

УДК 519.873

А.И. Песчанский, доцент, канд. физ.-мат. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ МОНОТОННОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ НАРАБОТКИ НА ОТКАЗ КАЖДОГО ЕЕ ЭЛЕМЕНТА***Исследуется стратегия технического обслуживания (ТО) системы с монотонной структурой в зависимости от «возраста» ее элементов.*

Введение. В процессе функционирования сложной технической системы ухудшаются характеристики её элементов. Одним из методов улучшения стационарных показателей качества функционирования является предупредительное техническое обслуживание (ТО) элементов. В [1] исследована стратегия ТО простой системы, известная под названием «восстановление в зависимости от возраста». В данной работе эта стратегия ТО обобщается на сложные системы с монотонной структурой [1].

Цель статьи – установить оптимальные величины наработок элементов монотонной системы для проведения ТО с целью достижения наилучших стационарных надежностных и экономических характеристик системы.

Постановка задачи и построение математической модели. Рассмотрим N – компонентную систему с монотонной структурой [1]. К таким системам относятся, например, последовательные, дублированные, мостиковые системы, системы «Р из N», системы с отдельно-общим резервированием.

Время безотказной работы i -го элемента системы – случайная величина (СВ) α_i с функцией распределения (ФР) $F_i(t) = P(\alpha_i \leq t)$, $i = \overline{1, N}$. Индикация отказа элемента осуществляется мгновенно и начинается его аварийное восстановление (АВ), которое длится случайное время β_i с ФР $G_i(t) = P(\beta_i \leq t)$, $i = \overline{1, N}$. Если i -й элемент системы проработал без отказов заданный интервал времени τ_i , тогда проводится его ТО, длительность которого – СВ β_i^p с ФР $G_i^p(t) = P(\beta_i^p \leq t)$. Предполагается, что все СВ независимы, имеют абсолютно непрерывные ФР и конечные математические ожидания $M\alpha_i, M\beta_i, M\beta_i^p$. Очереди на восстановление не возникает. Как после ТО, так и после АВ, все надежностные характеристики элементов полностью обновляются. Уровень наработки τ_i для ТО i -го устанавливается как после его ТО, так и АВ. Отключение и включение элементов в систему происходит мгновенно. Доход за единицу времени исправного функционирования, плата за единицу времени аварийного восстановления и плата за единицу времени ТО i -го элемента системы соответственно равны c_i^0, c_i и c_i^p , $i = \overline{1, N}$.

Система находится в работоспособном состоянии тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одна из последовательных структур минимального пути [1] работоспособна. Система считается в отказе, если, по крайней мере, одна из параллельных структур минимального сечения [1] находится в нерабочем состоянии (по причине ТО или АВ ее элементов). Предполагается, что в результате АВ или ТО какого-либо элемента не происходит отключение тех работоспособных элементов, функционально связанных с отказавшим, которые не принадлежат более ни одному работоспособному пути.

Требуется определить следующие показатели качества функционирования системы: стационарный коэффициент технического использования $K_u(\tau_1, \dots, \tau_N)$, среднюю удельную прибыль $S(\tau_1, \dots, \tau_N)$, приходящуюся на единицу календарного времени и средние удельные затраты $C(\tau_1, \dots, \tau_N)$, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования системы. Необходимо также определить величины суммарных наработок τ_i элементов, при достижении которых следует проводить ТО элементов для того, чтобы указанные показатели качества функционирования системы имели бы оптимальные значения.

Функционирование системы опишем полумарковским процессом $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [2, 3]

$$E = \left\{ i \overline{d} x^{(i)} \overline{u}, i = \overline{1, N} \right\},$$

где компоненты вектора $\overline{d} = (d_1, \dots, d_N)$ указывают на «физические» состояния элементов: $d_k = 1$ – k -й элемент находится в работоспособном состоянии, $d_k = 0$ – в состоянии АВ, $d_k = 2$ – в состоянии ТО; i –

номер элемента, изменившего свое «физическое» состояние последним. Компоненты вектора $\bar{x}^{-(i)}$ фиксируют время с момента последнего изменения состояния i -го элемента до ближайших моментов изменения состояний соответственно остальных элементов ($x_i = 0$), причем, если $d_k = 1$, то x_k – время до ближайшего аварийного отказа k -го элемента. Компоненты вектора $\bar{u} = (u_1, \dots, u_N)$ равны величинам наработок соответствующих элементов с момента окончания их АВ или ТО. Если $d_k = 2$, то считается, что $u_k = \tau_k$. В момент восстановления работоспособности i -го элемента после его ТО или АВ, наработка этого элемента равна нулю: $u_i = 0$.

