

УДК 621.391.27:519.81

В.К. Маригодов, профессор, д-р техн. наук*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ОЦЕНКА СРЕДНЕГО РИСКА В СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ**

Найдено минимаксное значение функции среднего риска в системе передачи информации (СПИ), в которой используется адаптивное линейное предсказание и корректирование сигналов. При этом операторы упомянутой системы и системы радиопомех (СРП) в конфликтной ситуации взаимодействия выбирают рандомизированные стратегии.

Ключевые слова: антагонистическая ситуация, предсказание и корректирование сигналов, система передачи информации, система радиопомех.

Рассмотрим антагонистическую ситуацию, в которой условный первый игрок (оператор СПИ) в качестве своих управляющих действий выбирает адаптивную перестройку АЧХ предсказывающего и корректирующего фильтров, включенных соответственно в передающий и приемный тракты СПИ. Второй условный игрок (оператор СРП) свои управляющие действия направляет на то, чтобы максимально помешать первому игроку, т. е. создать такую помеху, которая лишила бы оператора СПИ возможности реализовать, например, оптимизацию величины отношения сигнал-помеха. Такая игра в чистых стратегиях игроков рассмотрена в [1,2]. Поскольку при использовании игроками чистых стратегий игра может не иметь седловой точки, т. е. возникнет неопределенность в нахождении цены игры, то целесообразно рассмотреть рандомизированные (смешанные) стратегии игроков.

Цель статьи состоит в том, чтобы определить оптимальные (минимаксные) стратегии игроков и цену игры, т. е. минимаксное значение среднего риска при использовании рандомизированных стратегий.

В такой игре функция потерь (или штрафов) кроме случайных параметров $x(t)$ — сигнала на выходе адаптивного предсказывающего фильтра и $y(t)$ — аддитивной смеси сигнала и помехи на выходе адаптивного корректирующего фильтра должна зависеть также от управляющих действий первого игрока $u = \gamma_1(y, \zeta)$ и $v = \gamma_2(y, \eta)$ — второго игрока, где ζ и η — независимые друг от друга случайные величины. При этом управления u и v будут иметь плотности распределения соответственно $q_1(u/y)$ и $q_2(v/y)$.

Минимаксное значение апостериорного риска можно записать в виде

$$\rho(y) = \min_{q_1} \max_{q_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(u, v/y) q_1(u/y) q_2(v/y) du dv, \quad (1)$$

где

$$\rho(u, v/y) = \int_{-\infty}^{\infty} C(x, u, v) p(x/y) dx; \quad (2)$$

$C(x, u, v)$ — функция потерь; $p(x/y)$ — условная плотность распределения или вероятность перехода.

Поскольку γ_1 и γ_2 рандомизированные стратегии игроков, то имеет место равенство:

$$\min_{q_1} \max_{q_2} \rho(q_1, q_2 / y) = \max_{q_2} \min_{q_1} \rho(q_1, q_2 / y). \quad (3)$$

Для нахождения среднего риска ρ_{cp} нужно усреднить (1) по y , т. е.

$$\rho_{cp} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(u, v/y) p(y) dy, \quad (4)$$

где $p(y)$ — плотность вероятности процесса на выходе адаптивного корректирующего фильтра.

Для отыскания оптимальных (рандомизированных) стратегий и цены игры находим вначале максимум функционала

$$\max_{q_2(v/y)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(u, v/y) q_1(u/y) q_2(v/y) du dv \quad (5)$$

при дополнительном условии фиксации энтропии H , т. е.

$$-\int_{-\infty}^{\infty} q_2(v/y) \ln q_2(v/y) dv = H = \text{const} . \quad (6)$$

Оценки $u = \gamma_1(y, \zeta)$ и $\gamma_2(y, \eta)$ являются несмещенными, если их математические ожидания равны истинному значению оцениваемого параметра $x(t)$, т. е. при любом $y(t)$ выполняются условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_1(y, \zeta) p(y/x) dy = x , \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2(y, \eta) p(y/x) dy = x . \quad (8)$$

Здесь $p(y/x)$ — условное распределение $y(t)$ при известном сигнале $x(t)$.

