

УДК 004.056.53

В.А. Василенко, ст. преподаватель,**Д.В. Степаненко,****Н.П. Тлуховская***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: isd@bios.inf.net***КОМБИНАТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ**

В данной статье исследуется использование различных известных критериев принятия решений для задач комбинаторной оптимизации игрового типа, где в качестве одного из игроков выступает природа, а в качестве второго – сложная информационная система, на стратегии которого накладываются комбинаторные ограничения. Изучено нахождение оптимальной стратегии игрока при использовании каждого критерия.

Ключевые слова: функция прибыли, комбинаторная оптимизация, оптимальная стратегия игрока.

Принятие решений в условиях неопределенности является наиболее частым случаем для большинства управляющих информационных систем (УИС). В работе [4] сформулирован новый класс игровых задач – задачи комбинаторной оптимизации игрового типа, в которых один или оба игрока имеют комбинаторные ограничения на использование своих стратегий.

Сформулируем некоторую оптимизационную задачу и рассмотрим на ней несколько различных критериев.

Задача ставится следующим образом. Некоторое хозяйство выращивает m видов сельскохозяйственных культур на таком же количестве (m) полей. Поля имеют разную площадь, поэтому количество каждой выращенной культуры зависит от того, на каком именно поле она высажена. Кроме того, урожайность каждого вида культуры, а значит, и прибыль хозяйства зависят от погоды. Нужно разработать УИС для выработки оптимального плана выращивания культур.

Задачу можно рассматривать как антагонистическую игру двух игроков: хозяйства и природы. Математическая модель такой задачи представлена следующим образом.

Требуется найти $v = F(X_{i1}, Y_{j2})$, где X_{i1} находится из выражения $F(X_{i1}, Y_{j1}) = \max_i \min_j F(X, Y)$; Y_{j2} – из выражения $F(X_{i2}, Y_{j2}) = \min_j \max_i F(X, Y)$.

Функция $F(X, Y)$ имеет вид $F(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$.

Матрица прибыли

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

где a_{ij} – прибыль хозяйства в том случае, если бы оно выращивало на всех своих полях только культуру i , а погода находилась в j -м состоянии.

Ограничения:

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ удовлетворяет условиям

$$\forall j \in J_n y_j \geq 0; \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1;$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_m(P^x),$$

где $E_m(P^x)$ – множество перестановок из элементов вектора P^x ;

$P^x = (P_1^x, P_2^x, \dots, P_m^x)$ удовлетворяет условиям

$$\forall i \in I_m P_i^x \geq 0; \quad \sum_{i=1}^m P_i^x = 1,$$

где $P_i^x (\forall i \in I_m)$ – отношение площади i -го поля к сумме площадей всех полей хозяйства.

Сформулированная задача рассматривается как специфическая игра, где в качестве одного из игроков выступает природа. Будем находить оптимальную стратегию игрока (системы) для каждого критерия принятия решений, а оптимальную стратегию природы находить не будем. Итак, есть вектор стратегии игрока $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_m(P^x)$ и матрица выигрышей $A = (a_{ij})$, $i \in I_m$, $j \in J_n$.

Функция прибыли $F(X, Y)$ и оптимальная стратегия игрока для каждого из критериев будет иметь различный вид. Рассмотрим разные критерии для решения сформулированной задачи.

1. Критерий максимального математического ожидания выигрыша.

Этот критерий применяется в тех случаях, когда известны вероятности состояний природы и минимизация риска проигрыша является менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Вычисляем выигрыш, который получит игрок $C_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j$, $i \in I_m$ при заданных вероятностях состояний природы в том случае, если он применит свою i -ю стратегию.

Для смешанной стратегии $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция выигрыша $F(X, Y)$ будет иметь следующий вид: $F(X, Y) = \sum_{i=1}^m C_i x_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j x_i$. Оптимальной по данному критерию считают ту стратегию, при выборе которой значение математического ожидания выигрыша максимально:

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j x_i \rightarrow \max \quad \text{для} \quad X = (x_1, \dots, x_m) \in E_m(P^x).$$

Упорядочив коэффициенты $C_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j$ и элементы множества P_i^x по возрастанию, получим соответственно элементы β_i и α_i [1-4]. При этом получим

$$\max_j \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j x_i = \sum_{i=1}^m \beta_i \alpha_i.$$

2. Критерий недостаточного основания Лапласа.

Этот критерий используется при наличии неполной информации о вероятностях состояний природы, эти вероятности близки по своим значениям, а минимизация риска проигрыша – менее существенный фактор принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша. Вычислим

$$C_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{n};$$

где $i \in I_m$ – выигрыш, который получит игрок в случае, если применит свою i -ю стратегию.

