

УДК 624

А.И. Бохонский*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***А.В. Исаев***Севастопольский военно-морской институт им. П.С. Нахимова**ул. П. Дыбенко, 1 А, г. Севастополь, Украина, 99035***ПОИСК УПРАВЛЕНИЙ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ В СИСТЕМЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ***С использованием систем аналитических вычислений (САВ) исследованы оптимальные управления колебаниями деформируемых объектов.*

Задачи управления колебаниями (активного гашения колебаний) продолжают оставаться актуальными во многих областях современной техники [1–4]. Например, в канатном производстве для подавления крутильных колебаний катушек в системе перемотки проволок предложены и исследованы пассивные динамические гасители [3], которые, однако, применяются для объектов с фиксированной частотой колебаний. В связи со сложным характером смешанных крутильных колебаний питающих катушек канатовьющих машин пассивные гасители достаточно эффективны в узком диапазоне частот; поэтому были предложены активные (управляемые) гасители крутильных колебаний.

Активное гашения колебаний объектов основано на использовании методов теории синтеза управляемых оптимальных регуляторов [5,6], предполагающей наличие дополнительного источника энергии для гашения колебаний объекта. Актуальность задач оптимального управления колебаниями объектов техники отражена, например, в [2].

Процедура синтеза оптимальных регуляторов, основанная на теории аналитического конструирования регулятора при использовании квадратичного критерия качества, предполагает решение нелинейных дифференциальных либо алгебраических уравнений Риккати. Уже для управляемого динамического гасителя колебаний системы с двумя степенями свободы [4] нелинейные алгебраические уравнения Риккати содержат избыточное число корней, из которых по специальной программируемой процедуре берутся только те (по критерию Сильвестра), которые обеспечивают устойчивость замкнутой системы.

Обращают на себя внимание трудности решения систем нелинейных уравнений Риккати, которые можно проиллюстрировать на простом примере системы уравнений, приведенных в [5].

Корни системы алгебраических уравнений Риккати

$$1 - 2p_{12} - p_{12}^2 = 0, \quad 2p_{11} - 2p_{12} - p_{12}p_{22} = 0, \quad 2p_{12} - 2p_{22} - p_{22}^2 = 0,$$

найденные с помощью функции *Maple fsolve*: $p_{11} = -0,0578$, $p_{22} = -2,3161$, $p_{12} = 0,3660$; эти корни удовлетворяют системе уравнений, но они отличны от опубликованных в [5].

Целью исследований является реализация в системе аналитических вычислений алгоритмов поиска управлений, которые не предполагают этапа решения дифференциальных либо алгебраических уравнений Риккати.

В связи с развитием систем аналитических вычислений появляется возможность облегчить реализацию отдельных трудоемких методов теории оптимального управления. Однако, с другой стороны, не следует преувеличивать эти возможности. Проиллюстрируем некоторые аналитические особенности поиска управления на весьма простом примере управления колебаниями упругой системы с одной степенью свободы.

Пусть необходимо найти управление (в виде обратной связи), обеспечивающее перевод упругой системы из исходного отклоненного состояния, определяемого ненулевыми начальными условиями ($x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = V_0$), в конечное состояние покоя за минимальное время T при достижении минимума квадратичного критерия

$$I = \int_0^T (x^2 + rU^2) dt = \min, \quad (1)$$

где x – координата; r – константа, U – управление.

Если, например, уравнение движения объекта с одной степенью свободы имеет вид

$$m\ddot{x} + k_1\dot{x} + cx = U_*(t), \quad (2)$$

где управление с обратной связью $U_*(t) = b_1 \dot{x} + b_2 x$, то (2) можно переписать так:

$$m\ddot{x} + (k_1 - b_1)\dot{x} + (c - b_2)x = 0. \quad (3)$$

Здесь k_1 – коэффициент затухания; b_1, b_2 – константы.

При подстановке решения однородного уравнения (3) в критерий (1) и интегрирования необходимые условия экстремума функции двух переменных

$$\frac{\partial I}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial b_2} = 0 \quad (4)$$

приводят к весьма сложным трансцендентным уравнениям (здесь не приводятся), решение которых в настоящее время крайне затруднено даже с использованием современных САВ. Рассмотренная процедура поиска управления неэффективна и может быть заменена более простой.

Остановимся на одной из интерпретаций известного в теории оптимального управления метод моментов [1] поиска управлений для частного случая, когда управление носит резонансный характер. Алгоритм дальше иллюстрируется на простом примере.

Уравнение движения упругой системы в управляемом состоянии без учета сопротивления имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = A \sin kt + B \cos kt, \quad (5)$$

где k – частота свободных колебаний; A, B – константы, подлежащие определению.

