

УДК 677.72.001.24

В.Г. Хромов, М.В. Хромова*Севастопольский национальный технический университет**Ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***АНАЛИЗ ФОРМЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ НАРУЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КРУГЛОГО СПИРАЛЕВИДНОГО СТЕРЖНЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ**

Рассматривается одна из актуальных задач теории проектирования многопроволочных витых изделий. Предложен эффективный вариант решения задачи с использованием методов аналитической геометрии и компьютерных технологий.

Задача о пересечении наружной поверхности спиралевидного стержня с плоскостью, расположенной под некоторым углом (произвольная плоскость) к плоскости его поперечного сечения, является составной частью теории конструирования многопроволочных витых изделий (канаты, кабели, металлокорд). Первоначальную постановку и анализ этой задачи находим в научных публикациях 40 – 60-х годов прошлого века [1–5]. Для ее решения в работах Нестерова П.П., Иозефа Г.И. [1, 4, 5] использовались методы начертательной геометрии, т.е. последовательное графическое проектирование точек спиралевидной поверхности на продольную плоскость витого изделия, а затем на плоскость основания образующего цилиндра (рисунок 1). Житков Д.Г. и Поспехов И.Г. рассматривали задачу в аналитической постановке [3].

В связи с ограниченными возможностями ручных расчетов и графических построений в указанный период точный количественный анализ задачи был затруднен и выполнен лишь для отдельных вариантов витых изделий. При этом показано, что наружный контур круглой проволоки в поперечном сечении каната имеет сложную форму, которая в общем случае может существенно отличаться от эллиптической (рисунок 1). При малых углах наклона спиральной оси проволоки данный контур приближается к форме эллипса. На основании этого в дальнейших работах по прикладной теории проектирования стальных канатов [5 – 7] традиционно использовалась упрощенная линия в виде эллипса с полуосями $a = d_1/2 \cos \alpha$, $b = d_1/2$, (d_1 – диаметр проволоки, α – угол свивки каната). В настоящее время расширение номенклатуры витых изделий и повышение требований к их качеству стимулирует разработку более совершенных средств численного и графического анализа геометрической структуры. Этим обусловлена актуальность представленных в данной работе исследований.

Целью работы является совершенствование методики анализа формы наружного контура спиралевидного стержня в плоскости поперечного сечения витого изделия на основе применения компьютерных технологий.

Рассмотрим спиральный канат с произвольными параметрами: D – наружный диаметр каната, H – шаг свивки, $k = H/D$ – кратность свивки, d_o – диаметр сердечника. Геометрическая структура исследуемого каната изображена на рисунке 2 и включает цилиндрический сердечник, на поверхности которого лежат несколько пространственно-изогнутых круглых стержней (на рисунке 2 условно показан один стержень). Продольная ось каждого стержня (проволоки) имеет форму спирали с заданными параметрами: $r_c = (d_o + d_1)/2$ – радиус свивки, $\alpha = \arctg(2\pi r_c / H)$ – угол свивки.

Для математического описания наружной

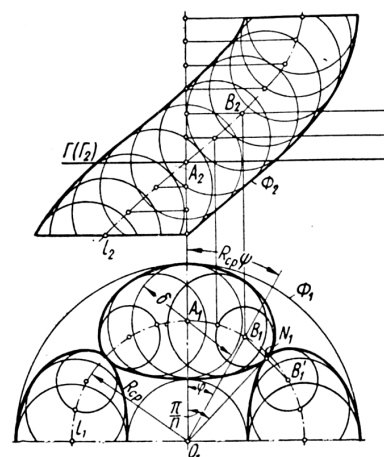


Рисунок 1 – Пример построения линии пересечения наружной поверхности спиралевидного стержня с плоскостью основания образующего цилиндра на основе методов начертательной геометрии

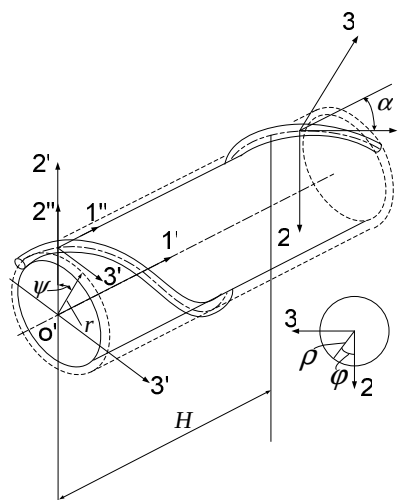


Рисунок 2 – Используемые системы координат

поверхности отдельного стержня используем три системы координат (рисунок 2): 1,2,3 – естественная система, связанная с продольной спиралевидной осью стержня; 1',2',3' – система в поперечном сечении каната с началом на его продольной оси; 1'',2'',3'' – система в поперечном сечении каната с началом на оси стержня.