Времена пребывания системы в состояниях определяются формулами

$$\theta_{i \bar{d} \bar{x}^{-(i)} \bar{u}} = \gamma_i^{(d_i)} \wedge \bigwedge_{k \neq i} x_k \bigwedge_{k \in \Omega_d^1} (\tau_k - u_k),$$

где $\wedge$ – знак минимума; Ω_d^1 – совокупность номеров компонент вектора $\bar{d}$, равных 1,

$$\gamma_i^{(d_i)} = \begin{cases} \alpha_i, & d_i = 1, \\ \beta_i, & d_i = 0, \\ \beta_i^p, & d_i = 2. \end{cases}$$

Опишем вероятности (плотности вероятностей) переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n, n \geq 0\}$. Заметим, что i -й элемент из физического состояния 1 может перейти в состояние 0 (АВ) и в состояние 2 (ТО), а из состояний 0 и 2 – только в состояние 1.

Обозначим $z_i = \bigwedge_{k \neq i} x_k \wedge \bigwedge_{k \in \Omega_d^1} (\tau_k - u_k)$, а через Ω_d^0 , Ω_d^2 – совокупность номеров компонент вектора

$\bar{d}$, равных соответственно 0 и 2. Из состояния $i \bar{d} \bar{x}^{-(i)} \bar{u}$, $i = 1, N$, переходы бывают следующих типов:

а) в совокупность состояний $i \bar{d}' \bar{x}'^{(i)} \bar{u}'$, $d'_i \neq 2$, с плотностью вероятности перехода $p_{i \bar{d} \bar{x}^{-(i)} \bar{u}}^{i \bar{d}' \bar{x}'^{(i)} \bar{u}'} = \psi_i^{(d_i)}(z_i - y)$, где $y < z_i$, $\psi_i^{(d_i)}(\cdot)$ – плотность распределения вероятностей СВ $\gamma_i^{(d_i)}$, $d'_k = d_k$, $x'_k = x_k - (z_i - y)$, $k \neq i$,

$$u'_k = \begin{cases} u_k + z_i - y, & k \in \Omega_d^1, \\ u_k, & k \in \Omega_d^0, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2, \end{cases} \quad k \neq i, \quad u'_i = \begin{cases} z_i - y, & i \in \Omega_d^1, \\ 0, & i \in \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2; \end{cases}$$

б) в совокупность состояний $i \bar{d}' \bar{x}'^{(i)} \bar{u}'$, $d'_i = 1$, $d'_i = 2$, с вероятностью перехода $p_{i \bar{d} \bar{x}^{-(i)} \bar{u}}^{i \bar{d}' \bar{x}'^{(i)} \bar{u}'} = \bar{F}_i(\tau_i - u_i)$, где $d'_k = d_k$, $x'_k = x_k - \tau_i$, $k \neq i$,

$$u'_k = \begin{cases} u_k + \tau_i, & k \in \Omega_d^1, \\ u_k, & k \in \Omega_d^0, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2; \end{cases}$$

в) в совокупность состояний $j \bar{d}' \bar{x}'^{(j)} \bar{u}'$, $j \neq i$, с плотностью вероятности перехода $p_{i \bar{d} \bar{x}^{-(i)} \bar{u}}^{j \bar{d}' \bar{x}'^{(j)} \bar{u}'} = \psi_i^{(d_i)}(z_i + y)$, где $y > 0$, $d'_k = d_k$, $k \neq j$, $x'_i = y$, $x'_k = x_k - z_i$, $k \neq i, j$,

$$u'_j = \begin{cases} u_j + z_i, & j \in \Omega_d^1, d'_j \neq 2, \\ \tau_j, & j \in \Omega_d^1, d'_j = 2, \\ 0, & j \in \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2, \end{cases} \quad u'_k = \begin{cases} u_k + z_i, & k \in \Omega_d^1, \\ u_k, & k \in \Omega_d^0, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2, \end{cases} \quad k \neq j.$$

