

УДК 681.5.015.42

В.В. Захаров*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua***ДИСПЕРСИОННАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В НЕГАУССОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ СИММЕТРИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ**

Предлагается матричная модель центральных моментов до четвёртого порядка включительно стохастической нелинейной многомерной дифференциальной системы в негауссовском приближении симметрично распределённого вектора состояния.

Введение. Статья посвящена новым результатам исследований в рамках направления, которое было определено в предшествующей публикации [1], и является естественным её продолжением. Направление связано с проблематикой построения матричной дисперсионной модели стохастической многомерной нелинейной дифференциальной системы в негауссовском приближении, а также приложениям её к корреляционному анализу и синтезу. Там же стали предметом рассмотрения и обсуждения первые полученные результаты. Так, в [1] была рассмотрена проблематика построения и эффективной численной реализации дисперсионной дифференциальной модели (ДДМ) в негауссовском приближении при асимметрии распределения вероятностей $(n \times 1)$ -вектора состояния $\mathbf{x}_t$ нелинейной дифференциальной системы

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{B}_t\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t] + \mathbf{C}_t\boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\Xi}_t\mathbf{v}_t, \quad (1)$$

принципиально точные уравнения математического ожидания (МО) $\mathbf{m}_t = E\{\mathbf{x}_t\}$ и дисперсионной матрицы (ДМ) $\mathbf{D}_t = E\{\mathbf{x}_t^0[\mathbf{x}_t^0]^T\}$ которой определены в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{m}_t &= \mathbf{A}_t\mathbf{m}_t + \mathbf{B}_t\bar{\mathbf{f}} + \boldsymbol{\Xi}_t\mathbf{v}_t, & \mathbf{m}_{t_0} &= \mathbf{m}_0, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{D}_t &= \mathbf{R} + \mathbf{R}^T + \mathbf{W}, & \mathbf{D}_{t_0} &= \mathbf{D}_0, \quad t \in [t_0, t_F], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t, \mathbf{C}_t, \boldsymbol{\Xi}_t$ – матричные коэффициенты соответствующих размеров; $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]$, $\mathbf{v}_t$ и $\boldsymbol{\omega}_t$ – векторные нелинейная детерминированная функция, детерминированное возмущение и гауссовский белый шум [2] интенсивности $\mathbf{Q}_t = E\{\boldsymbol{\omega}_t\boldsymbol{\omega}_t^T\}$ соответственно; символы E и T – МО и транспонирование матрицы соответственно. Здесь и далее $\bar{\mathbf{f}} = E\{\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]\}$, $\mathbf{R} = \mathbf{A}_t\mathbf{D}_t + \mathbf{B}_t\bar{\mathbf{R}}$, $\bar{\mathbf{R}} = E\{\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t][\mathbf{x}_t^0]^T\}$, $\mathbf{W} = \mathbf{C}_t\mathbf{Q}_t\mathbf{C}_t^T$, $\mathbf{x}_t^0 = \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_t$, а индексом t обозначена соответствующая функциональная зависимость. Так как степень асимметрии распределения вероятностей $\mathbf{x}_t$ определяют величины центральных моментов третьего порядка его компонентов [2], при получении в [1] дополнительных уравнений для ДДМ ограничились лишь центральными моментами $\mathbf{x}_t$ третьего порядка.

Целью статьи является рассмотрение проблематики построения и реализации ДДМ при симметрии негауссовского распределения $\mathbf{x}_t$ относительно $\mathbf{m}_t$. В этом случае негауссовское распределение $\mathbf{x}_t$ будет либо островершинным, либо плосковершинным по сравнению с гауссовским. Известно [2], что степень такого отличия распределения вероятности случайного многомерного процесса от гауссовского характеризуют величины вероятностных моментов четвёртого порядка его компонентов.

1. Матричное уравнение центральных моментов четвёртого порядка. Матрицу центральных моментов четвёртого порядка $\mathbf{M}_t$ $(n \times 1)$ -вектора состояния $\mathbf{x}_t$ модели (1) определим как блочную $n^2 \times n^2$ -матрицу вида

$$\mathbf{M}_t = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \{\mathbf{I}_{kl} \otimes \mathbf{M}_{kl}\}, \quad \mathbf{M}_{kl} = E\{\mathbf{x}_t^0[\mathbf{x}_t^0]^T \mathbf{x}_{kt}^0 \mathbf{x}_{lt}^0\}. \quad (3)$$

Здесь и далее $\otimes$ – прямое матричное произведение [3], $\mathbf{I}_{kl} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l^T$, а $\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_l$ – единичные $(n \times 1)$ -векторы [3]. Уравнение k, l -ого $(n \times n)$ -блока $\mathbf{M}_{kl}$ матрицы центральных моментов $\mathbf{M}_t$ получено на основе матричного аналога формулы Ито в [4]. С учётом равенства $E\{\mathbf{f}^0[\mathbf{x}_t, t][\mathbf{x}_t^0]^T \mathbf{x}_{kt}^0 \mathbf{x}_{lt}^0\} = E\{\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t][\mathbf{x}_t^0]^T \mathbf{x}_{kt}^0 \mathbf{x}_{lt}^0\}$, очевидного при симметрии распределения вероятностей

вектора $\mathbf{x}_t$ в силу равенства нулю всех моментов нечётных порядков [2] его компонент, это уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M}_{kl} = \mathbf{R}_{kl} + \mathbf{R}_{kl}^T + \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i[\mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_{li} + \mathbf{e}_l^T \mathbf{R}_{ki}]\} + \mathbf{R}_{kl}^w, \quad (4)$$