Для смешанной стратегии $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция выигрыша $F(X, Y)$ будет иметь следующий вид:

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^m C_i x_i = \sum_{i=1}^m x_i \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i.$$

Оптимальной по данному критерию считается стратегия, при выборе которой значение среднего выигрыша максимально:

$$F(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \rightarrow \max \quad \text{для} \quad X = (x_1, \dots, x_m) \in E_m(P^x).$$

Упорядочим суммы $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ при фиксированных i и элементы множества P_i^x по возрастанию, обозначив полученные элементы через β_i и α_i .

$$\text{Получим: } \max_j \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i = \sum_{i=1}^m \beta_i \alpha_i.$$

3. Критерий Сэвиджа.

Этот критерий применяется, когда о состояниях природы ничего не известно, задача реализуется только один раз и нужно исключить любой риск. Этот критерий похож на максимальный критерий Вальда.

В этом случае составляется матрица рисков $R = (r_{ij}) = a_{\max j} - a_{ij}$; $i \in I_m$, $j \in J_n$. Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, при которой достигается

$$\min_{X \in E_m(P^x)} \max_j \sum_{i=1}^m r_{ij} x_i.$$

Обозначим через ω максимум $\sum_{i=1}^m r_{ij} x_i$, тогда $\sum_{i=1}^m r_{ij} x_i \leq \omega$, $\forall j \in J_n$.

Введем вспомогательные неотрицательные переменные $x_{m+1} = \omega - \sum_{i=1}^m r_{ij} x_i$ для каждого j -го неравенства и прибавим к левой части соответствующую вспомогательную переменную x_{m+k} . Получим:

$$\sum_{i=1}^m r_{ij} x_i + x_{m+j} = \sum_{i=1}^m r_{ij} x_i + \omega - \sum_{i=1}^m r_{ij} x_i = \omega, \quad \forall j \in J_n.$$

Выделив первое равенство при $j=1$: $\sum_{i=1}^m r_{ij} x_i + x_{m+j} = \omega$, а затем отняв его от всех других для $j \in J_n^2 = (2, \dots, n)$, получим:

$$\sum_{i=1}^m (r_{ij} - r_{i1}) x_i + x_{m+j} - x_{m+1} = 0, \quad \forall j \in J_n^2;$$

$$\sum_{i=1}^m (r_{ij} - r_{i1}) x_i \leq x_{m+1}, \quad \forall j \in J_n^2.$$

Целевая функция будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^m r_{ij} x_i + x_{m+j} \rightarrow \min \quad \text{или} \quad - \sum_{i=1}^m r_{ij} x_i - x_{m+j} \rightarrow \max.$$

Задача оптимизации получится такой:

$$- \sum_{i=1}^m r_{ij} x_i - x_{m+j} \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^m (r_{ij} - r_{i1}) x_i \leq x_{m+1}, \quad \forall j \in J_n^2; \quad x_{m+1} \geq 0; \quad X = (x_1, \dots, x_m) \in E_m(P^x); \quad \forall i \in I_m \quad P_i^x \geq 0; \quad \sum_{i=1}^m P_i^x = 1.$$

Если обозначить $c_i = -r_{i1}$, $b_{i(j-1)} = (r_{ij} - r_{i1})$, $\forall j \in J_n^2$, то задача примет вид:

$$F = \sum_{i=1}^m c_i x_i - x_{m+1} \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \leq x_{m+1}, \quad \forall j \in J_{n-1}; \quad x_{m+1} \geq 0; \quad X = (x_1, \dots, x_m) \in E_m(P^x); \quad \forall i \in I_m; \quad P_i^x \geq 0; \quad \sum_{i=1}^m P_i^x = 1.$$

Задача комбинаторной оптимизации решается обычными методами [3,4].

4. Критерий Гурвица.

Этот критерий используется в ситуациях, когда информация о состояниях природы (одного из игроков) отсутствует или недостоверна, когда реализуется только малое количество решений и допускается некоторый риск. Для того, чтобы занять наиболее уравновешенную позицию, вводится оценочный коэффициент C , называемый коэффициентом пессимизма, который находится в интервале $[0,1]$ и отражает ситуацию, промежуточную между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма. При $C=1$ критерий Гурвица превращается в критерий Сэвиджа, а при $C=0$ – в критерий «азартного игрока», делающего ставку на счастливое стечение обстоятельств. Оптимальной по этому критерию считается та стратегия, при которой достигается

$$\max_{X \in E_m(P^x)} \{C \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i + (1-C) \max_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i\}.$$

Обозначим через v – минимум $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$, тогда: $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \geq v, \quad \forall j \in J_n$. Введем вспомогательные

неотрицательные переменные $x_{m+j} = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i - v$ для каждого j -го неравенства. Отнимем от левой части j -го неравенства вспомогательную переменную. Получим:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i - x_{m+j} = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i - \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i + v = v, \quad \forall j \in J_n.$$

Выделив 1-е неравенство при $j=1$: $\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i - x_{m+1} = v$ и отняв его от всех других равенств, получим

$$\sum_{i=1}^m (a_{i1} - a_{ij})x_i - x_{m+1} + x_{m+j} = 0; \quad \forall j \in J_n^2.$$

Итак, $\min_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i = v = \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i - x_{m+1}$ при ограничениях $\sum_{i=1}^m (a_{ij} - a_{i1})x_i \leq x_{m+1}, \quad \forall j \in J_n^2$ и $x_{m+1} \geq 0$.

