

УДК 621.923

Е.А. Владецкая,

С.М. Братан,

Д.А. Каинов

Севастопольский национальный технический университет

Университетская 33, Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ КРУГЛОМ ВНУТРЕННЕМ ШЛИФОВАНИИ**

*Произведено определение характеристик состояний равновесия динамики технологической системы круглого внутреннего шлифования*

Для оценки параметров колебаний, которые в силу различных внешних воздействий и периодических изменений внутренних параметров [1], могут возникать и/или поддерживаться в динамической технологической системе (ТС) обработки, необходимо определение положений потенциального равновесия механической системы, являющейся носителем свойств технологического процесса (ТП) [2].

В частности, положения равновесия динамической системы круглого внутреннего шлифования может оказаться не единственным, что определяет возможность появления автоколебаний с вполне определенными параметрами в ТС и периодических изменений параметров ТП.

Целью исследования является оценка параметров двухмассовой динамической модели процесса круглого внутреннего шлифования при анализе виброустойчивости технологической системы и при выборе и назначении режимов обработки.

Рассматривается определение положений статического равновесия для двухмассовой динамической модели процесса круглого внутреннего шлифования.

Расчетная схема для такого представления изображена на рисунке 1.

В соответствии с работой [2], основными компонентами модели, характеризующей механическую часть динамической системы круглого внутреннего шлифования, являются: заготовка, инструмент (шлифовальный круг), зона резания (взаимопроникновения инструмента и заготовки), элементы приспособлений и станка.

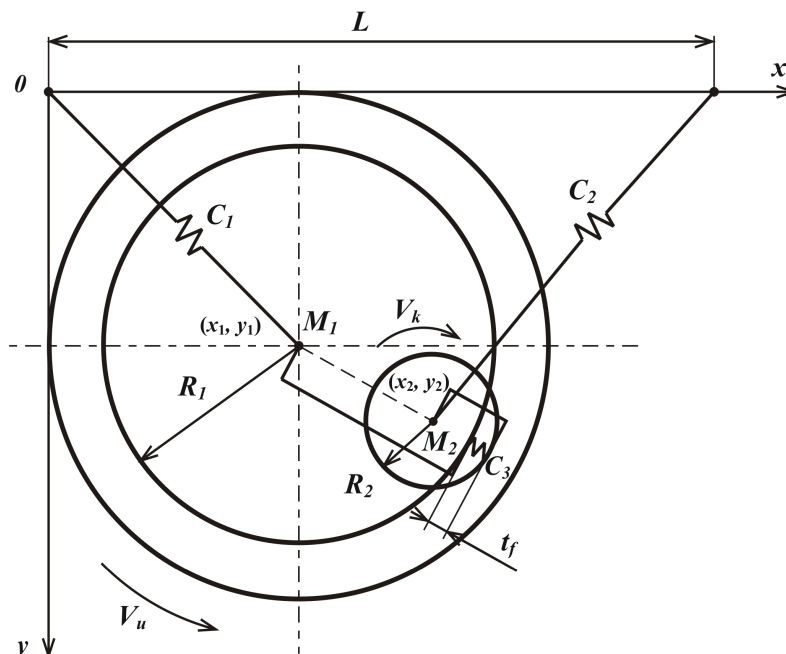


Рисунок 1 – Расчетная схема динамической системы при круглом внутреннем шлифовании

В рамках рассматриваемого представления считается, что заготовка, закрепленная в бабке станка, имеет внутренний радиус  $R_2(\tau) = R_{0,2}(\omega_2 \cdot (\tau - \tau_{2,0}) + \varphi_{0,2})$ , эквивалентную массу  $M_2$  (совместно с массой бабки) и соответствующий момент инерции  $J_2$ . Заготовка вращается с постоянной угловой

скоростью  $\omega_2$  вокруг полюса с текущими координатами  $\{x_2(\tau), y_2(\tau), z_2(\tau)\}$ . Считается, что опора и заготовка подчиняются закону Гука с коэффициентом жесткости, равным  $c_2$ .

