

УДК 621.391.1

А.Н. Дегтярев, доцент, канд. техн. наук*Севастопольский национальный технический университет,**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО СИСТЕМЕ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМЫХ ФУНКЦИЙ**

Для описания сигнала использованы физически реализуемые функции. Модули спектральных плотностей сигналов и базисных функций совпадают. Рассмотрен метод ортогонализации базисных функций путем определения весовой функции. Получены аналитические выражения для количества степеней свободы сигналов и пропускной способности канала связи. Показана возможность исключения межсимвольной интерференции и межканальных помех.

Ключевые слова: сигнал, физически реализуемые функции, спектральная плотность, ортогонализация, базис, весовая функция, число степеней свободы, пропускная способность, канал связи, межсимвольная интерференция, межканальные помехи.

Введение. Каналы связи, не вносящие искажения в сигнал с ограниченным спектром, должны иметь амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) прямоугольной формы и линейные фазо-частотные характеристики (ФЧХ), полоса пропускания таких каналов должна быть равна ширине спектра сигнала. Импульсная характеристика такого канала имеет вид

$$h(t) = 2K_0 f_b \frac{\sin 2\pi f_b (t - t_0)}{2\pi f_b (t - t_0)},$$

где K_0 и f_b – соответственно коэффициент усиления и частота среза канала связи, t_0 – временная задержка, вносимая в сигнал каналом связи.

В простейшем случае, когда канал связи не вносит задержки в сигнал, $t_0 = 0$, импульсная характеристика описывается выражением

$$h(t) = 2K_0 f_b \frac{\sin 2\pi f_b t}{2\pi f_b t}.$$

Сигнал на выходе такого канала связи описывается сверткой

$$x(t) = 2K_0 f_b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi f_b (t - \tau)}{2\pi f_b (t - \tau)} x(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где $x(t)$ – передаваемый сигнал.

Таким образом, без искажения по каналу связи передается сигнал, который представляет собой линейную комбинацию собственных функций ядра $R(\tau, t) = \frac{\sin 2\pi f_b (t - \tau)}{2\pi f_b (t - \tau)}$ интегрального уравнения (1).

Как известно, собственными функциями такого ядра являются функции отсчетов

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin 2\pi f_b (t - \frac{n}{2f_b})}{2\pi f_b (t - \frac{n}{2f_b})}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots [1].$$

Ортогональность функций отсчетов позволяет исключить

межсимвольную интерференцию.

Для восстановления сигнала достаточно $N = 2f_b T$ отсчетов (T – длительность сигнала) [2]. Величина N названа К. Шенноном числом степеней свободы сигнала.

Для разделения сигналов в соседних каналах связи используют каналы с АЧХ прямоугольной формы. При этом все сигналы оказываются ортогональными.

В результате таких идеализаций теория связи получается противоречивой, поскольку сигналов с конечными значениями T и f_b в природе не существует, а каналы связи с ограниченной полосой пропускания физически не реализуются [3].

Применение функций отсчетов для координатного представления сигналов при создании связанного оборудования приводит к систематическим погрешностям, которые воспринимаются в виде межканальных помех и межсимвольной интерференции. Указанные помехи являются следствием потери

ортогональності, як между сигналами соседних каналов связи, так и между сигналами, с помощью которых передаются символы в каждом из каналов.

Целью статьи является определение физически реализуемого координатного базиса, который не приводит к потере ортогональности сигналов при передаче их по каналам связи.

Выбор базисных функций. Пусть неслучайные базисные функции $\varphi_n(t)$ ортогональны с весовой функцией $\rho(t)$, а реализация стационарного случайного сигнала $x(t)$ представляется в виде конечной суммы

$$x(t) \approx \sum_{n=0}^{N-1} y_n \varphi_n(t), \quad (2)$$

где $y_n = \int_0^T x(t) \varphi_n(t) \rho(t) dt$ – случайные величины.

Дисперсия ошибки представления случайного сигнала $x(t)$ в виде (2) имеет вид

$$I = M \left\{ \int_0^T [x(t) - \sum_{n=0}^{N-1} y_n \varphi_n(t)]^2 \rho(t) dt \right\}, \quad (3)$$

где $M\{\dots\}$ – оператор математического ожидания.