Обозначим максимум $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$ через ω , тогда $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \leq \omega, \quad \forall j \in J_n$.

Введем вспомогательные неотрицательные переменные $x_{m+1+j} = \omega - \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$ для каждого j -го неравенства и прибавим к левой части соответствующую переменную. Выделив первое равенство при $j=1$ и отняв его от всех других, подставим полученные выражения в целевую функцию.

$$\begin{aligned} C \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i + (1-C) \max_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i &= C \left[\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i - x_{m+1} \right] + (1-C) \left[\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i + x_{m+2} \right] = \\ &= C \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i - Cx_{m+1} + \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i - C \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i + (1-C)x_{m+2} = \sum_{i=1}^m a_{i1}x_i - Cx_{m+1} + (1-C)x_{m+2} \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Задача комбинаторной оптимизации на перестановках примет вид:

найти $\sum_{i=1}^m a_{i1}x_i - Cx_{m+1} + (1-C)x_{m+2} \rightarrow \max$ при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m (a_{ij} - a_{i1})x_i \leq x_{m+1}, \quad \forall j \in J_n^2; \quad \sum_{i=1}^m (a_{ij} - a_{i1})x_i \leq x_{m+2}, \quad \forall j \in J_n^2; \quad x_{m+1} \geq 0; \quad x_{m+2} \geq 0;$$

$$X = (x_1, \dots, x_m) \in E_m(P^x); \quad \forall j \in J_m; \quad \sum_{i=1}^m P^x = 1.$$

Эту задачу можно решать методом комбинаторного отсечения, поскольку вектор X – перестановка из множества $E_m(P^x)$.

5. Критерий Ходжа-Лемана.

Этот критерий применяется в тех ситуациях, когда имеется информация о вероятностях состояний окружающей среды, однако эта информация получена на основе относительно небольшого числа наблюдений и может измениться. Принятое решение теоретически допускает бесконечное число реализаций, а при их малом числе допускается некоторый риск. При определении оптимальной стратегии по этому критерию вводится параметр достоверности информации о распределении вероятностей состояния природы u , значение которого находится в интервале $[0,1]$. Если степень достоверности велика, то доминирует критерий максимального математического ожидания выигрыша, а в противном случае – критерий Сэвиджа. Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, при которой достигается

$$\max_{X \in E_m(P^x)} \{u \sum_{j=1}^n p_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i + (1-u) \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i\}.$$

Проведя такие же преобразования, как и для предыдущего критерия, получим:

$$(1-u) \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{u}{1-u} \sum_{j=1}^n p_j a_{ij} + a_{i1} \right) x_i - x_{m+1} \right) \rightarrow \max$$

при ограничениях $\sum_{i=1}^m (a_{ij} - a_{i1}) x_i \leq x_{m+1}, \quad \forall j \in J_n^2.$

Коэффициент $(1-u)$, который стоит перед скобками в целевой функции, можно не учитывать, и если обозначить $C_i = \frac{u}{1-u} \sum_{j=1}^n p_j a_{ij} + a_{i1}$, $b_{i(j-1)} = (a_{ij} - a_{i1}), \quad \forall j \in J_n^2$, то задача будет иметь вид:

$$F = \sum_{i=1}^m C_i x_i - x_{m+1} \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \leq x_{m+1}, \quad \forall j \in J_{n-1}, \quad x_{m+1} \geq 0; \quad X = (x_1, \dots, x_m) \in E_m(P^x); \quad \forall i \in I_m; \quad P_i^x \geq 0; \quad \sum_{i=1}^m P_i^x = 1.$$

Эту задачу можно решать теми же методами, что и предыдущие.

Таким образом, рассмотрено применение различных критериев принятия решений для задач комбинаторной оптимизации игрового типа, где на стратегии одного игрока накладываются комбинаторные ограничения, определяемые перестановками, а другим игроком выступает природа. В зависимости от имеющейся информации о состоянии природы, количества реализаций ситуации и отношения лица, принимающего решение, к риску необходимо выбирать один из рассмотренных критериев для обеспечения наилучшего для данной ситуации результата.

Дальнейшие исследования предполагается направить по пути автоматизации вычисления алгоритмов принятия решений и выбора одного из критериев с помощью интеллектуальной информационно-управляющей системы. Также можно провести дополнительную модификацию этих алгоритмов с целью удаления заведомо невыгодных стратегий игрока для уменьшения размерности задачи и уменьшения времени поиска оптимального решения.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Элементы теории игр / Е.С. Вентцель. — М.: Физматгиз, 1961. — 67 с.
2. Крушевский А.В. Теория игр / А.В. Крушевский. — Киев.: Вища шк., 1977. — 215 с.
3. Теория игр / Л.А. Петросян [и др.]. — М.: Высш. шк., 1998. — 304 с.
4. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах / Е.М. Кудрявцев. — М.: Радио и связь, 1989. — 184 с.

Поступила в редакцию 21.05.2009 г.