Инструмент – шлифовальный круг радиусом  $R_1(\tau) = R_{0,1}(\omega_1 \cdot (\tau - \tau_{0,1}) + \varphi_{0,1})$ , массой  $M_k$  установлен на борштанге, массой  $M_b$  и моментом инерции  $J_b$ , вращается с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг полюса  $O_1$  с координатами  $\{x_1(\tau), y_1(\tau), z_1(\tau)\}$ . Центр вращения инструмента расположен на борштанге массой  $M_b$ , расположенной между точками  $\{x_1(\tau), y_1(\tau), z_1(\tau)\}$  и  $\{0,0,0\}$ . Могут рассматриваться эквивалентные динамические параметры  $M_1 = M_k + M_b$  и  $J_1 = J_k + J_b$ .

В качестве модели борштанги может рассматриваться одноопорная балка, имеющая возможность свободного вращения вокруг опоры  $\{0,0,0\}$ . В рамках расчетной схемы считается, что угловая скорость вращения борштанги  $\omega_1 = \text{const}$ . Последнее обеспечивается соответствующими «жесткими» скоростными характеристиками динамики привода. При малых нагрузках на борштангу в точке  $\{x_1(\tau), y_1(\tau), z_1(\tau)\}$  характеристики ее отклонений от положения равновесия линейно зависят от приложенных сил с коэффициентом  $c_1$ .

С учетом расчетной схемы пренебрегаем изменением радиусов и масс заготовки и инструмента вследствие съема материала и износа, эффектами изменения геометрических параметров вследствие нагрева элементов ТС, а также процессами гидромеханического взаимодействия детали и заготовки с СОЖ в процессе обработки

Следуя выводам из работы [2], при анализе характеристик ТП в качестве отдельного элемента ТС шлифования, выделяется зона резания, имеющая глубину  $t_f$ , которая отсчитывается от поверхности инструмента в направлении центра заготовки, т.е. по прямой, проходящей через точки  $\{x_1(\tau), y_1(\tau)\}$  и  $\{x_2(\tau), y_2(\tau)\}$ .

Параметр  $L(\tau)$  – расстояние между концами опор, присутствующий в вышеприведенных соотношениях, определяется начальным расстоянием между центрами заготовки и центром вращения шлифовального круга и подачей, и определяется выражением

$$L(\tau) = L(0) - \int_0^{\tau} s(\tau) d\tau. \quad (1)$$

В дальнейшем для упрощения записи зависимость переменных от времени  $\tau$  в большинстве случаев не указывается.

Вопросу определения силы резания, вызываемой взаимодействием инструмента и заготовки, посвящено большое количество работ. Эта сила зависит от квадрата глубины резания, материала заготовки и ряда других параметров, которые, однако, в период обработки одной и той же заготовки можно считать постоянными. Следуя рекомендациям работы [1],

$$F_3 = c_{32} \cdot t_f^2, \quad (2)$$

где  $c_{32}$  – коэффициент квадратичной жесткости, Н/м<sup>2</sup>;  $t_f$  – глубина резания, м.

В соответствии с принципом Гамильтона положению покоя (т.е. равновесия) ТС соответствует минимум ее потенциальной энергии. Абсолютный минимум потенциальной энергии достигается при неположительных значениях  $t_f$ . Однако такое решение не соответствует условиям протекания ТП шлифования, выполняемых только для положительных значений глубины внедрения абразивных зерен в заготовку.

В качестве дополнительного условия существования ТП целесообразно использование требования обеспечения заданной глубины резания

$$t_f = t_{f0}. \quad (3)$$

Задача определения минимума потенциальной энергии при выполнении условия (3) может рассматриваться как задача поиска условного минимума потенциальной энергии системы.

Потенциальная энергия поступательных перемещений рассматриваемой механической системы определится выражением

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \Pi_i + g \cdot \sum_{i=1}^2 M_i y_i, \quad (4)$$

где элементы первой суммы характеризуют работу при перемещении элементов системы из начального положения для опор ( $i=1,2$ ) и потенциальную энергию зоны резания ( $i=3$ ). Элементы второй суммы

представляют работу при перемещении материальных точек системы (массы детали и массы круга) в положение  $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ .

С учетом ранее введенных обозначений, работы для изменения состояния опоры круга и опоры детали определяются как

$$\Pi_1 = \frac{c_1}{2}(x_1^2 + y_1^2) \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \frac{c_2}{2}[(A - x_2)^2 + y_2^2]. \quad (5)$$

В соответствии с выражением (1), работу силы резания для обеспечения глубины резания  $t_f$  можно записать в форме

$$\Pi_{3P} = \frac{c_{32}}{3} \{ \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} - (r_2 + r_1) \}^3. \quad (6)$$

Необходимо отметить, что  $c_{32}$  – коэффициент квадратической жесткости и его размерность (Н/м<sup>2</sup>) отличается от размерностей коэффициентов линейных жесткостей (Н/м).