Как показано в работе [4] минимум этого функционала достигается, если одновременно дисперсии D_x коэффициентов разложения сигнала $x(t)$ по функциям $\varphi_n(t)$ и сами базисные функции $\varphi_n(t)$ удовлетворяют равенству

$$\int_0^T R_x(t, \tau) \varphi_n(\tau) \rho(\tau) d\tau = D_n \varphi_n(t), \quad (4)$$

Таким образом, дисперсии коэффициентов разложения должны быть обратно пропорциональны собственным числам, а базисные функции $\varphi_n(t)$ должны являться собственными функциями ядра $R_x(t, \tau) \rho(t)$ интегрального уравнения (4).

Дисперсия ошибки аппроксимации случайного процесса конечной суммой ряда, состоящего из N слагаемых, определяется как:

$$\varepsilon_a^2 = M \left\{ \int_0^T \left[x(t) - \sum_{n=0}^{N-1} y_n \varphi_n(t) \right]^2 \rho(t) dt \right\} = \sum_{n=N}^{\infty} D_n.$$

Предположим, что $x(t)$ является реализацией эргодического случайного процесса, которую можно представить в виде $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \varphi_n(t)$.

Определим корреляционную функцию случайного процесса

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} y_n \varphi_n(t) \sum_{m=0}^{\infty} y_m \varphi_m(t+\tau) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} y_k y_n R_{kn}(\tau) = R_x(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} y_n^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ k \neq n}}^{\infty} y_k y_n R_{kn}(\tau), \end{aligned} \quad (5)$$

где $R_{kn}(\tau)$ – взаимные корреляционные функции базисных функций.

Сформируем из функций $\varphi_n(t)$ ортогональный с весом $\rho(\tau)$ базис следующим образом. Пусть $\varphi_0(t)$ имеет изображение по Лапласу, которое представляет собой минимально-фазовую функцию $\Phi_0(p)$, то есть $\Phi_0(p)$ является аналитической и не имеет нулей и полюсов в правой половине комплексной плоскости. Остальные функции базиса получим путем смещения $\varphi_0(t)$ на величину $n\alpha$, т.е. $\varphi_n(t) = \varphi_0(t - n\alpha)$. Сформированную таким образом систему функций будем называть базисом с минимально-фазовым спектром (МФС-базисом).

Покажем, что функции МФС-базиса удовлетворяют равенству (5).

Спектральная плотность функций $\varphi_n(t)$, составляющих МФС-базис, имеет вид:

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^k b_i l_i(t) \quad (14)$$

является весовой функцией ортогонального базиса, составленного из функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)$.

Доказательство данной теоремы вытекает из условия существования решения системы линейных алгебраических уравнений.

В зависимости от вида функций $l_1(t), l_2(t), \dots, l_k(t)$, энергия весовой функции

$$I(h) = \int_{t_1}^{t_2} \rho^2(t) dt \quad (15)$$

может принимать различные значения.

В работе [4] доказывается, что $\rho(t)$, которая обращает в минимум функционал (15) при условиях (12), представляет собой квадратичную форму от функций $\varphi_n(t)$. Если $\varphi_n(t)$ являются эквидистантными функциями, то весовая функция имеет вид периодической функции с периодом α :

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \dots \lambda_0 \varphi_0^2(t) + \lambda_1 \varphi_0(t) \varphi_1(t) + \dots + \lambda_0 \varphi_1^2(t) + \lambda_1 \varphi_1(t) \varphi_2(t) + \dots + \lambda_0 \varphi_2^2(t) + \dots = \\ &= \lambda_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(t) + \lambda_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_{n+1}(t) + \lambda_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_{n+2}(t) + \dots + \lambda_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_{n+m}(t) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Для определения множителей λ_m , достаточно подставить выражение (16) в уравнения (12).

Сходимость рядов, составленных из МФС-базиса, и число степеней свободы сигнала. Пусть сигнал $x(t)$ раскладывается в ряд по функциям МФС-базиса:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \varphi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \varphi_0(t - n\alpha). \quad (17)$$

Преобразование Фурье от выражения (17) имеет вид

$$X(\omega) e^{j\vartheta(\omega)} = \Phi_0(\omega) e^{j\vartheta_0(\omega)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\omega n \alpha}, \quad (18)$$

где $X(\omega)$ и $\vartheta(\omega)$ – случайные функции, которые можно считать модулем и аргументом спектральной плотности сигнала $x(t)$.

