

УДК 519.212

И.В. Долгин,**В.П. Долгин, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет,**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ***Рассмотрен метод аппроксимации логарифмической амплитудно-частотной характеристики, заданной аналитически.*

При оптимизации режимов и решении задач синтеза динамических систем прибегают к аппроксимации логарифмических частотных характеристик [1]. Это обычно сопряжено с необходимостью разложения передаточной функции на элементарные звенья и не всегда реализуемо, что ограничивает круг решаемых задач, исключая возможность аппроксимации, например, нелинейных звеньев.

Целью статьи является расширение спектра решаемых задач путем представления логарифмической амплитудно-частотной функции с помощью звеньев с частотной характеристикой вида

$$W_i(s) = \left(\frac{1 + T_i s}{1 + T_{i+1} s} \right)^{v_i}, \quad (1)$$

где T_j – постоянная времени j -го звена, v_j – его порядок.

Представим аппроксимирующую операторную передаточную функцию произведением k звеньев (1)

$$W_s(s) = \prod_{j=1}^k W_j(s) = \prod_{j=1}^k \left(\frac{1 + T_j s}{1 + T_{j+1} s} \right)^{v_j} \quad (2)$$

Упростим выражение (2) и сведем его к виду

$$W_s(s) = (1 + T_0 s)^{v_0} \prod_{j=1}^k (1 + T_j s)^{\Delta v_j} \quad (3)$$

путем свертки при $\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$.

Тогда амплитудно-частотная характеристика j -го звена примет вид

$$A_j(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}_j^2(\omega) + \operatorname{Im}_j^2(\omega)},$$

где $\operatorname{Re}_j(\omega) = \left(1 + (\omega/\omega_j)^2\right)^{\Delta v_j/2} \cos(\varphi_j(\omega))$; $\operatorname{Im}_j(\omega) = \left(1 + (\omega/\omega_j)^2\right)^{\Delta v_j/2} \sin(\varphi_j(\omega))$; $\varphi_j(\omega) = \Delta v_j \arctg(\omega/\omega_j)$ [1].

С учетом значений $\operatorname{Re}_j(\omega)$ и $\operatorname{Im}_j(\omega)$ получим

$$A_j(\omega) = \left(1 + (\omega/\omega_j)^2\right)^{\Delta v_j/2}.$$

Выражение ЛАЧХ j -го звена

$$L_j(\omega) = 20 \lg(A_j(\omega))$$

примет вид

$$L_j(\omega) = 10 \Delta v_j \lg(1 + (\omega/\omega_j)^2)$$

с асимптотами

$$L_j(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } \omega \ll \omega_j; \\ 20 \Delta v_j \lg(\omega/\omega_j), & \text{if } \omega \gg \omega_j. \end{cases}$$

Для определения параметров аппроксимирующих звеньев разобьем интервал представления аппроксимируемой частотной характеристики на k частей. Значения постоянных времени T_i , определяющих частоту сопряжения ω_i звеньев (1), представим в виде

$$T_i = 1/\omega_i; i = 0 \dots k,$$

где $\omega_i = \omega_0 + i \cdot h$, $h = 10^q$, $q = \lg(\omega_k/\omega_0)/k$.

Для нахождения порядка j -го звена введем функцию наклона ЛАЧХ

$$F(\omega) = \lg(A(\omega \cdot 10^q)/A(\omega))/q, \quad (4)$$

что позволяет для произвольного значения ω_j определить его порядок, т.е.

$$v_j = F(\omega)|_{\omega=\omega_j}. \quad (5)$$

На рисунке 1 изображены логарифмические характеристики функций наклона (4), порядка (5) и разности порядков $\Delta v_j = F(\omega)|_{\omega=\omega_j} - F(\omega)|_{\omega=\omega_{j-1}}$ ($i=0 \dots k$) при значении $k=5$ для объекта [2] с операторной передаточной функцией

$$W(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s),$$

$$\text{где } W_1(s) = \frac{\exp(-\tau s)}{s^2}; \quad W_2(s) = \frac{K}{T_1 s - 1}; \quad W_3(s) = \frac{1}{T_3^2 s^2 + 2\xi_3 T_3 s + 1}; \quad W_4(s) = \frac{T_2 s + 1}{T_4^2 s^2 - 2\xi_4 T_4 s + 1}.$$