где $\mathbf{R}_{\mu\nu} = \mathbf{A}_t \mathbf{M}_{\mu\nu} + \mathbf{B}_t \bar{\mathbf{R}}_{\mu\nu}$, $\bar{\mathbf{R}}_{\mu\nu} = E\{\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t][\mathbf{x}_t^0]^T \mathbf{x}_{\mu_t}^0 \mathbf{x}_{\nu_t}^0\}$, $\mu \in \{k, l\}$, $\nu \in \{i, l\}$,

$$\mathbf{R}_{kl}^w = w_{kl} \mathbf{D}_t + d_{kl} \mathbf{W} + \mathbf{W}_{kl} + \mathbf{W}_{kl}^T, \quad \mathbf{W}_{kl} = (\mathbf{D}_t \mathbf{e}_k) \otimes (\mathbf{e}_l^T \mathbf{W}) + (\mathbf{D}_t \mathbf{e}_l) \otimes (\mathbf{e}_k^T \mathbf{W}), \quad (5)$$

$$d_{kl} = \mathbf{e}_k^T \mathbf{D}_t \mathbf{e}_l, \quad w_{kl} = \mathbf{e}_k^T \mathbf{W} \mathbf{e}_l.$$

Уравнения ДДМ (2) и дополнительные уравнения (3), (4) образуют систему принципиально точных незамкнутых дифференциальных уравнений. Для замыкания уравнений системы необходимо определить приемлемый способ приближения плотности вероятности $p(\mathbf{x})$.

2. Аппроксимация плотности вероятности $\tilde{p} \cong p(\mathbf{x}_t)$. По аналогии с рассмотренным в [1] случае асимметрии распределения вероятности $\mathbf{x}_t$ для негауссовского приближения симметричной плотности вероятности $p(\mathbf{x}_t)$ выберем аппроксимацию $\tilde{p}$ в виде

$$\tilde{p} = p_z + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=4} m_{\mathbf{v}} p_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!], \quad (6)$$

где $p_z = p_z(\mathbf{x}_t)$ – гауссовская [2] плотность вероятности; $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$ – векторный индекс, $\mathbf{e}_i$ –

единичный $(n \times 1)$ -вектор, $p_z^{[\mathbf{v}]} = \frac{\partial^{\sigma[\mathbf{v}]}}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} p_z$, $\Pi[\mathbf{v}!] = \prod_{i=1}^n (v_i!)$, а $m_{\mathbf{v}} = E\{\prod_{i=1}^n [x_i^0]^{v_i}\}$ – центральный

момент порядка $\sigma[\mathbf{v}] = \sum_{i=1}^n v_i$ [2].

3. Представление $\bar{\mathbf{f}}$ в негауссовском приближении $\tilde{p}$. Представление легко получим из приведённого в [1] представления $\tilde{\mathbf{f}}$ для аппроксимации $p_z + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} m_{\mathbf{v}} p_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$ плотности асимметричного распределения вероятности вектора $\mathbf{x}_t$ после формальной замены $\sigma[\mathbf{v}] = 3$ на $\sigma[\mathbf{v}] = 4$ в виде

$$\bar{\mathbf{f}} \cong \tilde{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{f}}_z + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=4} m_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{f}}_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!], \quad (7)$$

где $\bar{\mathbf{f}}_z^{[\mathbf{v}]} = \frac{\partial^{\sigma[\mathbf{v}]}}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} \bar{\mathbf{f}}_z$ – частная производная $\bar{\mathbf{f}}_z$ порядка $\sigma[\mathbf{v}]$ по компонентам вектора $\mathbf{m}_t$, а $\bar{\mathbf{f}}_z$ – векторный коэффициент статистической линеаризации [2] в гауссовском приближении функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]$.

4. Представление $\bar{\mathbf{R}}$ в негауссовском приближении $\tilde{p}$. Представление $\bar{\mathbf{R}} \cong \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{F} + \mathbf{K} \mathbf{D}_t$ в негауссовском приближении (6) получим из приведённого в [1] представления $\tilde{\mathbf{R}}$ для аппроксимации $p_z + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} m_{\mathbf{v}} p_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$ плотности асимметричного распределения вероятностей с учётом очевидного равенства $(v_i + 1) q_{\mathbf{v}_{+i}} = m_{\mathbf{v}_{+i}} / \Pi[\mathbf{v}!]$ после формальной замены $\sigma[\mathbf{v}] = 2$ ($\sigma[\mathbf{v}] = 3$) на $\sigma[\mathbf{v}] = 3$ ($\sigma[\mathbf{v}] = 4$) соответственно, где

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i^T \otimes \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} m_{\mathbf{v}_{+i}} \bar{\mathbf{f}}_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]\}, \quad \mathbf{v}_{+i} = \mathbf{v} + \mathbf{e}_i, \quad (8)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_z + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=4} m_{\mathbf{v}} \mathbf{K}_z^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!], \quad \mathbf{K}_z = \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \bar{\mathbf{f}}_z, \quad \mathbf{K}_z^{[\mathbf{v}]} = \frac{\partial^{\sigma[\mathbf{v}]}}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} \mathbf{K}_z,$$

5. Представление $\bar{\mathbf{R}}_{kl}$ в негауссовском приближении $\tilde{p}$.

Утверждение 1. Для гауссовской плотности вероятности p_z $n \times 1$ - вектора $\mathbf{x}_t$ с МО $\mathbf{m}_t$ и ДМ $\mathbf{D}_t$ справедливы соотношения

$$x_l^0 p_z^{[v]} = \sum_{i=1}^n d_{il} p_z^{[v_{+i}]} + v_l p_z^{[v_{-l}]}, \quad (9)$$

$$x_l^0 \frac{\partial p_z^{[v]}}{\partial \mathbf{m}} = \sum_{i=1}^n \{d_{il} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial p_z^{[v]}}{\partial \mathbf{m}}\} + v_l \frac{\partial p_z^{[v_{-l}]} }{\partial \mathbf{m}} + \mathbf{e}_l^T p_z^{[v]}, \quad (10)$$

где $d_{il} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{D}_t \mathbf{e}_l$, $\mathbf{v}_{-l} = \mathbf{v} - \mathbf{e}_l$. Доказательства (9), (10) приведены в [1].