Условием, которое должно выполняться при резании, является модифицированное уравнение баланса перемещений [1]

$$R_1 + R_2 - L - t_{f0} = 0, \quad (7)$$

где

$$L = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}. \quad (8)$$

Для определения положения элементов системы применим метод неопределенного множителя Лагранжа. Критерий качества для определения условного минимума потенциальной энергии механической системы в соответствии с методом Лагранжа и соотношениями (3), (7), с учетом (5) и (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} W(x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda) = & \frac{c_1}{2}[x_1^2 + y_1^2] + \frac{c_2}{2}[(A - x_2)^2 + y_2^2] + \\ & + \frac{c_{32}}{3} \{ \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} - (R_2 + R_1) \}^3 + \\ & + \frac{c_{31}}{2} \{ \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} - (R_2 + R_1) \}^2 + g(M_1 y_1 + M_2 y_2) + \\ & + \lambda \cdot [R_2 + R_1 - \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} - t_{f0}]. \end{aligned} \quad (9)$$

При отсутствии необходимости учета линейного компонента, а также силы взаимодействия инструмента и заготовки, достаточно приравнять коэффициент квадратической жесткости  $c_{31} = 0$ . Необходимыми условиями экстремума критерия (9) является система уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial q} = 0, \forall q \in \{x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda\}. \quad (10)$$

Полученные производные с учетом уравнения (8) записываются в виде

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = c_1 x_1 + \frac{c_{32} \cdot t_{f0}^2 \cdot (x_2 - x_1)}{L} + \frac{c_{31} \cdot t_{f0} \cdot (x_1 - x_2)}{L} - \frac{\lambda \cdot (x_2 - x_1)}{L} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2} = c_2(x_2 - A) + \frac{c_{32} \cdot t_{f0}^2 \cdot (x_2 - x_1)}{L} + \frac{c_{31} \cdot t_{f0} \cdot (x_2 - x_1)}{L} - \frac{\lambda(x_2 - x_1)}{L} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y_1} = c_1 y_1 + \frac{c_{32} \cdot t_{f0}^2 \cdot (y_2 - y_1)}{L} + \frac{c_{31} \cdot t_{f0} \cdot (y_2 - y_1)}{L} - \frac{\lambda \cdot (y_2 - y_1)}{L} + gM_1 = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y_2} = c_2 y_2 + \frac{c_{32} \cdot t_{f0}^2 \cdot (y_2 - y_1)}{L} + \frac{c_{31} \cdot t_{f0} \cdot (y_2 - y_1)}{L} - \frac{\lambda \cdot (y_2 - y_1)}{L} + gM_2 = 0; \quad (14)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = R_2 + R_1 - A - t_{f0} = 0. \quad (15)$$

Здесь введено обозначение

$$A = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}. \quad (16)$$

Уравнения (11), (12) целесообразно привести к общему знаменателю.

В силу выражения (16), условие  $L = 0$  выполняется только, если одновременно выполняются два соотношения:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow A = 0, \quad (17)$$

что соответствует технологически невыполнимой ситуации совпадения центров вращения инструмента и заготовки. Следовательно, в рассматриваемом случае  $L \neq 0$ .

В силу (16), после умножения левых и правых частей соотношений (11) – (14) на  $L$ , с учетом выражения (15), можно записать:

$$\begin{cases} c_1 x_1 (R_2 + R_1 - t_{f0}) + (c_{32} \cdot t_{f0}^2 + c_{31} \cdot t_{f0} - \lambda) \cdot (x_1 - x_2) = 0, \\ c_2 (x_2 - L)(R_2 + R_1 - t_{f0}) + (c_{32} \cdot t_{f0}^2 + c_{31} \cdot t_{f0} - \lambda) \cdot (x_2 - x_1) = 0, \\ (c_1 y_1 + g M_1)(R_2 + R_1 - t_{f0}) + (c_{32} \cdot t_{f0}^2 + c_{31} \cdot t_{f0} - \lambda) \cdot (y_1 - y_2) = 0, \\ (c_2 y_2 + g M_2)(R_2 + R_1 - t_{f0}) + (c_{32} \cdot t_{f0}^2 + c_{31} \cdot t_{f0} - \lambda) \cdot (y_2 - y_1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Хотя система уравнений (18), также как и исходное представление (11) – (14) включают в себя произведения неизвестных, по принципу суперпозиции они являются линейными относительно каждой из этих величин в отдельности.