В качестве функции потерь выберем квадратичную, т.е.

$$C(x, u, v) = C[x, \gamma_1(y, \zeta), \gamma_2(y, \eta)] = [\gamma_1(y, \zeta) \gamma_2(y, \eta) - x]^2 . \quad (9)$$

С учетом (9) выражение (2) запишется как

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_1(y, \zeta) \gamma_2(y, \eta) - x]^2 p(x/y) dx . \quad (10)$$

Найдем, при каких $\gamma_1(\cdot)$ и $\gamma_2(\cdot)$ функционал (10) достигает *условного максимума*. Это представляется целесообразным, поскольку ищется потенциальная эффективность адаптивного предсказания и корректирования сигналов, т. е. пусть игровая (конфликтная) ситуация соответствует тому случаю, когда действие СРП приводит к заведомо худшей оценке для оператора СПИ (в выборе функции потерь).

Обозначим:

$$\begin{cases} f(x) = [\gamma_1(y, \zeta) \gamma_2(y, \eta) - x]^2, \\ \ln \varphi(x) = \ln \exp[p(x/y)], \quad \varphi(x) = \exp[p(x/y)]. \end{cases} \quad (11)$$

С учетом (11) функционал (10) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \varphi(x) dx . \quad (12)$$

Поскольку из условия нормировки распределения $p(x/y)$ следует, что $p(x/y) \geq 0$, то $\varphi(x) > 0$.

Одновременно должно выполняться условие $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$, откуда следует, что условный максимум функционала (12) достигается при $\varphi(x) = f(x)$ и при этом удовлетворяется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln \varphi(x) dx .$$

Находим условие, при котором выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[p(x/y)] dx = 1 . \quad (13)$$

Равенство (13) соответствует распределению

$$p(x/y) = 2e\sqrt{\pi} x - \pi e^2 x^2 ; \quad (14)$$

$$\varphi(x) = \exp(2e\sqrt{\pi} x - \pi e^2 x^2) . \quad (15)$$

Таким образом, получаем

$$[\gamma_1(y, \zeta) \gamma_2(y, \eta) - x]^2 = \exp(2e\sqrt{\pi} x - \pi e^2 x^2) . \quad (16)$$

С учетом (13)–(16) можно вместо функционала (10) рассматривать его заведомо большее значение

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_1(y, \varsigma) \gamma_2(y, \eta) - x]^2 \ln [\gamma_1(y, \varsigma) \gamma_2(y, \eta) - x]^2 dx. \quad (17)$$

Находим также максимум функционала (10) при дополнительных условиях фиксации энтропии условного (апостериорного) распределения параметра x и нормировки $p(x/y)$, т. е.

$$\max_{p(x/y)} \int_{-\infty}^{\infty} \beta p(x/y) dx,$$

где
при

$$\beta = [\gamma_1(y, \varsigma) \gamma_2(y, \eta) - x]^2$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} p(x/y) \ln p(x/y) dx = H_1 = \text{const} \quad (18)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x/y) dx = 1, \quad p(x/y) \geq 0. \quad (19)$$

Из решения уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\beta - \lambda_1 [1 + \ln p(x/y)] - \lambda_2 = 0 \quad (20)$$

находим экстремальное условное распределение

$$p(x/y)_{\text{extr}} = \exp\left(\frac{\beta - \lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1}\right), \quad (21)$$

где λ_1, λ_2 — множители Лагранжа, которые определяются из дополнительных условий (18) и (19).

Таким образом, распределение (21) максимизирует функционал (10) и является экспоненциальным. В [3, 4] доказано, что такое распределение обладает минимаксными свойствами.