Предположим, что для ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ выполняются условия существования и единственности стационарного распределения $\rho(\cdot)$, тогда оно определяется формулами:

$$\rho\left(\overline{id\bar{x}^{(i)}u}\right) = \begin{cases} \rho \prod_{k \in \Omega_d^0} f_k(u_k) \overline{G_k(x_k)} \prod_{k \in \Omega_d^1} f_k(u_k + x_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} \overline{G_k^p(x_k)} \overline{F_k(\tau_k)}, & i \notin \Omega_d^1, x_i = 0, \\ \rho \prod_{k \in \Omega_d^0} f_k(u_k) \overline{G_k(x_k)} \prod_{\substack{k \in \Omega_d^1 \\ k \neq i}} f_k(u_k + x_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} \overline{G_k^p(x_k)} \overline{F_k(\tau_k)}, & i \in \Omega_d^1, i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left(\int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(u_k) du_k + M\beta_k^p \overline{F_k}(\tau_k) + M\beta_k F_k(\tau_k) \right) \right]^{-1}.$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично подобному утверждению в [4].

Перейдем к нахождению стационарных характеристик системы. Разобьем фазовое пространство E состояний системы на два непересекающихся подмножества E_+ и E_- ; E_+ – подмножество работоспособных состояний, E_- – подмножество отказовых состояний:

$$E_+ = \left\{ \overline{id\bar{x}^{(i)}u}, \bar{d} \in D_+, i = \overline{1, N} \right\}, \quad E_- = \left\{ \overline{id\bar{x}^{(i)}u}, \bar{d} \in D_-, i = \overline{1, N} \right\}.$$

Здесь $D_+(D_-)$ – множество векторов $\bar{d}$, компоненты которых равны кодам «физических» состояний элементов системы, находящейся в подмножестве работоспособных (отказовых) состояний $E_+(E_-)$.

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ , среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент технического использования (КТИ) K_u системы найдем по формулам [2,3]

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_-} \rho(dz) P(z, E_+)}, \quad K_u = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \quad (2)$$

где $\rho(\cdot)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$, $m(z)$ – средние времена пребывания в состояниях системы, $P(z, E_+)$ ($P(z, E_-)$) – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ из отказовых (работоспособных) состояний в работоспособные (отказовые).

С учетом вида стационарного распределения ВЦМ (1) формулы (2) преобразуются к виду

$$T_+ = \frac{\sum_{d \in D_+} \prod_{k \in \Omega_d^1} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(s) ds \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k F_k(\tau_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p \overline{F_k}(\tau_k)}{\sum_{d \in D_+} \sum_{\substack{j \in G(d) \\ k \neq j}} \prod_{k \in \Omega_d^1} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(s) ds \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k F_k(\tau_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p \overline{F_k}(\tau_k)},$$

$$T_- = \left[\sum_{d \in D_-} \prod_{k \in \Omega_d^1} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(s) ds \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k F_k(\tau_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p \overline{F_k}(\tau_k) \right] /$$

$$/ \left\{ \sum_{d \in D_-} \left[\sum_{\substack{j \in I_0(d) \\ k \neq j}} \prod_{k \in \Omega_d^1} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(s) ds \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k F_k(\tau_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p \overline{F_k}(\tau_k) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{j \in I_2(d)} \prod_{k \in \Omega_d^1} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(s) ds \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k F_k(\tau_k) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^2 \\ k \neq j}} M\beta_k^p \overline{F_k}(\tau_k) \right] \right\}$$

$$K_u(\tau_1, \dots, \tau_N) = \frac{\sum_{d \in D_+} \prod_{k \in \Omega_d^1} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(s) ds \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k F_k(\tau_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p \overline{F_k}(\tau_k)}{\prod_{k=1}^N \left(\int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(s) ds + M\beta_k^p \overline{F_k}(\tau_k) + M\beta_k F_k(\tau_k) \right)}. \quad (3)$$