Наружную поверхность спиралевидного стержня рассматриваем как множество точек, образованных перемещением базовой окружности (исходного профиля) вместе с естественной системой координат 1,2,3. Введены два переменных параметра: ϕ – угол, определяющий положение точки на базовой окружности и φ – угол, определяющий положение системы 1,2,3 на продольной оси стержня (рисунок 2).

Координаты точек базовой окружности в системе 1,2,3 определяются по формулам

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \rho \cos \phi, \quad x_3 = \rho \sin \phi, \quad (1)$$

где $\rho = d_1 / 2$ – радиус окружности.

Положение начальной точки 0 системы 1,2,3 задаем координатами в системе 1'',2'',3'' :

$$x''_{01} = r_c \cdot \phi / \operatorname{tg} \alpha, \quad x''_{02} = r_c (\cos \phi - 1), \quad x''_{03} = r_c \sin \phi.$$

Теперь можно определить координаты произвольной точки, лежащей на базовой окружности, в системе 1'',2'',3'' с помощью линейных преобразований исходных координат (1):

$$x''_i = x''_{0i}(\phi) + \sum_j a_{ij}(\phi) \cdot x_j(\phi). \quad (2)$$

Здесь $a_{ij}(\phi)$ – коэффициенты матрицы преобразований (поворота) определяются по известным формулам [3]:

$$a_{ij}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -\sin \alpha \sin \phi & -\cos \phi & \cos \alpha \sin \phi \\ \sin \alpha \cos \phi & -\sin \phi & -\cos \alpha \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Формулы (2) представляют собой параметрические уравнения наружной поверхности спиралевидного стержня. Запишем уравнение плоскости поперечного сечения витого изделия в виде $x''_1 = 0$. Отсюда следует математическое условие пересечения указанной плоскости с поверхностью (2):

$$x''_1 = x''_{01}(\phi) + \sum_j a_{1j}(\phi) \cdot x_j(\phi) = 0.$$

Решение этого уравнения с учетом матрицы (4) дает формулу связи для двух угловых параметров:

$$\phi(\varphi) = \rho \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi / r_c. \quad (4)$$

После подстановки (4) в (2) получим искомые параметрические уравнения линии пересечения наружной поверхности спиралевидного стержня с плоскостью поперечного сечения витого изделия:

$$x''_2 = x''_{02}(\phi(\varphi)) + \sum_j a_{2j}(\phi(\varphi)) \cdot x_j(\varphi), \quad x''_3 = x''_{03}(\phi(\varphi)) + \sum_j a_{3j}(\phi(\varphi)) \cdot x_j(\varphi). \quad (5)$$

Используя формулы (4), (5) и программные математические пакеты, можно выполнять количественный и визуальный анализ геометрии витого изделия согласно следующей методике. Задаем диапазон изменения параметра $\varphi = 0 \dots 2\pi$ с выбранным шагом. Вычислены координаты (5) и построены графики исследуемой линии пересечения. На рисунке 3 изображены примеры графического анализа структуры спирального каната со следующими размерами: $d_o = 1$ мм, $d_1 = 1$ мм, $D = 3$ мм, при различных значениях угла свивки α .

На рисунке 3 одна из линий описывает точный наружный контур проволоки согласно (5), а другая представляет собой эллипс, описанный уравнениями:

$$x''_{2\varnothing} = (d_1 / 2 \cos \alpha) \cos p, \quad x''_{3\varnothing} = (d_1 / 2) \sin p. \quad (6)$$

Из рисунков видно, что при $\alpha = 60^\circ \dots 40^\circ$ указанные линии заметно отличаются друг от друга. При $\alpha \leq 20^\circ$ и выбранном масштабе эти линии практически совпадают.