Утверждение 2. Для аппроксимации $\tilde{p}$ (6) плотности вероятности $(n \times 1)$ - вектора $\mathbf{x}_t$ с МО $\mathbf{m}_t$ и ДМ $\mathbf{D}_t$ справедливо соотношение

$$x_k^0 [\mathbf{x}_t^0]^T \tilde{p} = \mathbf{k}_k^1 + \mathbf{k}_k^2 \mathbf{D}_t, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_k^1 &= x_k^0 \mathbf{k}^1 = \sum_{i=1}^n \{d_{ik} \frac{\partial}{\partial m_i} \mathbf{k}^1 + \mathbf{e}_i^T \otimes \Sigma_{ik}\}, \quad \Sigma_{ik} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=2} m_{\mathbf{v}_{+i+k}} p_z^{[v]} / \Pi[\mathbf{v!}], \\ \mathbf{k}^1 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \otimes \Sigma_i, \quad \Sigma_i = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} m_{\mathbf{v}_{+i}} p_z^{[v]} / \Pi[\mathbf{v!}], \quad \mathbf{v}_{+i+k} = \mathbf{v} + \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{k}_k^2 &= x_k^0 \mathbf{k}^2 = \sum_{i=1}^n d_{ik} \frac{\partial}{\partial m_i} \mathbf{k}^2 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \Sigma_k + \mathbf{e}_k^T \tilde{p}, \quad \mathbf{k}^2 = \partial \tilde{p} / \partial \mathbf{m}, \quad \mathbf{v}_{+k} = \mathbf{v} + \mathbf{e}_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Представления $1 \times n$ - векторов $\mathbf{k}_k^1$, $\mathbf{k}_k^2$, $\mathbf{k}^1$ для $\tilde{p}$ (6) легко получаются из приведённых в [1] аналогов для приближения $p_z + \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} m_{\mathbf{v}} p_z^{[v]} / \Pi[\mathbf{v!}]$ после формальной замены в представлениях сумм Σ_{ik} и Σ_i обозначения параметра $\sigma[\mathbf{v}] = s$ на $\sigma[\mathbf{v}] = s+1$, $s \in [1, 2]$.

Утверждение 3. Из определения правила дифференцирования по скалярному аргументу произведения функций следует, что

$$x_l^0 \frac{\partial}{\partial m_i} \mathbf{k}^j = \frac{\partial}{\partial m_i} \mathbf{k}_l^j + \mathbf{k}_l^j \delta_{il}, \quad (13)$$

где $j = 1, 2$, а δ_{il} – символ Кронекера [2,3].

Утверждение 4. Для аппроксимации $\tilde{p}$ (6) плотности вероятности $(n \times 1)$ - вектора $\mathbf{x}_t$ с МО $\mathbf{m}_t$ и ДМ $\mathbf{D}_t$ справедливо соотношение

$$x_l^0 x_k^0 [\mathbf{x}_t^0]^T \tilde{p} = \mathbf{k}_{kl}^1 + \mathbf{k}_{kl}^2 \mathbf{D}_t, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{kl}^1 &= x_l^0 \mathbf{k}_k^1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ik} d_{jl} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_j} \mathbf{k}^1 + d_{lk} \mathbf{k}^1 + \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \otimes \{ \sum_{j=1}^n [d_{jl} \frac{\partial}{\partial m_j} \Sigma_{ik} + d_{jk} \frac{\partial}{\partial m_j} \Sigma_{il}] + \Sigma_{ikl} \}, \\ \mathbf{k}_{kl}^2 &= x_l^0 \mathbf{k}_k^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ik} d_{jl} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_j} \mathbf{k}^2 + d_{lk} \mathbf{k}^2 + \sum_{i=1}^n \{ d_{il} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \Sigma_k + d_{ik} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \Sigma_l \} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \Sigma_{kl} + \\ &+ \mathbf{e}_k^T \otimes \{ \Sigma_l + \sum_{i=1}^n d_{il} \frac{\partial}{\partial m_i} \tilde{p} \} + \mathbf{e}_l^T \otimes \{ \Sigma_k + \sum_{i=1}^n d_{ik} \frac{\partial}{\partial m_i} \tilde{p} \}, \\ \Sigma_{ikl} &= \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=1} m_{\mathbf{v}_{+i+k+l}} p_z^{[v]} / \Pi[\mathbf{v!}], \quad \mathbf{v}_{+i+k+l} = \mathbf{v}_{+i+k} + \mathbf{e}_l, \end{aligned}$$

а $\mathbf{k}^1$, $\mathbf{k}^2$, Σ_k , Σ_l , Σ_{ik} , Σ_{il} – определены равенствами (12). Равенство (14) получается из умноженного на x_l^0 равенства (11), преобразованного с учётом соотношений (9), (10) (утверждение 1).

Утверждение 4 является базовым, утверждения 1, 2 и 3 – его теоретической основой. Представление $\bar{\mathbf{R}}_{kl}$ в негауссовском приближении $\tilde{p}$ получим из (5), подставив (14) в соответствующий $\bar{\mathbf{R}}_{kl}$ по определению МО n -кратный интеграл и поменяв в силу независимости функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]$ от компонентов $\mathbf{m}_t$ порядок интегрирования и дифференцирования, в виде $\bar{\mathbf{R}}_{kl} \cong \tilde{\mathbf{R}}_{kl} = \mathbf{F}_{kl} + \mathbf{K}_{kl} \mathbf{D}_t$. Матричные коэффициенты $\mathbf{F}_{kl}$ и $\mathbf{K}_{kl}$ линеаризованного относительно $\mathbf{D}_t$ представления $\tilde{\mathbf{R}}_{kl}$ определяются как