Тогда, если $X(\omega) = \Phi_0(\omega) = \sqrt{W_x(\omega)}$, то

$$e^{j[\vartheta(\omega) - \vartheta_0(\omega)]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\omega n \alpha}. \quad (19)$$

Определение. Числом степеней свободы сигнала будем называть эффективное количество коэффициентов ряда (17) [5]

$$N = \sqrt{\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 y_n^2}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^2}} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 y_n^2}. \quad (20)$$

Известно, что если функция имеет непрерывную вторую производную, то коэффициенты ее ряда Фурье y_n таковы, что

$$|y_n| \leq \frac{C}{n^2},$$

где C – максимальное значение модуля второй производной данной функции [6].

Выражение (19) является разложением в ряд Фурье функции $e^{j[\vartheta(\omega) - \vartheta_0(\omega)]}$. Примем $\Delta\theta(\omega) = \vartheta(\omega) - \vartheta_0(\omega)$ и найдем условия, при которых модуль второй производной функции $e^{j\Delta\theta(\omega)}$ максимален [5].

$$\left| \frac{d^2}{d\omega^2} e^{j\Delta\theta(\omega)} \right| = \sqrt{[\Delta\theta'(\omega)]^4 + [\Delta\theta''(\omega)]^2}. \quad (21)$$

Выражение (21) имеет экстремум, если

$$\Delta\theta''(\omega) = 0, \quad (22)$$

или
$$[\Delta\theta'(\omega)]^4 + [\Delta\theta''(\omega)]^2 = 0, \quad (23)$$

или
$$2[\Delta\theta'(\omega)]^3 + \Delta\theta'''(\omega) = 0. \quad (24)$$

Решения дифференциального уравнения (22) имеют вид $\Delta\theta(\omega) = A_1\omega + A_2$, где A_1 – постоянные интегрирования. Поскольку функция $\Delta\theta(\omega)$ является аргументом функции $e^{j\Delta\theta(\omega)}$, то она должна быть нечетной, и

$$-\frac{\pi}{2} < \Delta\theta(\omega) < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $A_2 = 0$, и решение дифференциального уравнения (22) имеет вид

$$\Delta\theta(\omega) = A_1\omega. \quad (25)$$

Построив график функции $\Delta\theta(\omega) = \arctg[\tg\{A_1\omega\}]$ для различных значений A_1 , можно убедиться, что A_1 равно числу точек разрыва функции $\Delta\theta(\omega)$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Формула (25) соответствует сигналу $x(t)$, имеющему спектральную плотность вида

$$X(j\omega) = F_0(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\omega\alpha n} = F_0(j\omega) e^{jA_1\omega},$$

т. е. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\omega\alpha n} = e^{j(A_1\omega + A_2)} = e^{jA_1\omega}$ и ряд (19) состоит из одного слагаемого, причем $A_1 = -\alpha k$, где k – целое число, коэффициент $y_k = 1$.

Дифференциальное уравнение (23) имеет решение, если одновременно $\Delta\theta'(\omega) = 0$ и $\Delta\theta''(\omega) = 0$, но это означает, что $\Delta\theta(\omega) = A$, где A – некоторая постоянная. Учитывая, что аргумент спектральной плотности является функцией нечетной, получаем $A = 0$, $X(j\omega) = F_0(j\omega)$. Данный случай аналогичен предыдущему. Ряд (18) состоит из одного слагаемого – самой функции $X(j\omega)$.

Дифференциальное уравнение (24) имеет 4 решения, среди которых только два вещественных:

$$\Delta\theta(\omega) = A, \quad (26)$$

$$\Delta\theta(\omega) = C_1 + C_2 \sin(2^{\frac{1}{6}}\omega) + C_3 \cos(2^{\frac{1}{6}}\omega), \quad (27)$$

Формула (26) аналогична решению уравнения (22) ($A = 0$).

Рассмотрим выражение (27). Поскольку $\Delta\theta(\omega)$ является нечетной функцией, то $C_1 = C_3 = 0$, и функция

$$\Delta\theta(\omega) = C_2^2 \sin(2^{\frac{1}{6}}\omega) \quad (28)$$

обеспечивает максимальное значение выражения (21), которое имеет вид

$$\left| \frac{d^2}{d\omega^2} e^{j\Delta\theta(\omega)} \right| = 2^{\frac{1}{3}} \sqrt{C_2^4 \cos^4 2^{\frac{1}{6}}\omega + C_2^2 \sin^2 2^{\frac{1}{6}}\omega}.$$

Данное выражение представляет собой периодическую функцию, максимальное значение которой равно

$$\max \left| \frac{d^2}{d\omega^2} e^{j\Delta\theta(\omega)} \right| = 2^{\frac{1}{3}} C_2^2.$$

Следовательно,

$$|y_n| \leq 2^{\frac{1}{3}} \frac{C_2^2}{n^2}.$$

Найдем сумму $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 y_n^2$, стоящую под знаком корня в выражении (21), и определим зависимость числа степеней свободы сигнала от параметра C_2 .