Для более подробного сравнительного анализа указанных линий с помощью (5) и (6) используем радиальные координаты точек, лежащих на точной $r(\beta, \alpha) = \sqrt{(x''_2)^2 + (x''_3)^2}$ и эллиптической $r_{\varnothing}(\beta, \alpha) = \sqrt{(x''_{2\varnothing})^2 + (x''_{3\varnothing})^2}$ линиях (β – полярный угол). Тогда относительную погрешность,

возникающую при замене действительной линии 1 на приближенную эллиптическую линию 2, можно рассчитать по формуле

$$\Delta(\beta, \alpha) = \frac{|r(\beta, \alpha) - r_3(\beta, \alpha)|}{r(\beta, \alpha)} 100 \% . \quad (7)$$

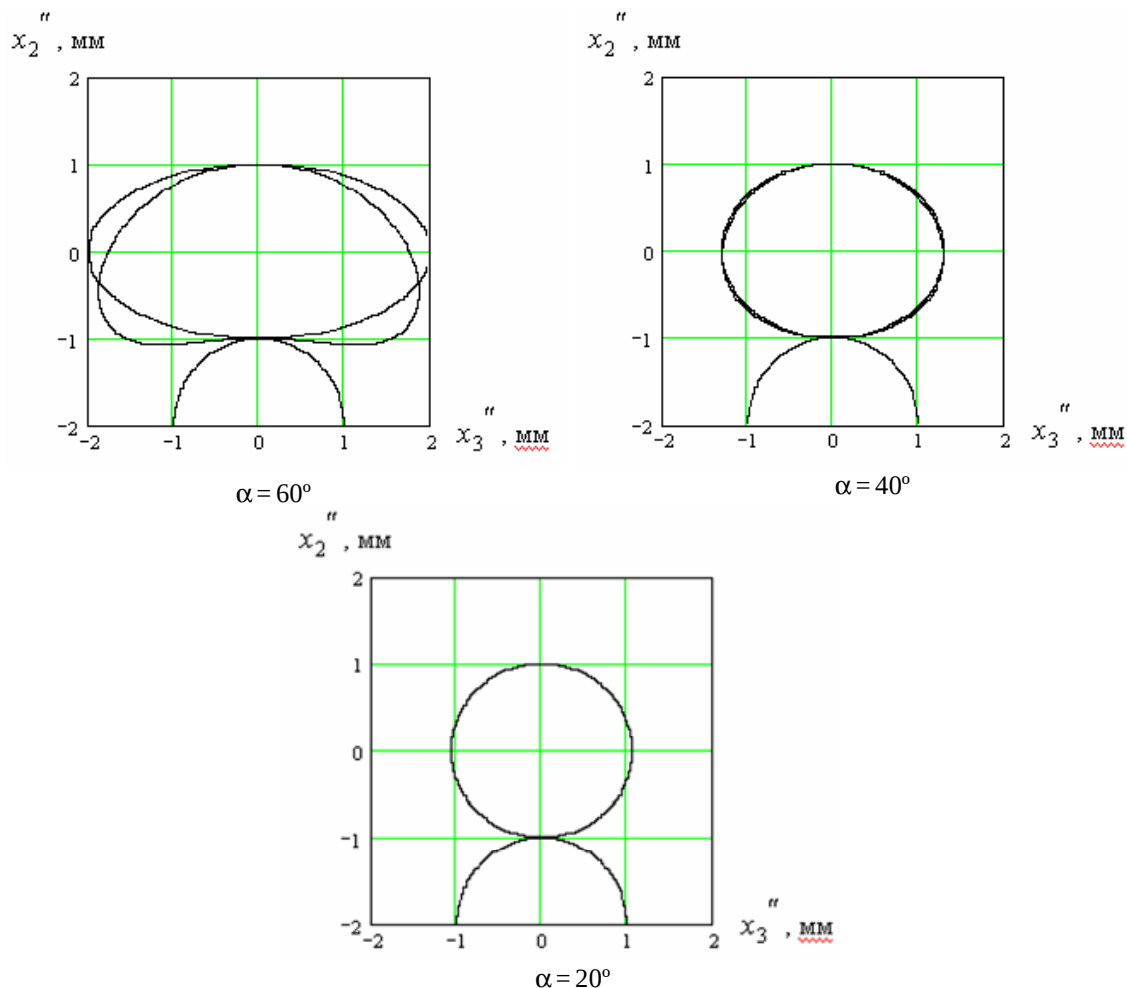


Рисунок 3 – Действительный и упрощенный эллиптический варианты линии пересечения наружной поверхности спиралевидного стержня с плоскостью основания образующего цилиндра при различных значениях угла свивки

Примеры графиков функции (7) для исследуемого каната показаны на рисунке 4. Видно, что в диапазоне $\beta = -\pi/2 \dots \pi/2$ функция $\Delta(\beta, \alpha)$ имеет два явных экстремума.