Не претендуя на общность предлагаемого подхода, предлагается вначале решить систему (18), как систему линейных уравнений с неопределенным параметром  $\lambda$ , и затем подставить полученные параметрические решения и соотношение (16) в равенство (15). При этом (15) обращается в тождество по параметру  $\lambda$ , из которого непосредственно и определяется коэффициент Лагранжа.

Параметрическое решение системы (18) можно привести к виду:

$$x_1 = \frac{c_2 A (-c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2 + \lambda)}{(-c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2 + \lambda)(c_1 + c_2) - c_1 c_2 (R_2 + R_1 - t_{f0})}, \quad (19)$$

$$y_1 = \frac{g[(\lambda - c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2)(M_1 + M_2) - c_2 M_1 (R_2 + R_1 - t_{f0})]}{(-c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2 + \lambda)(c_1 + c_2) - c_1 c_2 (R_2 + R_1 - t_{f0})}, \quad (20)$$

$$x_2 = \frac{A c_2 [-c_1 (R_2 + R_1) - c_{32} t_{f0}^2 + \lambda - t_{f0} (c_{31} - c_1)]}{(-c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2 + \lambda)(c_1 + c_2) - c_1 c_2 (R_2 + R_1) + c_2 c_1 t_{f0}}, \quad (21)$$

$$y_2 = \frac{g[(\lambda - c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2)(M_1 + M_2) - c_1 M_2 (R_2 + R_1 - t_{f0})]}{(-c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2 + \lambda)(c_1 + c_2) - c_1 c_2 (R_2 + R_1 - t_{f0})}. \quad (22)$$

Уравнения (19) – (22) (см. (16)) имеют одинаковые знаменатели:

$$Z = [(-c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2 + \lambda)(c_1 + c_2) - c_1 c_2 (R_1 + R_2 - t_{f0})]. \quad (23)$$

Подстановка параметрических решений (19) – (23) в (15) после соответствующих преобразований приводит к соотношению

$$\sqrt{\frac{[(c_1 c_2 L)^2 + g^2 (c_1 M_2 - c_2 M_1)^2]}{Z^2}} = 1, \quad (24)$$

которое, при учете (23), может выполняться только при равенстве числителя и знаменателя подкоренного выражения, т.е.

$$\begin{aligned} [(L c_1 c_2)^2 + g^2 (c_1 M_2 - c_2 M_1)^2] = \\ = [(-c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2)(c_1 + c_2) + \lambda(c_1 + c_2) - c_1 c_2 (R_2 + R_1) + c_2 c_1 t_{f0}]^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Определение множителя Лагранжа сводится к решению квадратного уравнения относительно искомого переменного  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2)^2 \lambda^2 + [2(c_1 + c_2)(-c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2 - c_1 c_2 (R_2 + R_1) + c_2 c_1 t_{f0})] \lambda + \\ + [(-c_{31} t_{f0} - c_{32} t_{f0}^2)(c_1 + c_2) - c_1 c_2 (R_2 + R_1) + c_2 c_1 t_{f0}] = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Существование двух значений множителя Лагранжа определяет неединственность экстремума для анализируемой функции, т.е. существование не одного, а двух потенциально устойчивых состояний динамической системы круглого наружного шлифования, т.е.

$$\lambda_{1,2} = \frac{[(c_{32}t_{f0}^2 + c_{31}t_{f0})(c_1 + c_2) + c_1c_2(R_2 + R_1 - t_{f0})]}{(c_1 + c_2)} \pm \frac{[(Ac_1c_2)^2 + g^2(c_1M_2 - c_2M_1)^2]}{(c_1 + c_2)}. \quad (27)$$