Здесь D'_+ – множество пограничных работоспособных «физических» состояний системы, т.е. множество векторов $\bar{d} \in D_+$, таких, что изменение некоторой одной компоненты с 1 на 0 или 2 переводит вектор $\bar{d}$ во множество D_- ; $G(d)$ – множество номеров компонент вектора $\bar{d} \in D'_+$, изменение значения каждой из которых с 1 на 0 или 2 переводит вектор $\bar{d}$ во множество D_- ; D'_- – множество пограничных отказовых состояний системы, т.е. множество векторов $\bar{d} \in D_-$, таких, что изменение некоторой одной компоненты с 0 или 2 на 1 переводит вектор $\bar{d}$ во множество D_+ ; $I_0(d)(I_2(d))$ – множество номеров компонент вектора $\bar{d} \in D'_-$, изменение значения каждой из которых с 0 (2) на 1 переводит вектор $\bar{d}$ во множество D_+ .

Выразим стационарные характеристики $T_+, T_-, K_u(\tau_1, \dots, \tau_N)$ системы через КТИ $K_i(\tau_i)$ элементов, которые определяются формулами [1]:

$$K_i(\tau_i) = \frac{\int_0^{\tau_k} \bar{F}_i(s) ds}{\int_0^{\tau_k} \bar{F}_i(s) ds + M\beta_i^p \bar{F}_i(\tau_i) + M\beta_i F_i(\tau_i)}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Обозначим через $M_1, \dots, M_\omega$ – все различные множества элементов путей системы [1]. Обратим внимание, что по определению, элементы, не принадлежащие множеству элементов пути, находятся в нерабочем состоянии, т.е. в состояниях 0 или 2. $M'_i, i = \overline{1, \omega'}$ – множества элементов пограничных путей; $G(M'_i), i = \overline{1, \omega'}$ – множество элементов пограничного пути M'_i , соответствующих номерам тех элементов, переход которых из работоспособного состояния в отказовое, приводит к отказу всей системы; $\Phi_i, i = \overline{1, s}$ – множества элементов сечений; $\Phi'_i, i = \overline{1, s'}$ – множества элементов пограничных сечений; $I(\Phi'_i), i = \overline{1, s'}$ – множество элементов пограничного сечения Φ'_i , соответствующих номерам тех элементов, переход которых из отказового состояния в работоспособное, приводит к восстановлению работоспособности всей системы.

Формула (3) с помощью преобразования сумм произведений средних после несложных преобразований приводится к виду:

$$T_+ = \frac{\sum_{i=1}^{\omega} \prod_{n \in M_i} K_n(\tau_n) \prod_{n \notin M_i} (1 - K_n(\tau_n))}{\sum_{i=1}^{\omega'} \sum_{j \in G(M'_i)} \frac{\prod_{n \in M'_i} K_n(\tau_n) \prod_{n \notin M'_i} (1 - K_n(\tau_n))}{\int_0^{\tau_j} \bar{F}_j(s) ds}}, \quad T_- = \frac{\sum_{i=1}^s \prod_{n \in \Phi_i} K_n(\tau_n) \prod_{n \notin \Phi_i} (1 - K_n(\tau_n))}{\sum_{i=1}^{s'} \sum_{j \in I(\Phi'_i)} \frac{\prod_{n \in \Phi'_i} K_n(\tau_n) \prod_{n \notin \Phi'_i} (1 - K_n(\tau_n))}{M\beta_j F_j(\tau_j) + M\beta_j^p \bar{F}_j(\tau_j)}},$$

$$K_u(\tau_1, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^{\omega} \prod_{n \in M_i} K_n(\tau_n) \prod_{n \notin M_i} (1 - K_n(\tau_n)) = \varphi(K_1(\tau_1), \dots, K_N(\tau_N)). \quad (4)$$

Здесь структурная функция системы $\varphi(z_1, \dots, z_N)$ задана в дизъюнктивной нормальной форме, однако ее можно представить многими эквивалентными способами, например, в линейной форме [1,5].