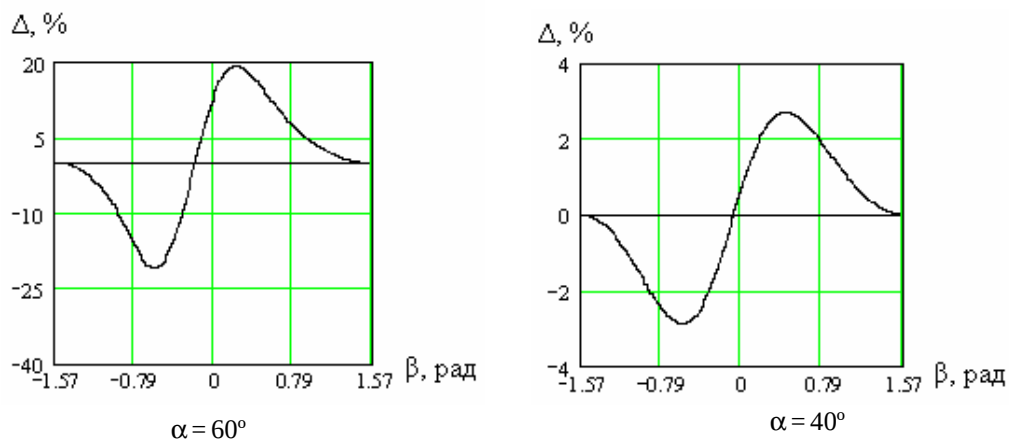


Рисунок 4 – Графики зависимости относительной погрешности радиуса от полярного угла

Максимальное значение погрешности можно определить с помощью стандартной процедуры $\Delta_{\max} = \max(\Delta_i)$. По результатам расчетов строим график функции $\Delta_{\max}(\alpha)$. Для указанного выше примера расчетный график показан на рисунке 5. Подобный график дает исчерпывающую количественную информацию о возможности замены (в каждом конкретном случае) точных уравнений исследуемой линии (5) на приближенную эллиптическую форму (6).

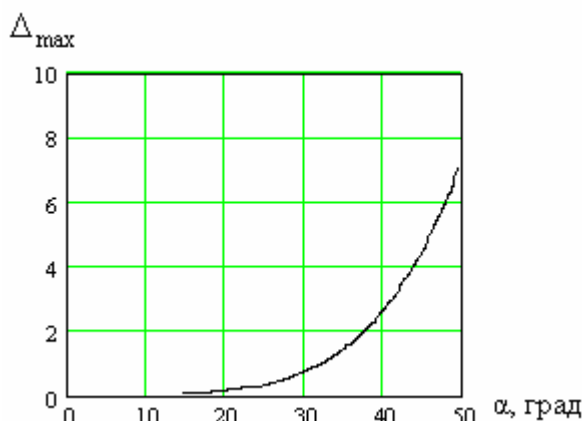


Рисунок 5 – График зависимости максимальной погрешности радиуса от угла свивки

На основании полученных результатов исследований можно сделать вывод, что предложенная методика является новым эффективным средством численного и графического анализа линии пересечения наружной поверхности спиралевидного стержня с наклонной плоскостью.

Основные компоненты методики планируется использовать для совершенствования автоматизированных средств в области проектирования геометрической структуры многопроволочных витых изделий, что и является предметом дальнейших исследований.

Библіографічний список

1. Нестеров П.П. Основы конструирования шахтных подъемных канатов / П.П. Нестеров. — М.: Углетехиздат, 1949. — 320 с.
2. Нестеров П.П. Некоторые вопросы теории конструирования круглых прядей канатов с проволоками одинакового сечения во всех рядах / П.П. Нестеров, Г.И. Иожеф // Известия АН УССР. — Харьков, 1949. — № 4. — С. 37–42.
3. Житков Д.Г. Стальные канаты для подъемно-транспортных машин / Д.Г. Житков, И.Т. Поспехов. — М.: Металлургиздат, 1953. — 391 с.
4. Иожеф Г.И. Геометрическое построение канатов закрытой конструкции методом образующих шаров / Г.И. Иожеф // Известия вузов. Горный журнал. — Харьков, 1963. — № 4. — С. 69–75.
5. Иожеф Г.И. Рациональное геометрическое построение прядей с линейным касанием проволок / Г.И. Иожеф // Стальные канаты: сб. — К.: Техника, 1967. — Вып. 4. — С. 216–222.
6. Lokadi Zoltan. Grafischts Dimensionierungsverfahren zur Auslegung kompakter Verseillagen – Analytische Zustandsberschreibung / Zoltan Lokadi // Draht. — 1992. — 43 (9). — S. 743–747
7. Хромов В.Г. Графический анализ поперечного сечения стальных канатов на ЭВМ / В.Г.Хромов, И.В.Хромов // Вестн. СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: сб. науч. тр. — Севастополь, 2000. — Вып. 23. — С. 20–23.

Поступила в редакцию 17.11.2008 г.