$$\mathbf{F}_{kl} = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n d_{j_1 k} d_{j_2 l} \frac{\partial^2}{\partial m_{j_1} \partial m_{j_2}} \mathbf{F} + d_{lk} \mathbf{F} + \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \otimes \left\{ \sum_{j=1}^n [d_{jl} \frac{\partial}{\partial m_j} \mathbf{f}_{ik} + d_{jk} \frac{\partial}{\partial m_j} \mathbf{f}_{il}] + \mathbf{f}_{ikl} \right\}, \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ik} d_{jl} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_j} \mathbf{K} + d_{lk} \mathbf{K} + \sum_{i=1}^n \left\{ d_{il} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{f}_k + d_{ik} \frac{\partial}{\partial m_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{f}_l \right\} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{f}_{kl} +$$

$$+ \mathbf{e}_k^T \otimes \{ \mathbf{f}_l + \sum_{i=1}^n d_{il} \frac{\partial}{\partial m_i} \bar{\mathbf{f}} \} + \mathbf{e}_l^T \otimes \{ \mathbf{f}_k + \sum_{i=1}^n d_{ik} \frac{\partial}{\partial m_i} \bar{\mathbf{f}} \}, \quad (16)$$

где $\mathbf{f}_j = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=3} m_{\mathbf{v}+j} \bar{\mathbf{f}}_c^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$, $\mathbf{f}_{ij} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=2} m_{\mathbf{v}+i+j} \bar{\mathbf{f}}_c^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$, $\mathbf{f}_{ikl} = \sum_{\sigma[\mathbf{v}]=1} m_{\mathbf{v}+i+k+l} \bar{\mathbf{f}}_c^{[\mathbf{v}]} / \Pi[\mathbf{v}!]$, $j \in \{k, l\}$, а $\bar{\mathbf{f}}$ и $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ определены соответственно в (7) и (8).

6. Метод вычисления $\tilde{\mathbf{f}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{R}}_{kl}$. Основой алгоритмизации вычисления матричных составляющих правых частей уравнений ДДМ в негауссовском приближении является метод, предложенный в [1] для численного решения матричных уравнений МО и ДМ в негауссовском приближении при асимметрии распределения. Как и в случае асимметрии распределения, метод позволяет построить эффективный алгоритм вычисления матричных правых частей уравнений ДДМ и дополнительного уравнения матрицы $\mathbf{M}_t$, исключая матричную операцию умножения. При этом вычисление матричных произведений в правых частях каждого матричного уравнения сводится к многократному вычислению скалярных представлений соответствующих составляющих правой части линеаризованных уравнений модели состояния (1). Скалярная форма представления составляющих исключает при этом умножение на нулевые компоненты как матриц коэффициентов $\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t, \mathbf{C}_t$ модели состояния (1), так и матричных коэффициентов $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{F}_{kl}$, $\mathbf{K}_{kl}$ линеаризованных представлений $\tilde{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{R}}_{kl}$ соответственно.

Линеаризация уравнений модели (1) сводится к формальной замене каждого из ненулевых скалярных компонентов $\mathbf{f}[x_j, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}]$ функции $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t, t]$ его линеаризованным представлением одного из

двух видов: $\mathbf{f}_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} k_j x_j$ или $\mathbf{f}_i^{kl} + \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} k_j^{kl} x_j$. Здесь и далее $\mathcal{S}_{\tilde{n}} \subseteq \mathcal{S}_n$ – подмножество размера $\tilde{n}$ множества индексов компонентов вектора состояния $\mathbf{x}_t$, составляющих векторный аргумент функции $\mathbf{f}[x_j, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}]$, а $\mathcal{S}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

При этом представление первого вида соответствует уравнению ДМ $\mathbf{D}_t$, второго – уравнению блока $\mathbf{M}_{kl}$ матрицы центральных моментов четвёртого порядка $\mathbf{M}_t$, а $i = 1, n$ – номеру этапа процедуры вычисления по столбцам соответственно $\tilde{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{R}}_{kl}$.

Формулы для коэффициентов $\mathbf{f}_i$, k_j и $\mathbf{f}_i^{kl}$, k_j^{kl} получаются из представлений матричных коэффициентов соответственно $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ (8) и $\mathbf{F}_{kl}$, $\mathbf{K}_{kl}$ (15), (16) с учётом структуры множества $\mathcal{S}_{\tilde{n}}$ в виде

$$\mathbf{f}_i = \sum_{\sigma[\tilde{\mathbf{v}}]=3} m_{\tilde{\mathbf{v}}+i} \bar{\mathbf{f}}_c^{[\tilde{\mathbf{v}}]} / \Pi[\tilde{\mathbf{v}}!], \quad k_j = \frac{\partial}{\partial m_j} \bar{\mathbf{f}}_c + \sum_{\sigma[\tilde{\mathbf{v}}]=4} m_{\tilde{\mathbf{v}}} \frac{\partial}{\partial m_j} \bar{\mathbf{f}}_c^{[\tilde{\mathbf{v}}]} / \Pi[\tilde{\mathbf{v}}!], \quad (17)$$

$$\mathbf{f}_i^{kl} = \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} \sum_{j' \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} d_{jk} d_{j'l} \frac{\partial^2}{\partial m_j \partial m_{j'}} \mathbf{f}_i + d_{lk} \mathbf{f}_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} [d_{jl} \frac{\partial}{\partial m_j} \mathbf{f}_{ik} + d_{jk} \frac{\partial}{\partial m_j} \mathbf{f}_{il}] + \mathbf{f}_{ikl},$$

$$k_j^{kl} = \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} \sum_{l' \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} d_{ik} d_{l'l} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_{l'}} k_j + d_{lk} k_j + \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} \{d_{il} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_j} f_k + d_{ik} \frac{\partial^2}{\partial m_i \partial m_j} f_l\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial m_j} f_{kl} + \{f_l + \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} d_{il} \frac{\partial}{\partial m_i} \bar{f}\} \cdot \delta_{jk} + \{f_k + \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} d_{ik} \frac{\partial}{\partial m_i} \bar{f}\} \cdot \delta_{jl},$$

