

УДК 681.32.147

В.В. Кирюхин, доцент, канд. физ.-мат. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: kvv@sevgtu.sebastopol.ua***ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ КОМПЛЕКСНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ЛВС ОПЕРАТИВНОЙ ОБРАБОТКИ**

Рассматривается задача оптимального выбора быстродействия агрегатов сервера централизованной ЛВС в комплексе с оптимизацией пропускных способностей дуплексных каналов, связывающих сервер с рабочими станциями, с целью минимизации времени реакции ЛВС на запросы станций при заданной общей стоимости сети. Задача формулируется и решается в терминах нелинейного программирования.

Ключевые слова: централизованная ЛВС, быстродействие сервера, нелинейное программирование, параметрическая оптимизация.

В современных автоматизированных системах управления производством структура компьютерной сети организуется по принципу централизованной ЛВС, в которой центр (достаточно мощный сервер) соединяется с известным числом периферийных рабочих станций (РС) прямыми дуплексными каналами. Задача оптимизации такой сети обычно решалась как совокупность двух в общем независимых задач: выбор сервера [1] и выбор информационных каналов [2].

В данной работе задача оптимизации ставится и решается как комплексная, включающая одновременно выбор оптимальной структуры агрегатов сервера и оптимизации пропускных способностей каналов между РС и сервером. В качестве функции цели выбрано время реакции ЛВС, равное, по определению, среднему времени между моментом ввода задания какой-либо РС в центробежный (ведущий к серверу) канал и моментом получения ответа из центростремительного (от сервера) канала. Необходимо минимизировать это время, выбирая быстродействия агрегатов сервера и пропускные способности каналов при ограниченной общей стоимости ЛВС.

Используя в качестве модели ЛВС экспоненциальную открытую стохастическую сеть массового обслуживания, можно показать, что в стационарном режиме время u реакции ЛВС с дуплексными каналами имеет вид

$$u(C_1, \dots, C_M; V_1, \dots, V_N) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{1}{\lambda \frac{C_i}{l_i} - \lambda_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{\theta_j - \mu_j} + \sum_{i=1}^M \frac{v_i}{v \frac{C_i}{m_i} - v_i}, \quad (1)$$

где M — количество каналов, соединяющих сервер со станциями,

N — количество агрегатов в сервере,

C_i — пропускная способность i -го канала,

V_j — быстродействие j -го агрегата сервера,

λ_i — интенсивность i -го центростремительного потока сообщений,

$\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_M$ — интенсивность центростремительного трафика ЛВС,

l_i — средняя длина сообщений от i -ой станции,

α_j — коэффициент передачи j -го агрегата сервера,

θ_j — средняя трудоемкость обработки задания в j -ом агрегате,

μ_j — интенсивность потока заданий в j -й агрегат,

v_i — интенсивность i -го центробежного потока заданий,

$v = v_1 + \dots + v_M$ — интенсивность центробежного трафика,

m_i — средняя длина сообщения, направляемого сервером к i -ой станции.

Требуется выбрать вектор $(C_1, \dots, C_M; V_1, \dots, V_N)$, минимизирующий (1) при условиях:

$$\sum_{i=1}^M \gamma_i C_i + \sum_{j=1}^N \beta_j V_j \leq D; \quad (2)$$

$$C_i > \max\{\lambda_i l_i, v_i m_i\}, \quad i = 1, \dots, M; \quad (3)$$

$$V_j > \theta_j \mu_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где γ_i — удельная стоимость канала к станции i , β_j — удельная стоимость j -го агрегата сервера, D — заданная общая стоимость ЛВС.

Ограничение (2) означает, что стоимость ЛВС, включая стоимость сервера, не может превышать заданное значение D . Условия (3) и (4) определяют нижние границы значений переменных C_i и V_j соответственно для существования стационарного режима функционирования ЛВС.