Для определения среднего удельного дохода $S(\tau_1, \dots, \tau_N)$, приходящегося на единицу календарного времени и средних удельных затрат $C(\tau_1, \dots, \tau_N)$, приходящихся на единицу времени исправного функционирования системы, используем формулы [6]

$$S = \frac{\int_E m(z) f_s(z) \rho(dz)}{\int_E m(z) \rho(dz)}, \quad C = \frac{\int_{E_+} m(z) f_c(z) \rho(dz)}{\int_{E_+} m(z) \rho(dz)}, \quad (5)$$

где $f_s(z), f_c(z)$ – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Функции $f_s(z)$ и $f_c(z)$ – с учетом обозначений, введенных в постановочной части статьи, имеют вид:

$$f_s(z) = \begin{cases} - \sum_{k \in \Omega_d^0} c_k - \sum_{k \in \Omega_d^2} c_k^p, & z \in \{i \overline{d} \overline{x}^{(i)} \overline{u}\}, i = \overline{1, N}, \text{ если } \Omega_d^1 = \emptyset, \\ \sum_{k \in \Omega_d^1} c_k^0 - \sum_{k \in \Omega_d^0} c_k - \sum_{k \in \Omega_d^2} c_k^p, & z \in \{i \overline{d} \overline{x}^{(i)} \overline{u}\}, i = \overline{1, N}, \text{ если } \Omega_d^1 \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$f_c(z) = \begin{cases} \sum_{k \in \Omega_d^0} c_k + \sum_{k \in \Omega_d^2} c_k^p, & z \in \{i \overline{d} \overline{x}^{(i)} \overline{u}\}, i = \overline{1, N}, \text{ если } \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2 \neq \emptyset, \\ 0, & z \in \{i \overline{d} \overline{x}^{(i)} \overline{u}\}, i = \overline{1, N}, \text{ если } \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2 = \emptyset. \end{cases}$$

После преобразований формулы (5) приводятся к виду

$$S(\tau_1, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N S_i(\tau_i), \quad (6)$$

$$C(\tau_1, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N \frac{C_i(\tau_i) K_i(\tau_i)}{K_u(\tau_1, \dots, \tau_N)}, \quad (7)$$

где $S_i(\tau_i) = \frac{c_i^0 \int_0^{\tau_k} \overline{F_i}(s) ds - c_i^p M \beta_i^p \overline{F_i}(\tau_i) - c_i M \beta_i F_i(\tau_i)}{\int_0^{\tau_k} \overline{F_i}(s) ds + M \beta_i^p \overline{F_i}(\tau_i) + M \beta_i F_i(\tau_i)}$ – средний удельный доход i -го элемента,

приходящийся на единицу календарного времени, а $C_i(\tau_i) = \frac{c_i^p M \beta_i^p \overline{F_i}(\tau_i) + c_i M \beta_i F_i(\tau_i)}{\int_0^{\tau_k} \overline{F_i}(s) ds}$ – средние

удельные затраты, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования i -го элемента. Заметим, что в [1] средние удельные затраты $C_i(\tau_i)$ называются интенсивностью эксплуатационных затрат

$$C_i(\tau_i) = c_i^p M \beta_i^p I_p(\tau_i) + c_i M \beta_i I_h(\tau_i), \quad I_h(\tau_i) = \frac{1}{M_h(\tau_i)} = \frac{F_i(\tau_i)}{\int_0^{\tau_k} \overline{F_i}(s) ds},$$

$$I_p(\tau_i) = \frac{1}{M_p(\tau_i)} = \frac{\overline{F_i}(\tau_i)}{\int_0^{\tau_k} \overline{F_i}(s) ds} \quad \text{– соответственно среднее число АВ и ТО; } M_h(\tau_i), M_p(\tau_i) \quad \text{–}$$

математическое ожидание времени между двумя АВ и ТО i -го элемента.

Оптимизация сроков проведения ТО элементов. Задача определения оптимальных показателей качества функционирования системы сводится к отысканию абсолютных экстремумов функций (4), (6) и (7). Заметим, что для достижения максимальных значений КТИ $K_u(\tau_1, \dots, \tau_N)$ и среднего удельного дохода $S(\tau_1, \dots, \tau_N)$ системы необходимо и достаточно оптимизировать величину наработки каждого элемента системы для проведения его ТО, что нельзя утверждать относительно минимальных средних удельных затрат $C(\tau_1, \dots, \tau_N)$ системы.