где

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} v_i \mathbf{e}_i, \quad \sigma[\tilde{\mathbf{v}}] = \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} v_i, \quad \Pi[\tilde{\mathbf{v}}!] = \prod_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} (v_i!), \quad m_{\tilde{\mathbf{v}}} = E\{ \prod_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} [x_i^0]^{v_i} \},$$

$$f_j = \sum_{\sigma[\tilde{\mathbf{v}}]=3} m_{\tilde{\mathbf{v}}+j} \bar{f}_e^{[\tilde{\mathbf{v}}]}/\Pi[\tilde{\mathbf{v}}!], \quad f_{ij} = \sum_{\sigma[\tilde{\mathbf{v}}]=2} m_{\tilde{\mathbf{v}}+i+j} \bar{f}_e^{[\tilde{\mathbf{v}}]}/\Pi[\tilde{\mathbf{v}}!], \quad f_{ikl} = \sum_{\sigma[\tilde{\mathbf{v}}]=1} m_{\tilde{\mathbf{v}}+i+k+l} \bar{f}_e^{[\tilde{\mathbf{v}}]}/\Pi[\tilde{\mathbf{v}}!],$$

$$m_{\tilde{\mathbf{v}}+i+j} = E\{ \prod_{q \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} [x_q^0]^{v_q} x_i^0 x_j^0 \}, \quad m_{\tilde{\mathbf{v}}+i+j+l} = E\{ \prod_{q \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} [x_q^0]^{v_q} x_i^0 x_j^0 x_l^0 \}, \quad j \in \{k, l\},$$

$$\bar{f} \equiv \bar{f}_e + \sum_{\sigma[\tilde{\mathbf{v}}]=4} m_{\tilde{\mathbf{v}}} \bar{f}_e^{[\tilde{\mathbf{v}}]}/\Pi[\tilde{\mathbf{v}}!], \quad \bar{f}_e^{[\tilde{\mathbf{v}}]} = \frac{\partial^{\sigma[\tilde{\mathbf{v}}]} \bar{f}_e}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} \bar{f}_e. \quad (19)$$

При этом из (19) очевидно, что $\bar{f}_e^{[\tilde{\mathbf{v}}]}$ – частная производная порядка $\sigma[\tilde{\mathbf{v}}]$ по компонентам вектора $\mathbf{m}_t$ функции $\bar{f}_e$, а $\bar{f}_e$ – по определению коэффициент статистической линейаризации [2] в гауссовском приближении функции $f[x_j, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}]$.

Из этих представлений следует, что вид формул коэффициентов f_i , k_j и f_i^{kl} , k_j^{kl} не зависит от типа нелинейной функции $f[x_j, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}]$, а определяется лишь размером множества $\mathcal{S}_{\tilde{n}}$ и порядком решаемого на основе предлагаемого метода матричного уравнения моментов. Поэтому аналитические представления этих коэффициентов для произвольной нелинейной функции $f[x_j, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}]$, к примеру, одного, двух и трёх скалярных аргументов ($\tilde{n}=1,2,3$) могут быть получены на основе соответствующих представлений $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{F}_{kl}$, $\mathbf{K}_{kl}$. При этом аналитические представления для входящих в них частных производных получаются из известных аналитических представлений коэффициентов статистической линейаризации для типовых нелинейностей [2] в гауссовском приближении.

Более детальное описание предлагаемого метода и результатов исследования всех аспектов проблемы эффективной алгоритмизации вычисления $\tilde{\mathbf{f}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{R}}_{lk}$, в том числе и формул определения коэффициентов f_i , k_j и f_i^{kl} , k_j^{kl} для скалярной функции $f[x_j, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}]$ одного, двух и трёх скалярных аргументов, будут приведены в следующей статье. Сейчас же в качестве примера получим представления коэффициентов f_i , k_j и f_i^{kl} , k_j^{kl} приближения нелинейной функции $f[x_j]$ одного аргумента $x_j, j \in \mathcal{S}_n$.

7. Коэффициенты f_i , k_j нелинейной функции $f[x_j]$. В силу справедливых в этом случае равенств

$$\tilde{\mathbf{v}} = v_j \mathbf{e}_j, \quad \sigma[\tilde{\mathbf{v}}] = v_j, \quad \bar{f}_e^{[\tilde{\mathbf{v}}]} = \bar{f}_e^{(v_j)}, \quad \Pi[\tilde{\mathbf{v}}!] = v_j! \quad (20)$$

формулы для коэффициентов f_i , k_j определяются из (17) в виде

$$f_i = \alpha_i \bar{f}_e^{(3)}, \quad k_j = \bar{f}_e^{(1)} + \beta_j \bar{f}_e^{(5)},$$

где $\alpha_i = \frac{1}{6} m_{jjji}$, $\beta_j = \frac{1}{24} m_{jjjj}$, $m_{jjji} = E\{[x_j^0]^3 x_i^0\} = \mathbf{e}_j^T \mathbf{M}_{jj} \mathbf{e}_i$, $m_{jjjj} = E\{[x_j^0]^4\} = \mathbf{e}_j^T \mathbf{M}_{jj} \mathbf{e}_j$.