Подставив (28) в (19), получим

$$e^{jC_2 \sin(2^{\frac{1}{6}} \omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\omega n \alpha}. \quad (29)$$

Как известно [7], для функций Бесселя первого рода справедливы соотношения:

$$e^{jC_2 \sin(\alpha \omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(C_2) e^{j\omega n \alpha}, \quad J_{-n}(C_2) = (-1)^n J_n(C_2),$$

используя которые, из равенства (29) получаем:

$$e^{jC_2 \sin(2^{\frac{1}{6}} \omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(C_2) e^{-j\omega n 2^{\frac{1}{6}}}. \quad (30)$$

Сравнивая правые части (29) и (30), находим, что $\alpha = 2^{\frac{1}{6}}$ и $y_n = (-1)^n J_n(C_2)$.

Известно [7], что общий член асимптотического разложения функции Бесселя первого рода при больших значениях порядка ($n \rightarrow \infty$) имеет вид

$$J_n(C_2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e C_2}{2n} \right)^n.$$

Следовательно, описание сигнала в МФС-базисе обеспечивает более высокую скорость сходимости ряда (17), чем разложение в ряд по другим функциям (скорость сходимости таких рядов обратно пропорциональна целой степени n).

Определим число степеней свободы сигнала

$$N = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 y_n^2} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 [(-1)^n J_n(C_2)]^2} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 J_n(C_2)^2}. \quad (31)$$

Просуммировав ряд, стоящий под знаком квадратного корня, получим [5]:

$$N = \frac{C_2}{2} \sqrt{2 + J_1^2(C_2)}. \quad (32)$$

Следовательно, число степеней свободы сигнала зависит от постоянной интегрирования C_2 .

Построив график функции $\Delta\theta(\omega) = \arctg\{\operatorname{tg}\Delta\theta(\omega)\}$, можно убедиться, что $C_2 = \frac{\pi}{2} A$, где A – целое число, связанное с количеством R точек разрыва функции $\Delta\theta(\omega)$ соотношением

$$R = A - \frac{1 + (-1)^{A-1}}{2}.$$

При большом значении R можно принять $R = A$. Таким образом, C_2 пропорционально числу точек разрыва функции $\Delta\theta(\omega) = \arg\left\{\frac{X(j\omega)}{F_0(j\omega)}\right\}$, а число слагаемых в сумме ряда (число степеней свободы), достаточных для описания сигнала зависит от числа точек разрыва аргумента ее спектральной плотности на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Пропускная способность физически реализуемого канала связи. Пусть $x(t)$ – принимаемый сигнал, раскладываемый по функциям МФС-базиса в соответствии с формулой (17), в которой величина N понимается в смысле (32). Для вывода формулы пропускной способности канала связи повторим последовательность рассуждений К. Шеннона, описанную в работе [2].

Энергия сигнала $x(t)$ описывается формулой

$$E_x = \int_0^T x^2(t) \rho(t) dt = q \sum_{n=1}^N y_n^2, \quad (33)$$

где $q = \int_0^T \rho_n^2(t) \rho(t) dt$, T – длительность сигнала $x(t)$. Все передаваемые сигналы имеют одинаковую

энергию. В N -мерном базисе расстояние от начала координат до данной точки равно $d = \sqrt{\sum_{n=1}^N y_n^2}$. Тогда

из (33) имеем $d^2 = \frac{E_x}{q} = \frac{P_x T}{q}$, где $P_x = \frac{E_x}{T}$ – мощность сигнала.

Принятые сигналы имеют среднюю мощность $P_x + P_n$, где $P_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(f) N_0 df$ – мощность шума, $K(f)$ – амплитудно-частотная характеристика канала связи, N_0 – спектральная плотность мощности белого шума, или среднюю энергию $(P_x + P_n) \frac{T}{q}$ и должны лежать на поверхности сферы радиуса $\sqrt{\frac{T}{q} (P_x + P_n)}$.

Различимых сигналов будет не больше, чем объем N -мерной сферы радиуса $\sqrt{\frac{T}{q} (P_x + P_n)}$, деленной на объем сферы радиуса $\sqrt{\frac{T}{q} P_n}$. Т.е. количество различимых сигналов равно $\left(\sqrt{\frac{P_x + P_n}{P_n}} \right)^N$.