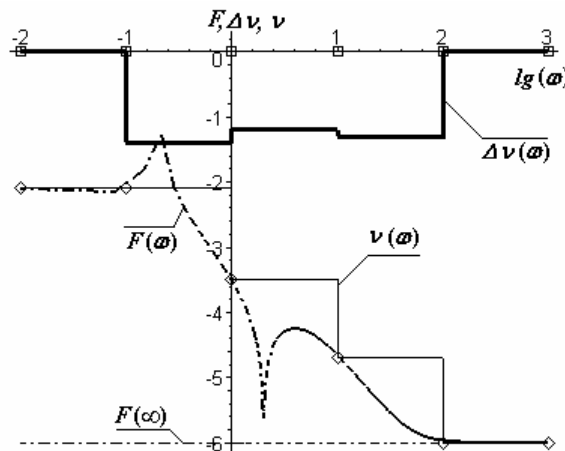


Рисунок 1 – Логарифмические характеристики функций процедуры приближения

Выражение ЛАЧХ объекта после упрощений можно свести к виду

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega^2} \sqrt{\frac{T_2^2 \omega^2 + 1}{(T_4^4 \omega^4 + 2T_4^2 \omega^2 (2\xi_4^2 - 2) + 1)(T_3^4 \omega^4 + 2T_3^2 \omega^2 (2\xi_3^2 - 2) + 1)(T_1^2 \omega^2 + 1)}}.$$

В этом случае функция наклона ЛАЧХ (4) примет вид

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \lg \left(\frac{(2,5 \cdot 10^3 \omega^2 + 1)((\omega^2 + 2,5 \cdot 10^3)^2 - (60\omega)^2)(625\omega^4 - 4999\omega^2 + 10^4)(10^2 \omega^2 + 1)}{(25\omega^2 + 1)((\omega^2 + 25)^2 - (6\omega)^2)(6,25 \cdot 10^4 \omega^4 - 4999\omega^2 + 10^2)(10^4 \omega^2 + 1)} \right) - 5, \quad (6)$$

где принято [2] $K = 100 \text{ c}^{-2}$; $T_1 = 10 \text{ c}$; $T_2 = 5 \text{ c}$; $T_3 = 0,5 \text{ c}$; $T_4 = 0,02 \text{ c}$; $\tau = 0,2 \text{ c}$; $\xi_3 = 0,01$; $\xi_4 = 0,80$.

На основании выражения функции наклона (6) в соответствии с определением (5) найдем значения функции порядка в заданном диапазоне частот от $\omega_0 = 10^{-2}$ рад/с до $\omega_k = 10^3$ рад/с при числе узлов интерполяции $k=5$:

$$v_0 = -2,1; v_1 = -2,1; v_2 = -3,5; v_3 = -4,7; v_4 = -6,0; v_5 = -6,0.$$

Вычисленные значения функции порядка, соответствующие узлам аппроксимации

$$\omega_0 = 10^{-2} \text{ c}; \quad \omega_1 = 10^{-1} \text{ c}; \quad \omega_2 = 10^0 \text{ c}; \quad \omega_3 = 10^1 \text{ c}; \quad \omega_4 = 10^2 \text{ c}; \quad \omega_5 = 10^3 \text{ c},$$

позволяют представить в соответствии с выражением (3) аппроксимирующую операторную передаточную функцию в виде

$$W_s(\omega) = K_u \left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)^{v_0} \left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)^{\Delta v_1} \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)^{\Delta v_2} \left(1 + \frac{s}{\omega_3}\right)^{\Delta v_3} \left(1 + \frac{s}{\omega_4}\right)^{\Delta v_4} \left(1 + \frac{s}{\omega_5}\right)^{\Delta v_5},$$