8. Коэффициенты f_i^{kl} , k_j^{kl} нелинейной функции $f[x_j]$. Представления для коэффициентов f_i^{kl} , k_j^{kl} в силу тех же равенств (20) получаются из (18), (19) в виде

$$f_i^{kl} = \alpha_{i5}^{kl} \bar{f}_e^{(5)} + \alpha_{i3}^{kl} \bar{f}_e^{(3)} + \alpha_{i1}^{kl} \bar{f}_e^{(1)},$$

$$k_j^{kl} = \beta_{j7}^{kl} \bar{f}_e^{(7)} + \beta_{j5}^{kl} \bar{f}_e^{(5)} + \beta_{j3}^{kl} \bar{f}_e^{(3)} + \beta_{j1}^{kl} \bar{f}_e^{(1)},$$

где $\alpha_{i5}^{kl} = \frac{1}{6} d_{jk} d_{jl} m_{jjji}$, $\alpha_{i3}^{kl} = \frac{1}{6} d_{lk} m_{jjji} + \frac{1}{2} (d_{jl} m_{jjik} + d_{jk} m_{jjil})$, $\alpha_{i1}^{kl} = m_{jikl}$,
 $\beta_{j7}^{kl} = \frac{1}{24} d_{jk} d_{jl} m_{jjjj}$, $\beta_{j5}^{kl} = \frac{1}{24} d_{lk} m_{jjjj} + \frac{1}{6} (d_{jl} m_{jjjk} + d_{jk} m_{jjji}) + \frac{1}{24} (d_{jl} m_{jjjj} \delta_{jk} + d_{jk} m_{jjjj} \delta_{jl})$,
 $\beta_{j3}^{kl} = d_{jk} d_{jl} + \frac{1}{2} m_{jjkl} + \frac{1}{6} (m_{jjil} \delta_{jk} + m_{jjjk} \delta_{jl})$, $\beta_{j1}^{kl} = d_{lk} + d_{jl} \delta_{jk} + d_{jk} \delta_{jl}$.

9. Упрощение дополнительного уравнения моментов четвёртого порядка. Несмотря на предложенный эффективный алгоритм вычисления матричных правых частей уравнений ДДМ и дополнительного уравнения $\mathbf{M}_t$, вычислительные затраты на реализацию решения уравнения матрицы $\mathbf{M}_t$ сравнительно велики. Легко показать [2], что они эквивалентны затратам на решение $n(n+1)(n+2)(n+3)/4!$ скалярных уравнений для компонентов матрицы $\mathbf{M}_t$.

Если $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t]$ модели (1) зависит от всех n компонентов x_j , $j \in \mathcal{S}_n$ вектора состояния $\mathbf{x}_t$, из представлений (8) и (15), (16) матричных коэффициентов $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{F}_{kl}$, $\mathbf{K}_{kl}$ соответственно следует, что для замыкания уравнений ДДМ (2) потребуются компоненты лишь $n(n+1)(n+2)/6$ столбцов $\mathbf{m}_{klj} = \mathbf{M}_{kl} \mathbf{e}_j$, $k, l, j \in \mathcal{S}_n$, $k \leq l \leq j$ блоков $\mathbf{M}_{kl}$ матрицы $\mathbf{M}_t$ (3). В этом случае возможность эквивалентного представления уравнений (3), (4) обуславливается очевидными в силу (3) соотношениями

$$\mathbf{M}_{kl} \mathbf{e}_j = \mathbf{M}_{lj} \mathbf{e}_k = \mathbf{M}_{kj} \mathbf{e}_l, \quad (21)$$

где $k, l, j \in \mathcal{S}_n$. Из (21) и не очевидных, но легко проверяемых равенств $\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{e}_i^T \mathbf{R}_{kl} \mathbf{e}_j) = \mathbf{R}_{kj}^T \mathbf{e}_l$ и

$\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{e}_k^T \mathbf{R}_{li} \mathbf{e}_j) = \mathbf{R}_{lj}^T \mathbf{e}_k$, следует, что уравнения (3), (4) эквивалентны системе $n(n+1)(n+2)/6$ векторных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{m}_{klj} = (\mathbf{R}_{kl} + \mathbf{R}_{kl}^T + \mathbf{R}_{kl}^w) \mathbf{e}_j + \mathbf{R}_{kj}^T \mathbf{e}_l + \mathbf{R}_{lj}^T \mathbf{e}_k, \quad (22)$$

где $k, l, j \in \mathcal{S}_n$, $k \leq l \leq j$. При этом из представлений (8), (15), (16) следует, что вычисление составляющей $\mathbf{R}_{kl} \mathbf{e}_j$ и компонентов $\tilde{\mathbf{R}}_{kl}^T \mathbf{e}_j$, $\tilde{\mathbf{R}}_{kj}^T \mathbf{e}_l$, $\tilde{\mathbf{R}}_{lj}^T \mathbf{e}_k$ составляющих $\mathbf{R}_{kl}^T \mathbf{e}_j$, $\mathbf{R}_{kj}^T \mathbf{e}_l$, $\mathbf{R}_{lj}^T \mathbf{e}_k$ правой части уравнения (22) предполагает знание только компонентов одного столбца $\mathbf{m}_{klj}$, а вычисление компонентов $(\mathbf{A}_t \mathbf{M}_{kl})^T \mathbf{e}_j = \mathbf{M}_{kl} \mathbf{A}_t^T \mathbf{e}_j$, $(\mathbf{A}_t \mathbf{M}_{kj})^T \mathbf{e}_l = \mathbf{M}_{kj} \mathbf{A}_t^T \mathbf{e}_l$ и $(\mathbf{A}_t \mathbf{M}_{lj})^T \mathbf{e}_k = \mathbf{M}_{lj} \mathbf{A}_t^T \mathbf{e}_k$ тех же составляющих $\mathbf{R}_{kl}^T \mathbf{e}_j$, $\mathbf{R}_{kj}^T \mathbf{e}_l$ и $\mathbf{R}_{lj}^T \mathbf{e}_k$ – всех компонентов трёх матричных блоков $\mathbf{M}_{kl}$, $\mathbf{M}_{kj}$ и $\mathbf{M}_{lj}$.

