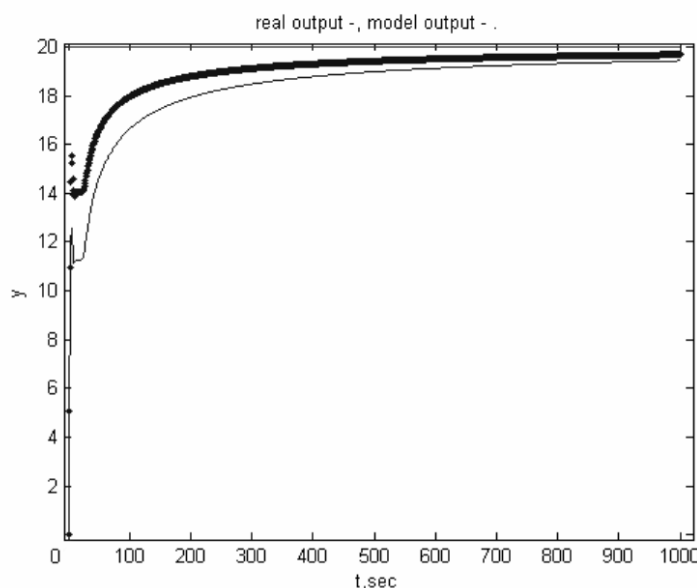


Рисунок 1 – Процесс работы адаптивного алгоритма

Сплошной линией (на рисунке 1) показан процесс реального объекта управления. Точками показан процесс настраиваемой модели. Управление в системе изображено на рисунке 2.

Процесс подстройки неизвестного параметра показан на рисунке 3.

При определённом подборе параметров адаптивного алгоритма, таких как горизонт прогноза выхода системы N_2 и скорости настройки $\bar{\lambda}_t$, удаётся добиться приближения оценок параметров модели в малую окрестность значений параметров реального объекта.

Заключение. Разработан адаптивный алгоритм управления, позволяющий уточнять параметры модели системы и вырабатывать сигнал управления в режиме реального времени.

В следующих публикациях предполагается исследовать характеристики разработанного алгоритма, что составляет предмет развития данного направления.

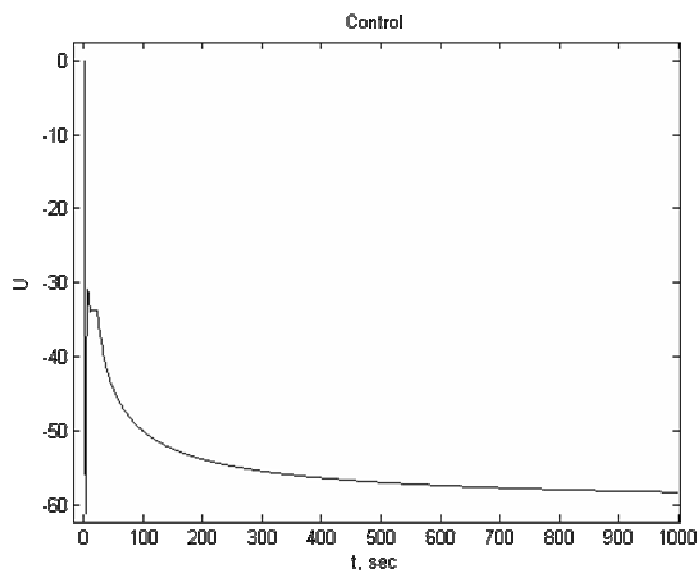


Рисунок 2 – Управление в системе

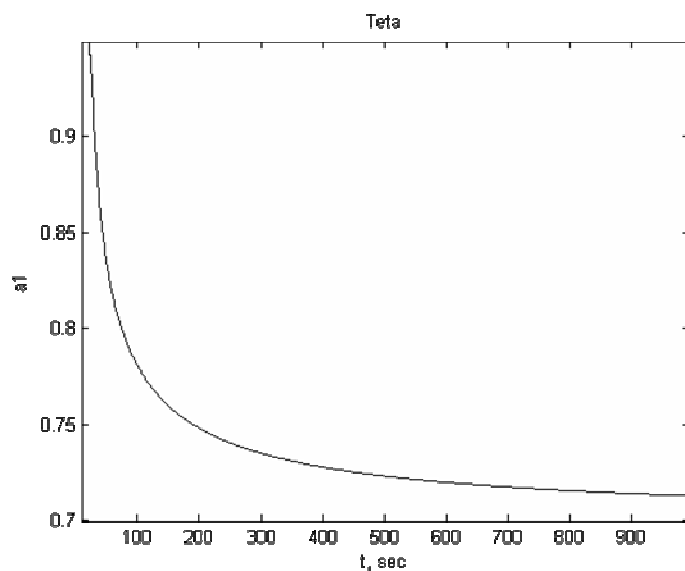


Рисунок 3 – Процесс подстройки неизвестного параметра

Библиографический список

1. Льюнг Л. Теория идентификации систем для пользователя: пер. с англ. / Л. Льюнг, А.С.Мандель. — М.: Наука, 1991. — 431 с.
2. Golub G.H. The differentiation of pseudo-inverses and nonlinear least squares problems whose variables separate / G.H. Golub, V. Pereyra // SIAM J. Numer. Anal. 10. — 1973. — P. 413–432.
3. Maciejowski J.M. Predictive control: with constraints / J.M. Maciejowski. — N.Y.: Prentice Hall, 2002. — 331 p.
4. Kaufman L. TradeOffs in algorithms for separable nonlinear least squares / L. Kaufman, David M. Gay. — Dublin, Criterion Press, 1991. — P. 157–158.

Поступила в редакцию 15.07.2008 г.