Отсюда следует, что максимальная скорость передачи информации равна

$$C = \frac{\log_2 \left(\sqrt{\frac{P_x + P_n}{P_n}} \right)^N}{T} = \frac{N}{2T} \log_2 \left(\frac{P_x + P_n}{P_n} \right).$$

С учетом выражения для мощности шума в канале связи имеем:

$$C = \frac{N}{2T} \log_2 \left(1 + \frac{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \rho(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} K^2(f) N_0 df} \right). \quad (34)$$

Исключение межканальных помех. Пусть в трех соседних каналах связи передаются сигналы $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ соответственно. Эти сигналы с помощью соответствующих систем линейно-независимых функций $\psi_n(t)$, $\phi_n(t)$ и $\xi_n(t)$ могут быть представлены в виде рядов:

$$\begin{cases} x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \psi_n(t), \\ x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(t), \\ x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \xi_n(t). \end{cases} \quad (35)$$

Системы функций $\psi_n(t)$, $\phi_n(t)$ и $\xi_n(t)$ получим как МФС-базисы сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$, и потребуем выполнения условий

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_k(t) \rho(t) dt &= \begin{cases} 1, n = k, \\ 0, n \neq k, \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \psi_k(t) \rho(t) dt &= 0, \text{ при любых } n \text{ и } k, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \xi_k(t) \rho(t) dt &= 0, \text{ при любых } n \text{ и } k, \end{aligned} \right. \quad (36)$$

где

$$\rho(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{nk} \varphi_n(t) \varphi_k(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_{nk} \varphi_n(t) \psi_k(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_{nk} \varphi_n(t) \xi_k(t). \quad (37)$$

Коэффициенты λ_{nk} , μ_{nk} , η_{nk} определяются после подстановки (37) в (36).

Поскольку $\psi_n(t)$, $\varphi_n(t)$ и $\xi_n(t)$ являются эквидистантными функциями, то $h(t)$ представляет собой периодическую функцию.

Выделим сигнал $x_2(t)$ из аддитивной смеси $y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$. Для этого умножим $y(t)$ на произведение $\varphi_n(t)h(t)$, проинтегрируем результат и, используя условия (36), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \varphi_n(t) \rho(t) dt = a_n.$$

Таким путем можно получить все коэффициенты разложения $x_2(t)$ в ряд по $\varphi_n(t)$. Увеличив $\varphi_n(t)$ в a_n раз, и сложив все произведения $a_n \varphi_n(t)$, получим сигнал $x_2(t)$.

Исключение межсимвольной интерференции. Межсимвольная интерференция в каждом из каналов связи устраняется за счет того, что сигналы, соответствующие символам сообщения, ортогональны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) \varphi_k(t) \rho(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \varphi_k(t) \rho(t) dt = a_k$$

Вывод. Предложенный метод представления сигнала в МФС-базисе позволяет улучшить сходимость ряда, описывающего сигнал, ввести понятие количества степеней свободы сигналов и получить выражение для пропускной способности физически реализуемого канала связи. Ортогонализация сигналов, с помощью которых передается информация, позволяет исключить межсимвольную интерференцию и межканальные помехи. Введение физически осуществимых базисных функций исключает противоречие, связанное с одновременным ограничением длительности сигнала и ширины его спектра.

Направление дальнейших исследований. Целесообразно рассмотреть вопрос об аппроксимации импульсных характеристик физически реализуемых фильтров ортогональными функциями, которые имеют простые математические выражения.

Библиографический список

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — М.: Наука, 1965. — 407 с.
2. Шеннон К.Э. Математическая теория связи / К.Э. Шеннон // Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963. — С. 243–332.
3. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. В 2 ч. Ч. 2 / У.М. Сиберт. — М.: Мир, 1988. — 359 с.
4. Дегтярев А.Н. Быстро сходящиеся ортогональные ряды / А.Н. Дегтярев // Прикладные задачи математики и механики: матер. 17-й междунар. науч.-техн. конф., Севастополь, 14-18 сент. 2009 г. — Севастополь, 2009. — С. 244–251.
5. Дегтярев А.Н. Количество степеней свободы физически реализуемого сигнала / А.Н. Дегтярев, Р.Е. Агаханянц // Зв'язок. — 2008. — № 2 (70). — С. 64–68.
6. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы / Д. Джексон. — М.: Гос. изд. иностр. лит., 1948. — 260 с.
7. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М.: Наука, 1974. — 296 с.

Поступила в редакцию 28.10.2009 г.