Систему уравнений (22) можно свести к одному эквивалентному матричному, аналогичному уравнению для матрицы $\mathbf{M}_t$ (3), (4). Определим эквивалентную $n(n+1)(n+2)/6$ столбцам $\mathbf{m}_{klj}$, $k, l, j \in \mathcal{S}_n$, $k \leq l \leq j$ матрицу $\hat{\mathbf{M}}_t$ в виде блочной $n \times n(n+1)(n+2)/6$ -матрицы $\hat{\mathbf{M}}_t = \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n \{ \mathbf{e}_k^T \otimes \mathbf{e}_l^T \otimes \hat{\mathbf{M}}_{kl} \}$, где $\hat{\mathbf{M}}_{kl} = \sum_{j=l}^n \{ \mathbf{e}_{s_{jl}}^T \otimes \mathbf{m}_{klj} \}$, а $s_{jl} = j - l + 1$. Продифференцируем по t представление $\hat{\mathbf{M}}_{kl}$. В силу (18) и равенства [1]

$$\mathbf{M}_{1 \times p} \otimes (\mathbf{M}_{k \times l} \mathbf{M}_{l \times 1}) = \mathbf{M}_{k \times l} (\mathbf{M}_{1 \times p} \otimes \mathbf{M}_{l \times 1}), \quad (23)$$

справедливого для любых матриц $\mathbf{M}_{k \times l}$, $\mathbf{M}_{1 \times p}$, $\mathbf{M}_{l \times 1}$ и любых, определяющих их размеры целых положительных l, k и p , получим

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{M}}_{kl} = (\mathbf{R}_{kl} + \mathbf{R}_{kl}^T + \mathbf{R}_{kl}^w) \hat{\mathbf{P}}_l + \sum_{j=l}^n \mathbf{e}_{s_{jl}}^T \otimes (\mathbf{R}_{kj}^T \mathbf{e}_l + \mathbf{R}_{lj}^T \mathbf{e}_k), \quad (24)$$

где $\hat{\mathbf{P}}_l = \sum_{j=l}^n \{\mathbf{e}_{s_{jl}}^T \otimes \mathbf{e}_j\}$. Размеры единичных векторов $\mathbf{e}_{s_{jl}}$ и $\mathbf{e}_j$ в представлении $\hat{\mathbf{P}}_l$ равны соответственно $n-l+1$ и n . Матрицы $\hat{\mathbf{P}}_l$, $l \in \mathcal{S}_n$ – прямоугольные размера $n \times (n-l+1)$. Назовём их матрицами «перестановок с исключением». Так, $\mathbf{P}_l$ в (24) – эта матрица перестановок столбцов матрицы $\mathbf{R}_{kl} + \mathbf{R}_{kl}^T$ с номерами $k, l, j \in \mathcal{S}_n$, $k \leq l \leq j$, исключая при этом все столбцы, соответствующие $l > j$. Матрицы $\hat{\mathbf{P}}_l$, $l \in \mathcal{S}_n$ можно интерпретировать и как обобщённые прямоугольные матрицы перестановок, и как обобщение определённых в [3] квадратных матриц, ненулевые элементы которых – суть единичные поддиагонали или наддиагонали.

Для большинства многомерных нелинейных дифференциальных систем нелинейная функция $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t]$ модели (1) зависит лишь от небольшого числа компонентов вектора состояния $\mathbf{x}_t$. Пусть $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t]$ – функция $\tilde{n} < n$ произвольных компонентов $\mathbf{x}_t$ с индексами $j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}$. Из представлений (8), (15), (16) матричных коэффициентов $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}_{kl}$, $\mathbf{K}_{kl}$ следует, что в этом случае для замыкания уравнений ДДМ потребуется знание компонентов лишь $\tilde{n}(\tilde{n}+1)(\tilde{n}+2)/6$ столбцов $\mathbf{m}_{klj}$, $k, l, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}$, $k \leq l \leq j$ матриц-решений $\hat{\mathbf{M}}_{kl}$ уравнений (24). Однако это не означает, что для этого можно ограничиться лишь $\tilde{n}(\tilde{n}+1)(\tilde{n}+2)/6$ дополнительными уравнениями вида (24). Дело в том, что вычисление $\mathbf{M}_{kl}\mathbf{A}^T\mathbf{e}_j$, $\mathbf{M}_{lj}\mathbf{A}^T\mathbf{e}_k$, $\mathbf{M}_{lj}\mathbf{A}^T\mathbf{e}_k$ по-прежнему предполагает знание всех компонентов блоков $\mathbf{M}_{kl}$, $\mathbf{M}_{kj}$, $\mathbf{M}_{lj}$. Поэтому для вычисления столбцов $\mathbf{m}_{klj}$, $k, l, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}$, $k \leq l \leq j$ придётся решать все $n(n+1)(n+2)/6$ уравнений (22). Отсюда следует два вывода.

Первый состоит в том, что для матрицы $\mathbf{A}_t$ общего вида упрощение дополнительных уравнений (24) невозможно, даже если $\tilde{n} < n$.

Второй заключается в том, что возможность упрощения уравнений (22) в случае $\tilde{n} < n$ определяется только видом матрицы $\mathbf{A}_t$.

Пусть матрица $\mathbf{A}_t$ такая, что $\mathbf{A}_t^T\mathbf{e}_j = \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} a_{ji}\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{A}_t^T\mathbf{e}_k = \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} a_{ki}\mathbf{e}_i$. Тогда $\mathbf{M}_{kl}\mathbf{A}_t^T\mathbf{e}_j = \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} a_{ji}\mathbf{m}_{kli}$, $\mathbf{M}_{kj}\mathbf{A}_t^T\mathbf{e}_l = \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} a_{li}\mathbf{m}_{kji}$ и $\mathbf{M}_{lj}\mathbf{A}_t^T\mathbf{e}_k = \sum_{i \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} a_{ki}\mathbf{m}_{lji}$. Если же $\mathbf{A}_t = \sum_{i=1}^n \{\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T a_{ii}\}$, то $\mathbf{M}_{kl}\mathbf{A}_t^T\mathbf{e}_j = a_{jj}\mathbf{m}_{klj}$, $\mathbf{M}_{kj}\mathbf{A}_t^T\mathbf{e}_l = a_{ll}\mathbf{m}_{klj}$ и $\mathbf{M}_{lj}\mathbf{A}_t^T\mathbf{e}_k = a_{kk}\mathbf{m}_{klj}$. Очевидно, что в обоих этих случаях для замыкания уравнений ДДМ потребуются лишь $\tilde{n}(\tilde{n}+1)(\tilde{n}+2)/6$ дополнительных уравнений вида (22), соответствующих $k, l, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}$ и $k \leq l \leq j$. Причём во втором случае – это $\tilde{n}(\tilde{n}+1)(\tilde{n}+2)/6$ несвязанных уравнений.