Необходимо найти такие значения A и B , при которых за минимальное время ($T = \min$) обеспечивается полное подавление колебаний, возникших в связи с ненулевыми начальными условиями (при $t = 0, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = V_0$). Тогда с учетом заданных начальных условий перемещение и скорость, найденные с использованием функции *dsolve* в Maple, на языке Maple записываются таким образом:

$$\begin{aligned} x &:= 1/2 * (A * \sin(k*t) + 2 * \sin(k*t) * v_0 * k + 2 * \cos(k*t) * x_0 * k^2 + \sin(k*t) * B * k * t - \cos(k*t) * A * k * t) / k^2; \\ v &:= 1/2 * (2 * \cos(k*t) * k^2 * v_0 - 2 * \sin(k*t) * k^3 * x_0 + \cos(k*t) * k^2 * B * t + \sin(k*t) * B * k + \sin(k*t) * k^2 * A * t) / k^2; \end{aligned} \quad (6)$$

В момент времени $t = T = n\pi/k$, где n – параметр, подлежащий последующему определению, должны выполняться следующие краевые условия, которые гарантируют подавление колебаний при $t > T$:

$$x(T) = 0; \quad V(T) = 0. \quad (7)$$

Параметры A и B найдены из системы уравнений (7) с использованием функции *solve* и на языке Maple записываются так:

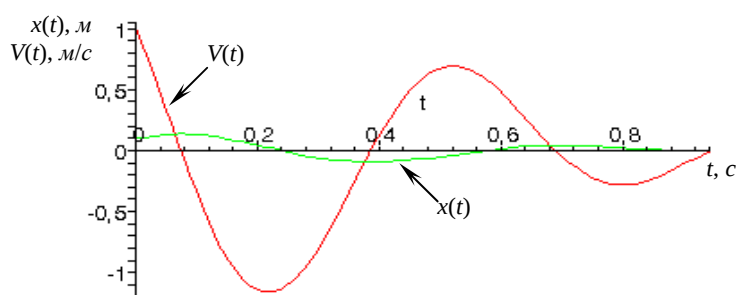
$$A := 2 * k * (\tan(n * \pi) ^ 2 * v_0 + \tan(n * \pi) * x_0 * k + \tan(n * \pi) ^ 2 * x_0 * k * n * \pi + n * \pi * x_0 * k) / (-\tan(n * \pi) ^ 2 + n ^ 2 * \pi ^ 2 + \tan(n * \pi) ^ 2 * n ^ 2 * \pi ^ 2);$$

$$B := -2 * k * (\tan(n * \pi) ^ 2 * x_0 * k + v_0 * n * \pi + n * \pi * \tan(n * \pi) ^ 2 * v_0 - \tan(n * \pi) * v_0) / (-\tan(n * \pi) ^ 2 + n ^ 2 * \pi ^ 2 + \tan(n * \pi) ^ 2 * n ^ 2 * \pi ^ 2);$$

Дальше в $x(t)$ и $V(t)$ подставляются найденные A и B , а выбор параметра n при $t = T = n\pi/k$ производится простым перебором. Оказывается, что условия (7) выполняются при $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Например, при $n = 4$ следует $A = k^2 x_0 / 2\pi, B = -kV_0 / 2\pi$, т.е. управление (на единицу массы) имеет вид

$$u(t) = \frac{k}{2\pi} (kx_0 \sin kt - V_0 \cos kt).$$

Численный пример. Исходные данные: $n = 3; k = 10 \text{ с}^{-1}; x_0 = 0,1 \text{ м}; V_0 = 1 \text{ м/с}$. Графики $x(t)$ и $V(t)$, полученные с использованием Maple, изображены на рисунке 1. За время $T = 0,3\pi \text{ с}$ происходит полное подавление колебаний и при отключении управления в момент $T = 0,3\pi \text{ с}$ дальше наступает покой.

Рисунок 1 – Графики $x(t)$ и $V(t)$

Интересно отметить, что решение предыдущей задачи можно получить более простым путем с использованием принципа суперпозиции для линейной системы и идеи обратной связи. При этом аналитические преобразования существенно упрощаются, но, естественно, осуществляются только с использованием САВ.

Как известно, при незатухающих колебаниях системы с одной степенью свободы и ненулевых начальных условиях ($x_1(0) = x_0$, $\dot{x}_1(0) = V_0$) решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2 x_1 = 0$$

записывается так:

$$x_1 = \frac{V_0}{k} \sin kt + x_0 \cos kt, \quad V = \frac{dx_1}{dt} = V_0 \cos kt - x_0 k \sin kt.$$

Колебания можно подавить за конечное время путем ввода обратной связи

$$u = ax + b, \quad (8)$$

где коэффициенты усиления (константы a, b) подлежат определению.