Задача (1) – (4) — это задача нелинейного программирования. Для сведения ее к стандартной форме введем переменные:

$$x_i = C_i - \max\{\lambda_i l_i, v_i m_i\}, \quad i = 1, \dots, M; \quad (5)$$

$$y_j = V_j - \theta_j \mu_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Отсюда:

$$C_i = x_i + \max\{\lambda_i l_i, v_i m_i\}, \quad i = 1, \dots, M; \quad (7)$$

$$V_j = y_j + \theta_j \mu_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Запишем функцию (1) через переменные (5), (6)

$$u(C_1, \dots, C_M; V_1, \dots, V_N) = u(C_1(x_1), \dots, C_M(x_M); V_1(y_1), \dots, V_N(y_N)) = U(x_1, \dots, x_M; y_1, \dots, y_N) = \\ = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{\lambda} \frac{1}{\frac{1}{l_i}(x_i + \max\{\lambda_i l_i, v_i m_i\}) - \lambda_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{\frac{1}{\theta_j}(y_j + \theta_j \mu_j) - \mu_j} + \sum_{i=1}^M \frac{v_i}{v} \frac{1}{\frac{1}{m_i}(x_i + \max\{\lambda_i l_i, v_i m_i\}) - v_i},$$

или, после несложных преобразований,

$$U(x_1, \dots, x_M; y_1, \dots, y_N) = \sum_{i \in M_1} \left(\frac{a_i}{x_i} + \frac{c_i}{x_i + \Delta_i} \right) + \sum_{i \in M_2} \left(\frac{c_i}{x_i} + \frac{a_i}{x_i + \Delta_i} \right) + \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{y_j}, \quad (9)$$

где

$$M_1 = \{ i \mid \max\{\lambda_i l_i, v_i m_i\} = \lambda_i l_i \}; \quad (10)$$

$$M_2 = \{ i \mid \max\{\lambda_i l_i, v_i m_i\} = v_i m_i \}; \quad (11)$$

$$a_i = \frac{\lambda_i l_i}{\lambda}, \quad i \in M_1; \quad (12)$$

$$b_j = \alpha_j \theta_j, \quad j = 1, \dots, N; \quad (13)$$

$$c_i = \frac{v_i m_i}{v}, \quad i \in M_2; \quad (14)$$

$$\Delta_i = |\lambda_i l_i - v_i m_i|, \quad i = 1, \dots, M. \quad (15)$$

Далее, с учетом (5) и (6), а также с учетом (10) и (11) ограничения (2) – (4) принимают вид соответственно:

$$\sum_{i=1}^M \gamma_i x_i + \sum_{j=1}^N \beta_j y_j \leq \Delta D; \quad (16)$$

$$x_i > 0, \quad i = 1, \dots, M; \quad (17)$$

$$y_j > 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (18)$$

где

$$\Delta D = D - D_0 \quad (19)$$

и

$$D_0 = \sum_{i \in M_1} \gamma_i \lambda_i l_i + \sum_{i \in M_2} \gamma_i v_i m_i + \sum_{j=1}^N \beta_j \theta_j \mu_j \quad (20)$$

— минимальные средства, необходимые для обеспечения стационарного режима в системе.

Заметим кстати, что для существования решения должно выполняться очевидное неравенство $D > D_0$ или

$$\Delta D > 0. \quad (21)$$

В окончательном виде задача формулируется следующим образом: найти вектор $(x_1, \dots, x_M; y_1, \dots, y_N)$, минимизирующий функцию (9) при условиях (16) – (18). Этот вектор в дальнейшем будем называть оптимальным решением, или просто решением.

Проанализируем поставленную задачу. Прежде всего, заметим, что функция (9) является монотонно убывающей по каждой компоненте переменных $x = (x_1, \dots, x_M)$ и $y = (y_1, \dots, y_N)$. Это означает, в частности, что она достигает минимального значения на границе области, определяемой неравенством (16), и, следовательно, поиск минимума следует вести в области, где

$$\sum_{i=1}^M \gamma_i x_i + \sum_{j=1}^N \beta_j y_j = \Delta D. \quad (22)$$

Поскольку функция (9) выпукла (это легко доказать), а ограничения (16), (17) и (18) определяют выпуклую область, то задача имеет единственное решение.

Для поиска решения поступим следующим образом.

Рассмотрим задачу минимизации (9) при ограничении (22), игнорируя пока неравенства (17) и (18). Это классическая задача Лагранжа. Функция Лагранжа в данном случае имеет следующий вид

$$L(x_1, \dots, x_M, y_1, \dots, y_N, \delta) = \sum_{i \in M_1} \left(\frac{a_i}{x_i} + \frac{c_i}{x_i + \Delta_i} \right) + \sum_{i \in M_2} \left(\frac{c_i}{x_i} + \frac{a_i}{x_i + \Delta_i} \right) + \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{y_j} + \delta \left(\sum_{i=1}^M \gamma_i x_i + \sum_{j=1}^N \beta_j y_j - \Delta D \right),$$

где δ — неопределенный множитель.