Упорядочим по возрастанию индексы $k, l, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}$ и сопоставим с каждым соответствующий номер по порядку $v[k], v[l], v[j] \in \{1, 2, \dots, \tilde{n}\}$. Тогда $\tilde{n}(\tilde{n}+1)(\tilde{n}+2)/6$ дополнительных векторных уравнений, удовлетворяющих условию $k, l, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}$ и $k \leq l \leq j$, можно свести к одному эквивалентному матричному, аналогичному полученному для матрицы $\hat{\mathbf{M}}_t$. Определим матрицу $\tilde{\mathbf{M}}_t$, эквивалентную $\tilde{n}(\tilde{n}+1)(\tilde{n}+2)/6$ столбцам $\mathbf{m}_{klj}$, $k, l, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}$, $k \leq l \leq j$ в виде блочной $n \times \tilde{n}(\tilde{n}+1)(\tilde{n}+2)/6$ -матрицы $\tilde{\mathbf{M}}_t = \sum_{k \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} \sum_{\substack{l \in \mathcal{S}_{\tilde{n}} \\ l \geq k}} \{\mathbf{e}_{v[k]}^T \otimes \mathbf{e}_{v[l]}^T \otimes \tilde{\mathbf{M}}_{kl}\}$, где $\tilde{\mathbf{M}}_{kl} = \sum_{j \geq l, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} \{\mathbf{e}_{s_{jl}}^T \otimes \mathbf{m}_{klj}\}$, а $s_{jl} = v[j] - v[l] + 1$. Дифференцируя по t представление $\tilde{\mathbf{M}}_{kl}$, в силу (18) и (19) получаем

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{M}}_{kl} = (\mathbf{R}_{kl} + \mathbf{R}_{kl}^T + \mathbf{R}_{kl}^w)\tilde{\mathbf{P}}_l + \sum_{j \geq l, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} \{\mathbf{e}_{s_{jl}}^T \otimes (\mathbf{R}_{kj}^T\mathbf{e}_l + \mathbf{R}_{lj}^T\mathbf{e}_k)\}, \quad (25)$$

где $\tilde{\mathbf{P}}_l = \sum_{j \geq l, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} \{\mathbf{e}_{s_{jl}}^T \otimes \mathbf{e}_j\}$. Размеры единичных векторов $\mathbf{e}_{s_{jl}}$ и $\mathbf{e}_j$ в представлении $\tilde{\mathbf{P}}_l$ равны соответственно $\max_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} v[j] - v[l] + 1$ и n . Матрицы $\tilde{\mathbf{P}}_l$ – прямоугольные размера $n \times (\max_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} v[j] - v[l] + 1)$, по виду аналогичны матрицам $\hat{\mathbf{P}}_l$, $l \in \mathcal{S}_n$.

В частном случае, если каждый компонент $\mathbf{f}[\mathbf{x}_t]$ модели (1) – функция только одного из $\tilde{n} < n$ компонентов $\mathbf{x}_t$, получаем $k = l = j$, $s_{jl} = 1$, $\max_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} v[j] = v[l]$. При этом, в силу равенств $\tilde{\mathbf{M}}_{kl} = \mathbf{m}_{jjj}$ и $\tilde{\mathbf{P}}_l = \mathbf{e}_j$, матричное уравнение (25) преобразуется в уравнение (22), соответствующее вектору $\mathbf{m}_{jjj}$. Уравнение же матрицы $\tilde{\mathbf{M}}_t$ становится эквивалентным $\tilde{n}$ несвязанным векторным уравнениям $\frac{d}{dt} \mathbf{m}_{jjj} = (\mathbf{R}_{jj} + 3\mathbf{R}_{jj}^T + \mathbf{R}_{jj}^w) \mathbf{e}_j$, $j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}$.

Заключение. Алгоритмизация корреляционного анализа стохастической многомерной нелинейной дифференциальной системы на основе предложенного метода построения ДДМ представляется эффективным средством численного решения как задач статистического анализа и параметрического синтеза в негауссовском приближении при симметрии плотности вероятности системы, так и задачи оценки точности корреляционного анализа дифференциальной системы в гауссовском приближении. Направление дальнейших исследований естественно связать с продолжением рассмотрения проблематики построения ДДМ в негауссовском приближении, только уже при произвольной плотности вероятности вектора состояния. Известно, что в этом случае все центральные моменты третьего и четвертого порядков плотности вероятности не обращаются в нуль. Поэтому в качестве дополнительных для замыкания системы уравнений ДДМ естественно определить матричные уравнения центральных моментов третьего и четвертого порядков.

По аналогии с рассмотренным случаем симметрии, при произвольном распределении вероятности также представляет интерес исследование возможности повышения эффективности применения ДДМ в негауссовском приближении для корреляционного анализа и синтеза за счёт упрощения её дополнительных уравнений.

Библиографический список

1. Захаров В.В. Дисперсионная модель нелинейной дифференциальной системы в негауссовском приближении при асимметрии плотности вероятности / В.В. Захаров // Вестн. СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. — Севастополь, 2007. — Вып. 83. — С. 96–104.
2. Пугачёв В.С. Теория стохастических систем: учеб. пособие / В.С. Пугачёв, И.Н. Сеницын. — М.: Логос Пресс, 2005. — 999 с.
3. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
4. Захаров В.В. Матричный аналог формулы Ито и его приложение к корреляционному анализу / В.В. Захаров // Вестн. СевГТУ. Сер. Информатика, электроника, связь: сб. науч. тр. — Севастополь, 2007. — Вып. 82. — С. 27–32.

Поступила в редакцию 26.09.2008 г.