После подстановки (8) в правую часть уравнения (2), решения уравнения с использованием условий $x_1(T) = 0$, $V_1(T) = 0$, где $T = n\pi/k$, из полученной системы алгебраических уравнений (пример при $n = 4$), которые приводятся на языке Maple

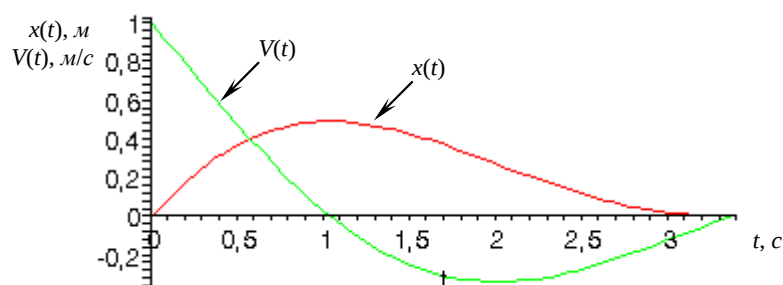
$$\begin{aligned} L1 &:= -1/2*(b*v0+a*x0-2*x0*k^2)/k^2-1/2*(-b*v0+4*a*v0*\pi/k-a*x0-4*b*k*x0*\pi)/k^2=0; \\ L2 &:= 1/2*(a*v0-b*k^2*x0+2*v0*k^2)/k^2+2*\pi*(b*v0+a*x0)/k-1/2*(a*v0-b*k^2*x0)/k^2=0; \end{aligned}$$

следует $a = 0$ и $b = -k/2\pi$, т.е., как и ожидалось, получен точный результат, соответствующий решению предыдущей задачи, но более простым путем.

В случае поиска резонансного управления для системы с линейно-вязким сопротивлением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n_* \frac{dx}{dt} + k^2 x = A \sin \sqrt{k^2 - n_*^2} t + B \cos \sqrt{k^2 - n_*^2} t$$

не удастся преодолеть трудности при определении констант A и B , т.е. найти аналитическое решение; необходимо (для получения численных значений коэффициентов A и B) заранее задавать коэффициент затухания n_* в исходной системе. Например, при $k = 1 \text{ c}^{-1}$; $n_* = k/8 \text{ c}^{-1}$; $x_0 = 0$; $V_0 = 1 \text{ м/с}$ следует: $A = -0,0586 \text{ м/с}^2$; $B = -0,3103 \text{ м/с}^2$.

Рисунок 2 – Графики перемещения $x(t)$ и скорости $V(t)$

В данном примере полное подавление колебаний осуществляется за половину периода собственных колебаний системы (рисунок 2).

Выводы

1. Алгоритм поиска управлений для подавления свободных колебаний линейной системы, основанный на использовании идеи обратной связи при реализации метода моментов в САВ, существенно упрощает процесс аналитических преобразований и приводит к точному решению.

2. Рассмотренный подход избавляет от необходимости решения системы нелинейных алгебраических уравнений Риккати с большим числом корней.

3. В случае учета линейно-вязкого сопротивления процедура поиска управления по методу моментов в настоящее время реализуется в САВ только при численных исходных данных.

В дальнейших исследованиях предполагается создание программы в САВ для получения управления колебаниями систем с конечным числом степеней свободы и систем с распределенными массами.

Библиографический список

1. Карновский А.И. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.М. Почтман. — К.; Донецк: Выща шк., 1982. — 116 с.
2. Бохонский А.И. Актуальные задачи оптимального управления / А.И. Бохонский // Вестник СевГТУ: сб. науч. тр. — Севастополь, 1997. — Вып. 8. — С. 8–12.
3. Бохонский А.И. Использование динамических гасителей крутильных колебаний в системе перемотки проволок / А.И. Бохонский, Е.В. Хромов // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні: наук журн. Запорізького державного техн. ун-та. — Запоріжжя, 2000. — № 1. — С. 136–138.
4. Бохонский А.И. Активное демпфирование колебаний объекта / В.Я. Копп, А.И. Бохонский, М.И. Мозолевский // Вестник СевГТУ: сб. науч. тр. — Севастополь, 2000. — Вып. 27. — С. 61–65.
5. Солодовников В.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования: учеб. пособие / В.В. Солодовников, В.Н. Пробников, А.В. Яковлев. — М.: Машиностроение, 1985. — 536 с.
6. Олейников В.А. Основы оптимального и экстремального управления / В.А. Олейников, Н.С. Зотов, А.М. Пришвин. — М.: Высш. шк., 1969. — 296 с.
7. Дьяконов В.П. Maple 7: учебный курс / В.П. Дьяконов. — СПб.: Изд-во “Питер”, 2002. — 672 с.

Поступила в редакцию 7.02.2007 г.