Решение должно удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, & i = 1, \dots, M; \\ \frac{\partial L}{\partial y_j} = 0, & j = 1, \dots, N; \\ \frac{\partial L}{\partial \delta} = 0; \end{cases}$$

то есть системе

$$\begin{cases} -\frac{a_i}{x_i^2} - \frac{c_i}{(x_i + \Delta_i)^2} + \delta \gamma_i = 0, & i \in M_1; \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} -\frac{c_i}{x_i^2} - \frac{a_i}{(x_i + \Delta_i)^2} + \delta \gamma_i = 0, & i \in M_2; \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} -\frac{b_j}{y_j^2} + \delta \beta_j = 0, & j = 1, \dots, N; \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M \gamma_i x_i + \sum_{j=1}^N \beta_j y_j - \Delta D = 0. \end{cases} \quad (26)$$

К сожалению, система (23) – (26) в общем виде не поддается аналитическому решению. Тем не менее, анализ позволяет установить основные свойства решения, заключающиеся в следующем.

Решение системы является единственным, что следует из свойств выпуклости функции (9) и области, определяемой равенством (22).

Решение удовлетворяет условиям (17), (18) и, таким образом, является оптимальным решением задачи минимизации (9) при условиях (16) – (18). Покажем это.

Каждое из уравнений (23) может быть представлено в виде

$$F_i(x_i) = \delta, \quad i \in M_1, \quad (27)$$

где

$$F_i(x_i) = \frac{1}{\gamma_i} \left[\frac{a_i}{x_i^2} + \frac{c_i}{(x_i + \Delta_i)^2} \right], \quad i \in M_1$$

— монотонно убывающие функции. Поэтому уравнение (27) имеет единственное решение

$$x_i = F_i^{-1}(\delta) > 0, \quad i \in M_1, \quad (28)$$

где F_i^{-1} — функция, обратная функции F_i .

Положительность значения x_i следует из того, что $F_i(x_i) > 0$, а также $\delta > 0$ (последнее очевидно из вида уравнений (23)). Отметим, что $F_i^{-1}(x_i)$ — монотонно убывающая функция.

Аналогично можно установить, что и

$$x_i = F_i^{-1}(\delta) > 0, \quad i \in M_2, \quad (29)$$

где F_i^{-1} — функция, обратная функции

$$F_i(x_i) = \frac{1}{\gamma_i} \left[\frac{c_i}{x_i^2} + \frac{a_i}{(x_i + \Delta_i)^2} \right], \quad i \in M_2.$$

Каждое из уравнений (25) имеет явное решение

$$y_j = G_j^{-1}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{b_j}{\beta_j}} > 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (30)$$

Неравенства (28) – (30) подтверждают выполнение всех условий (17), (18).

Подставляя в (22) вместо x_i и y_j их выражения (28) – (30), получаем уравнение для определения δ

$$F(\delta) = \Delta D, \quad (31)$$

где

$$F(\delta) = \sum_{i=1}^M \gamma_i F_i^{-1}(\delta) + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sum_{j=1}^N \sqrt{b_j \beta_j} \quad (32)$$

— очевидно, монотонно убывающая функция.

В силу этого уравнение (31) имеет единственное решение, $\delta = \delta_0$.

Определив δ_0 , подставляем это значение в выражения (29) – (30) и вычисляем компоненты оптимального решения $x_i^0 = F_i^{-1}(\delta_0)$, $y_j^0 = \sqrt{b_j} / \sqrt{\delta_0 \beta_j}$ и затем — минимальное значение $U_{\min} = U(x_1^0, \dots, x_M^0, y_1^0, \dots, y_N^0)$ по формуле (9).

Рассмотрим случай, когда удастся получить аналитическое решение задачи. Этот случай представляется, когда для всех $i = 1, \dots, M$

$$\lambda_i l_i = v_i m_i, \quad (33)$$

т.е. среднее число бит данных, направляемых i -й станцией в единицу времени по каналу в сервер, равно этому же количеству в обратном направлении, от сервера к i -й станции.