Приравнявая нулю частные производные функций $K_u(\tau_1, \dots, \tau_N)$, $S(\tau_1, \dots, \tau_N)$ и $C(\tau_1, \dots, \tau_N)$, получаем соответственно системы уравнений для определения оптимальных значений наработок $\tau_i^k, \tau_i^s, \tau_i^c, i = \overline{1, N}$:

$$\lambda_i(\tau_i) \int_0^{\tau_i} \overline{F_i}(t) dt - F_i(\tau_i) = \frac{M \beta_i^p}{M \beta_i - M \beta_i^p}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (8)$$

$$\lambda_i(\tau_i) \left(\int_0^{\tau_i} \bar{F}_i(t) dt + \frac{(c_i - c_i^p) M\beta_i M\beta_i^p}{(c_i + c_i^0) M\beta_i - (c_i^p + c_i^0) M\beta_i^p} \right) - F_i(\tau_i) = \frac{(c_i^p + c_i^0) M\beta_i^p}{(c_i + c_i^0) M\beta_i - (c_i^p + c_i^0) M\beta_i^p}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_i(\tau_i) \left(\int_0^{\tau_i} \bar{F}_i(t) dt + \frac{(c_i - c_i^p) M\beta_i M\beta_i^p}{c_i M\beta_i - c_i^p M\beta_i^p} \right) - F_i(\tau_i) - \frac{\partial}{\partial K_i} \ln \varphi(K_1(\tau_1), \dots, K_N(\tau_N)) \times \\ & \times \left[\sum_{j=1}^N C_j(\tau_j) K_j(\tau_j) \right] \cdot \left[\frac{M\beta_i^p - M\beta_i}{c_i M\beta_i - c_i^p M\beta_i^p} \left(\lambda_i(\tau_i) \int_0^{\tau_i} \bar{F}_i(t) dt - F_i(\tau_i) \right) + \frac{M\beta_i^p}{c_i M\beta_i - c_i^p M\beta_i^p} \right] = \\ & = \frac{c_i^p M\beta_i^p}{c_i M\beta_i - c_i^p M\beta_i^p}, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\lambda_i(t) = \frac{f_i(t)}{F_i(t)}$ – непрерывная интенсивность отказов i -го элемента.

Достаточными условиями существования конечных решений систем уравнений (8) – (10) является выполнение соответственно неравенств (для систем (9), (10) предполагается, что $\lambda_i(0) = 0$)

$$\begin{aligned} & \lambda_i(\infty) M\alpha_i > \frac{M\beta_i}{M\beta_i - M\beta_i^p}, \quad i = \overline{1, N}, \\ & \lambda_i(\infty) \left(M\alpha_i + \frac{(c_i - c_i^p) M\beta_i M\beta_i^p}{(c_i + c_i^0) M\beta_i - (c_i^p + c_i^0) M\beta_i^p} \right) > \frac{(c_i + c_i^0) M\beta_i}{(c_i + c_i^0) M\beta_i - (c_i^p + c_i^0) M\beta_i^p}, \quad i = \overline{1, N}, \\ & (c_i M\beta_i - c_i^p M\beta_i^p) (\lambda_i(\infty) M\alpha_i - 1) + \lambda_i(\infty) (c_i - c_i^p) M\beta_i M\beta_i^p - \\ & - \frac{\partial}{\partial K_i} \ln \varphi \left(\frac{M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\beta_1}, \dots, \frac{M\alpha_N}{M\alpha_N + M\beta_N} \right) \sum_{j=1}^N \frac{c_j M\beta_j}{M\alpha_j + M\beta_j} [(M\beta_i^p - M\beta_i) (\lambda_i(\infty) M\alpha_i - 1) + M\beta_i^p] > \\ & > c_i^p M\beta_i^p, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

В случае существования единственных решений систем уравнений оптимальные значения показателей качества функционирования системы определяются формулами:

$$\begin{aligned} K_{u \max} &= \varphi(K_1(\tau_1^k), \dots, K_N(\tau_N^k)), \quad K_i(\tau_i^k) = \frac{\bar{F}_i(\tau_i^k)}{F_i(\tau_i^k) + (M\beta_i - M\beta_i^p) f_i(\tau_i^k)}, \\ S_{\max} &= \sum_{i=1}^N S_i(\tau_i^s), \quad S_i(\tau_i^s) = \frac{c_i^0 \bar{F}_i(\tau_i^s) - (c_i M\beta_i - c_i^p M\beta_i^p) f_i(\tau_i^s)}{F_i(\tau_i^s) + (M\beta_i - M\beta_i^p) f_i(\tau_i^s)} \\ C_{\min} &= \frac{\sum_{i=1}^N C_i(\tau_i^c) K_i(\tau_i^c)}{K_u(\tau_1^c, \dots, \tau_N^c)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если системы уравнений имеют несколько решений, то оптимальные значения показателей качества находятся подстановкой каждого из них в формулу для случая единственного решения с последующим выбором наилучшего из них. Отсутствие корней какого-либо i -го уравнения систем (8), (9) означает, что функция $K_i(\tau_i)(S_i(\tau_i))$ является монотонной и ее экстремум достигается при $\tau_i \rightarrow \infty$. В

этом случае в формулах (11) следует полагать $K_i(\infty) = \frac{M\alpha_i}{M\alpha_i + M\beta_i}$, $S_i(\infty) = \frac{c_i^0 M\alpha_i - c_i M\beta_i}{M\alpha_i + M\beta_i}$.

Если система уравнений (10) не имеет решений, то следует исследовать на минимум всевозможные функции, которые получаются из (7) в результате замен

$K_i(\infty) = \frac{M\alpha_i}{M\alpha_i + M\beta_i}$, $C_i(\infty) = \frac{c_i M\beta_i}{M\alpha_i}$. Достижение экстремума при $\tau_i \rightarrow \infty$ говорит о том, что проводить предупредительное ТО i -го элемента нецелесообразно, поскольку оно ухудшает показатель качества функционирования системы.

В заключение приведем пример применения полученных результатов. Рассмотрим систему из трех элементов (рисунок 1). Нарботка на отказ элементов распределена по закону Вейбулла-Гнеденко с

плотностями: $f_i(t) = \frac{\gamma_i}{\theta_i} \cdot \left(\frac{t}{\theta_i}\right)^{\gamma_i-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta_i}\right)^{\gamma_i}}$, $i = \overline{1,3}$.

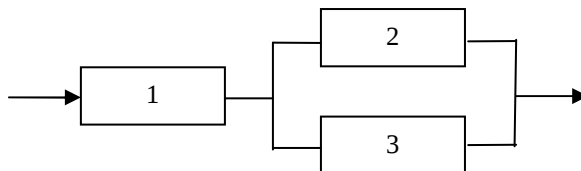


Рисунок 1 – Пример системы с монотонной структурой

В таблицах 1 и 2 представлены исходные данные и результаты расчетов.

Таблица 1 – Исходные данные системы

γ_i	θ_i	$M\alpha_i$, ч	$M\beta_i$, ч	$M\beta_i^p$, ч	c_i^0 , у.е./ч	c_i , у.е./ч	c_i^p , у.е./ч
2	50	44,311	5	1	5	1	0,2
3	15	13,395	3	1	7	3	2
4	20	18,128	4	0,5	9	3	1

Таблица 2 – Результаты расчетов

τ_i^k , ч	$K_u^{\max}$	K_u^{∞}	τ_i^s , ч	$S^{\max}$	S^{∞}	τ_i^c , ч	$C^{\max}$	C^{∞}
25,533	0,916	0,869	23,131	18,553	16,393	15,608	0,507	1,373
9,548			8,982			7,694		
9,354			8,852			6,909		

Здесь через K_u^{∞} , S^{∞} , C^{∞} обозначены показатели качества функционирования системы в случае, когда ТО элементов не проводится. Проведение ТО элементов улучшает эти показатели соответственно на 5,406 %, 13,178 %, 63,068 %.

Предполагаемое направление дальнейших исследований – исследование стратегии календарного ТО системы с учетом минимального аварийного восстановления ее элементов.

Библиографический список

1. Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
2. Корольюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Корольюк, А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1982. — 236 с.
3. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.И. Новиков, А.Ф. Турбин. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 209 с.
4. Песчанский А.И. Оптимизация технического обслуживания по наработке каждого элемента с последовательной структурой / А.И. Песчанский // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 126–135.
5. Половко А.М. Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 704 с.
6. Шуренков В.М. Эргодические процессы Маркова / В.М. Шуренков. — М.: Наука, 1989. — 336 с.

Поступила в редакцию 28.03.2008 г.