Подстановка (27) в (18) после ряда преобразований приводит к соотношениям, определяющим состояние равновесия при  $\lambda = \lambda_1$ :

$$x_{1,1} = \frac{Ac_2[(M_2c_1 - c_2M_1)^2g^2 - c_1c_2(R_2 + R_1 - t_{f0} - Ac_1c_2)]}{(c_1 + c_2)[(M_2c_1 - c_2M_1)^2g^2 + (c_1c_2A)^2]}, \quad (28)$$

$$y_{1,1} = \frac{[c_2(R_2 + R_1 - t_{f0}) - (M_1 + M_2)(c_1M_2 - c_2M_1)g^2](c_1M_2 - c_2M_1) - (M_1 + M_2)(c_1c_2A)^2}{(c_1 + c_2)[(M_2c_1 - c_2M_1)^2g^2 + (c_1c_2A)^2]}g^2, \quad (29)$$

$$x_{2,1} = \frac{c_2A[c_1^2(R_2 + R_1 - t_{f0}) + (c_1c_2A)^2 + (c_1M_2 - c_2M_1)^2g^2]}{(c_1 + c_2)[(M_2c_1 - c_2M_1)^2g^2 + (c_1c_2A)^2]}, \quad (30)$$

$$y_{2,1} = \frac{(c_1M_2 - c_2M_1)^2g^2(M_1 + M_2) + c_1(c_1M_2 - c_2M_1)(R_2 + R_1 - t_{f0}) + (M_1 + M_2)(c_1c_2A)^2}{(c_1 + c_2)[(M_2c_1 - c_2M_1)^2g^2 + (c_1c_2A)^2]}g. \quad (31)$$

Значение  $\lambda = \lambda_2$  также определяет набор значений координат системы, характеризующих второе устойчивое состояние потенциального равновесия системы:

$$x_{1,2} = \frac{Ac_2[(M_2c_1 - c_2M_1)^2g^2 + c_1c_2(R_2 + R_1 - t_{f0} - Ac_1c_2)]}{(c_1 + c_2)[(M_2c_1 - c_2M_1)^2g^2 + (c_1c_2A)^2]}, \quad (32)$$

$$y_{1,2} = \frac{[c_2(R_2 + R_1 - t_{f0}) - (M_1 + M_2)(c_1M_2 - c_2M_1)g^2](c_1M_2 - c_2M_1) - (M_1 + M_2)(c_1c_2A)^2}{(c_1 + c_2)[(M_2c_1 - c_2M_1)^2g^2 + (c_1c_2A)^2]}g^2, \quad (33)$$

$$x_{2,2} = \frac{c_2A[-c_1^2(R_2 + R_1 - t_{f0}) + (c_1c_2A)^2 + (c_1M_2 - c_2M_1)^2g^2]}{(c_1 + c_2)[(M_2c_1 - c_2M_1)^2g^2 + (c_1c_2A)^2]}, \quad (34)$$

$$y_{2,2} = \frac{[c_1(R_2 + R_1 - t_{f0}) - (M_1 + M_2)(c_1M_2 - c_2M_1)g^2](c_1M_2 - c_2M_1) - (M_1 + M_2)(c_1c_2A)^2}{(c_1 + c_2)[(M_2c_1 - c_2M_1)^2g^2 + (c_1c_2A)^2]}g. \quad (35)$$

Математические модели служат основой определения характеристик как собственных, так и вынужденных колебаний ТС шлифования.

Они должны применяться как при анализе виброустойчивости станочных систем, так и при выборе и назначении оптимальных технологических режимов обработки на станках с ЧПУ.

Перспективой дальнейших исследований является рассмотрение динамических моделей технологических систем шлифовальных станков с ЧПУ различных типов в условиях автоматизированного производства при взаимодействии с внешним оборудованием, а также с учетом эффективности виброзащитных устройств.

#### Библиографический список

1. Королев А.В. Теоретико-вероятностные основы абразивной обработки. Ч 2. Взаимодействие инструмента и заготовки при абразивной обработке / А.В. Королев, Ю.К. Новоселов. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1989. — 160 с.
2. Каинов Д.А. Проблемы построения критериев качества при производстве деталей / Д.А. Каинов // Вестник НТУУ «КПИ». — 2007. — № 54. — С. 108–113.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика / А.П. Маркеев. — М.: Наука, 1990. — 418 с.
4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин. — СПб.: Лань, 2003. — 304 с.

Поступила в редакцию 9.06.2008 г.