где $v_0 = -2,1$; $\Delta v_1 = v_1 - v_0 = 0$; $\Delta v_2 = v_2 - v_1 = -1,4$; $\Delta v_3 = v_3 - v_2 = -1,2$; $\Delta v_4 = v_4 - v_3 = -1,3$; $\Delta v_5 = v_5 - v_4 = 0$, что при подстановке полученных значений позволяет получить в окончательном виде:

$$W_s(\omega) = \frac{K_u}{(1 + 10^2 s)^{2,1} (1 + s)^{1,4} (1 + 10^{-1} s)^{1,2} (1 + 10^{-2} s)^{1,3}}.$$

Для указанных параметров полученная приближающая амплитудно-частотная характеристика может быть сведена к виду

$$A_s(\omega) = \frac{K_u}{(1+10^4\omega^2)^{1,05} (1+10^{-4}\omega^2)^{0,65} (1+\omega^2)^{0,7} (1+10^{-2}\omega^2)^{0,6}}.$$

Получить значение K_u можно из условия

$$A(\omega) = A_s(\omega)$$

при любом значении ω на интервале приближения. Найденное указанным способом значение K_u как среднее на интервале аппроксимации составило $K_u = 1,58 \cdot 10^6$.

На рисунке 2 изображены аппроксимирующая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $L_s(\omega) = \lg(A_s(\omega))$, построенная по выражению (3) и аппроксимируемая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $L(\omega) = \lg(A(\omega))$.

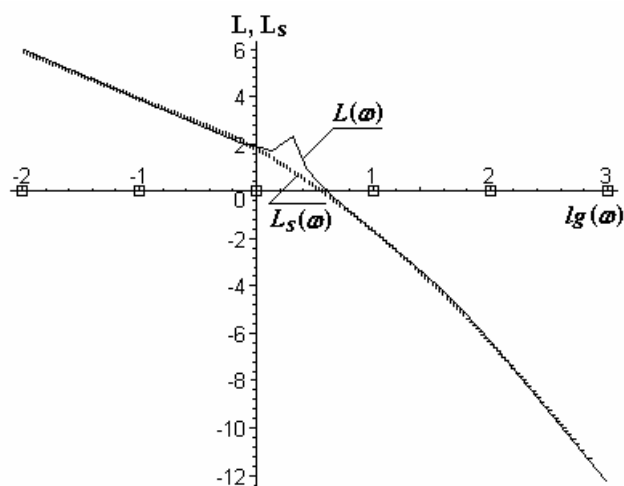


Рисунок 2 – Логарифмические частотные характеристики

Необходимо отметить, что предельный наклон ЛАЧХ объекта, определяемый функцией наклона (4), и равный

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega) = -6,00$$

и предельный наклон аппроксимирующей ЛАЧХ, равный $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F_s(\omega) = -6,00$,

где

$$F_s(\omega) = \lg \left(\frac{(10^{-4}\omega^2 + 1)^{1,3} (10^4\omega^2 + 1)^{2,1} (\omega^2 + 1)^{0,1}}{(10^{-2}\omega^2 + 1)^{0,1} (10^6\omega^2 + 1)^{2,1} (10^2\omega^2 + 1)^{0,7}} \right),$$

совпадают.

Сумма разностей порядков, являющихся степенями элементарных функций, входящих в выражение аппроксимирующей операторной передаточной функции (3), совпадает с предельным наклоном аппроксимирующей ЛАЧХ, т.е.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega) = \sum_{i=0}^k \Delta v_i = -6,00.$$

Вычисления разностей порядков производились с использованием процедуры рекуррентного округления до заданного числа значащих цифр, когда отброшенные значения порядков на предыдущем вычислении учитывались при определении последующей разности. В приведенной реализации число значащих цифр при вычислении разностей порядков принято равным двум.

Перспективы дальнейших исследований состоят в поиске подходов к обеспечению возможности синтеза аппроксимирующей ЛАЧХ при произвольном отношении порядков собственного оператора и оператора воздействия.

Библиографический список

1. Васильев А.Н. Maple 8 / А.Н. Васильев. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. — 352 с.
2. Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования / Ю.И. Топчеев. — М.: Машиностроение, 1989. — 752 с.

Поступила в редакцию 14.04.2008 г.