При этом, согласно (15), $\Delta_i = 0$, $i = 1, \dots, M$, согласно (10) и (11) $M_1 = \{1, \dots, M\}$, $M_2 = \emptyset$, и уравнения (27) принимают вид:

$$\frac{1}{\gamma_i} \frac{a_i + c_i}{x_i^2} = \delta, \quad i = 1, \dots, M.$$

Откуда получаем

$$x_i = F_i^{-1}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{a_i + c_i}{\gamma_i}}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (34)$$

Выражения для оптимальных значений y_j здесь остаются прежними и определяются формулами (30).

Подставляя (34) в (32) и решая уравнение (31), находим, что

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{\Delta D}{\sum_{i=1}^M \sqrt{(a_i + c_i) \gamma_i} + \sum_{j=1}^N \sqrt{b_j \beta_j}}. \quad (35)$$

Таким образом, здесь решение задачи выражается в явном виде формулами (30) и (34), где константа $1/\sqrt{\delta}$ определяется формулой (35).

Минимальное значение функции (9) получим, подставив в (9) вместо x_i и y_j их выражения (30) и (34). После несложных преобразований получим

$$U_{\min} = \frac{A^2}{\Delta D}, \quad (36)$$

где

$$A = \sum_{i=1}^M \sqrt{\gamma_i(a_i + C_i)} + \sum_{j=1}^N \sqrt{b_j \beta_j}. \quad (37)$$

Переходя в формулах (30), (34) – (37) к исходным переменным и параметрам, получим расчетные формулы, приведенные ниже, в алгоритме оптимизации. Следует отметить, что алгоритм работает только при выполнении условий (33).

Алгоритм.

Начало.

1. Ввод исходных данных: $M, N, (\lambda_1, \dots, \lambda_M), (l_1, \dots, l_M), (v_1, \dots, v_M), (m_1, \dots, m_M), (\alpha_1, \dots, \alpha_N), (\theta_1, \dots, \theta_N), (\mu_1, \dots, \mu_N), (\gamma_1, \dots, \gamma_M), (\beta_1, \dots, \beta_N), D$.

2. Вычисление по формулам:

$$D_0 = \sum_{i=1}^M \gamma_i l_i \lambda_i + \sum_{j=1}^N \beta_j \theta_j \mu_j;$$

$$\Delta D = D - D_0.$$

3. Проверка условия $\Delta D \leq 0$. При его выполнении, выдается сообщение «РЕШЕНИЕ НЕ СУЩЕСТВУЕТ» и переход к концу алгоритма.

4. Вычисление оптимальных значений $(C_1, \dots, C_M), (V_1, \dots, V_N)$ по формулам:

$$C_i = \lambda_i l_i + \frac{\Delta D}{B} \sqrt{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{v}} \sqrt{\frac{\lambda_i l_i}{\gamma_i}}, \quad i = 1, \dots, M;$$

$$V_j = \theta_j \mu_j + \frac{\Delta D}{B} \sqrt{\frac{\alpha_j \theta_j}{\beta_j}}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Определение минимального времени реакции ЛВС

$$u_{\min} = \frac{B^2}{\Delta D},$$

где

$$B = \sqrt{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{v}} \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i l_i \gamma_i} + \sum_{j=1}^N \sqrt{\alpha_j \theta_j \beta_j};$$

$$\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_M, \quad v = v_1 + \dots + v_M.$$

5. Вывод значений $(C_1, \dots, C_M), (V_1, \dots, V_N), u_{\min}$.

Конец.

Как общее, так и частное решения были реализованы в среде Delphi 7. Соответствующие компьютерные программы могут быть использованы в практике расчета управляющих ЛВС на этапе эскизного проектирования.

В перспективе предполагается постановка и решение соответствующей оптимизационной задачи в дискретном пространстве, поскольку техническое проектирование осуществляется на заданном наборе агрегатов сервера и известном наборе стандартных пропускных способностей информационных каналов.

Библиографический список

1. Кирюхин В.В. Оптимизация структуры вычислительной системы оперативной обработки методом динамического программирования / В.В. Кирюхин, Е.В. Жук // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. — Севастополь, 2003. — Вып. 6. — С. 8–14.
2. Кирюхин В.В. Синтез сети передачи данных компьютерной сети на заданном множестве информационных каналов / В.В. Кирюхин, И.В. Краскова // Материалы междунар. конф. «ИНФОТЕХ-2007». — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. — Ч. 1. — С. 31–32.

Поступила в редакцию 13.03.2009 г.