После нахождения λ_1 и λ_2 и подстановки в (21) получаем

$$p(x/y)_{\text{extr}} = \exp(-2e\sqrt{\pi}x^2). \quad (22)$$

Для определения цены игры можно воспользоваться равенством [5]

$$\max_{p(x/y)} \int_{-\infty}^{\infty} \beta p(x/y)_{\text{extr}} dx = \min_{\beta} \max_{p(x/y)} \int_{-\infty}^{\infty} \beta p(x/y) dx, \quad (23)$$

где правая часть соответствует по форме левой части игрового равенства (3).

Предположим, что $\gamma_1(y, \varsigma)$ и $\gamma_2(y, \eta)$ имеют гауссовские распределения, т. е.:

$$\gamma_1(y, \varsigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_C}} \exp\left[-\frac{(y_0 - y)^2}{2\sigma_C^2}\right];$$

$$\gamma_2(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{II}}} \exp\left[-\frac{(y_0 - y)^2}{2\sigma_{II}^2}\right],$$

где σ_C, σ_{II} — соответственно дисперсии сигнала и помехи на выходе корректирующего фильтра приемника; y_0 — среднее значение оценки смеси сигнала и помехи.

С учетом этого можно записать после соответствующих преобразований и сокращений

$$\beta = \frac{1}{H_1} (\delta - x)^2, \quad (24)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2\pi\sigma_C\sigma_{II}} \exp\left[-\frac{(y_0 - y)^2}{\sigma_C^2 + \sigma_{II}^2}\right].$$

Используя (3), (23) и (24), запишем выражение для цены игры U

$$U = \max_{p(x/y)} \int_{-\infty}^{\infty} \beta p(x/y)_{\text{extr}} dx = \frac{1}{H_1} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta - x)^2 \exp(-2e\sqrt{\pi}x^2) dx. \quad (25)$$

После интегрирования и преобразований получаем

$$U = \frac{1}{2H_1\pi e\sigma_C\sigma_{II}} \exp\left[-\frac{(y_0 - y)^2}{\sigma_C^2 + \sigma_{II}^2}\right]. \quad (26)$$

Если сигнал $x(t)$ на выходе адаптивного корректирующего фильтра имеет гауссовское распределение, то $H_1 = 0,5\ln(2\pi e\sigma_C^2)$. Это справедливо, поскольку узкополосный корректирующий фильтр нормализует входной относительно широкополосный сигнал.

Таким образом, минимаксное значение среднего риска (цена игры) зависит от дисперсий сигнала и помехи, а также имеет экспоненциальный характер. Здесь рассматривался случай одномерного функционала среднего риска (для одной выборки x и y). Для представления среднего риска в виде многомерного функционала (x_n и y_m) можно воспользоваться результатами, полученными в [3]. Поскольку для рандомизированных стратегий игроков всегда существует седловая точка, т.е. выполняется равенство (3), то нет необходимости находить максимум правой части этого равенства.

Задачей дальнейших исследований в данном направлении можно считать минимаксную оценку среднего риска криптоаналитика при определении совершенной стойкости шифра в системах телекоммуникации.

Библиографический список

1. Маригодов В.К. Синтез оптимальных радиосистем с адаптивным предсказанием и корректированием сигналов / В.К. Маригодов, Э.Ф. Бабуров. — М.: Радио и связь, 1985. — 248 с.
2. Маригодов В.К. Теоретико-игровой синтез систем передачи и обработки информации / В.К. Маригодов, Э.Ф. Бабуров, Ю.В. Матвеев; под общ. ред. В.К. Маригодова. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2006. — 187 с.
3. Маригодов В.К. Минимаксные оценки среднего риска в системах с предсказанием / В.К. Маригодов // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. — 1982. — Т. 25. — № 5. — С. 47–51.
4. Маригодов В.К. Методы помехоустойчивой обработки сигналов в системах передачи информации / В.К. Маригодов, Ю.В. Матвеев, А.Н. Дегтярев; под общ. ред. В.К. Маригодова. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2008. — 243 с.
5. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. — М.: Наука, 1970. — 708 с.

Поступила в редакцию 07.04.2009 г.