

УДК 624

А.И. Бохонский, профессор, д-р техн. наук,**Л.В. Барашова, аспирантка***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ В ПЕРЕНОСНОМ ДВИЖЕНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ**

Для нахождения матриц передаточных функций применен метод главных координат, построены модели и структурные схемы многомерных систем управления колебаниями механических систем. Подход иллюстрируется на примере объекта с шестью степенями свободы. Приведен численный пример для системы с двумя степенями свободы.

Ключевые слова: метод главных координат, многомерные системы управления, матрица передаточных функций, управление колебаниями, структурные схемы систем управления.

Для систем, работающих, например, в условиях случайных воздействий, актуально нахождение передаточных функций, позволяющих определить вероятностные характеристики выходного сигнала по характеристикам входного. Если для системы с одной степенью свободы, описываемой одним дифференциальным уравнением, найти передаточную функцию просто, то для системы с большим числом степеней свободы это сделать сложнее. Методы поиска передаточных функций многомерных систем управления изложены, например, в [3-6] и других.

Однако построение развернутых структурных схем многомерных систем управления продолжает вызывать технические трудности. Для моделирования систем с помощью математических пакетов, например Simulink, построение структурных схем актуально.

В теории колебаний известен метод главных координат, позволяющий перейти от системы связанных между собой дифференциальных уравнений, описывающих колебания системы с конечным числом степеней свободы, к системе не связанных дифференциальных уравнений. Метод изложен в ряде работ, в том числе в [1].

Целью исследований является проверка эффективности применения метода главных координат для формирования матрицы передаточных функций, построение структурных схем и создание моделей (в Simulink) управления колебаниями механической системы с конечным числом степеней свободы.

Проиллюстрируем применение метода главных координат для нахождения матрицы передаточных функций и создания модели объекта с шестью степенями свободы. Колебания объекта без учета сопротивления описываются системой обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$m_i \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^6 r_{ij} \dot{q}_j = P_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (1)$$

где r_{ij} — коэффициенты жесткости; q_i — физические координаты; m_i — массы; $P_i(t)$ — возмущающие силы. Собственные частоты ($p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$) находятся из векового уравнения, определитель которого

$$\begin{vmatrix} r_{11} - p^2 m_1 & r_{12} & \dots & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} - p^2 m_2 & \dots & r_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{61} & r_{62} & \dots & r_{66} - p^2 m_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Из (1) после подстановки частных решений следует система уравнений относительно амплитудных перемещений u_i :

$$\sum_{j=1}^6 r_{ij} u_j - p^2 m_i u_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (2)$$

Согласно (2) соотношения между амплитудными отклонениями: $\frac{u_{2k}}{u_{1k}}; \frac{u_{3k}}{u_{1k}}; \frac{u_{4k}}{u_{1k}}; \frac{u_{5k}}{u_{1k}}; \frac{u_{6k}}{u_{1k}}$,

где первый индекс означает номер перемещения, а второй k — номер формы (моды) колебаний.

Амплитуду одной из масс можно задать произвольно. Принято $u_{11} = u_{12} = u_{13} = u_{14} = u_{15} = u_{16} = 1$. Теперь система уравнений в главных координатах x_i

$$\ddot{x}_i + p_i^2 x_i = \frac{\sum_{j=1}^6 P_j u_{ji}}{\sum_{j=1}^6 m_j u_{ji}^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

или с учетом введенных коэффициентов
$$r_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^6 m_j u_{ji}^2}$$

она записывается так:
$$\ddot{x}_i + p_i^2 x_i = r_i \sum_{j=1}^6 P_j u_{ji}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Физические координаты выражаются через главные следующим образом

$$q_i = \sum_{j=1}^6 x_j u_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Матрица передаточных функций для системы с шестью степенями свободы:

$$W(s) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{1j}^2}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{2j} u_{1j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{3j} u_{1j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{4j} u_{1j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{5j} u_{1j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{6j} u_{1j}}{s^2 + p_j^2} \\ \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{1j} u_{2j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{2j}^2}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{3j} u_{2j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{4j} u_{2j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{5j} u_{2j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{6j} u_{2j}}{s^2 + p_j^2} \\ \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{1j} u_{3j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{2j} u_{3j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{3j}^2}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{4j} u_{3j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{5j} u_{3j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{6j} u_{3j}}{s^2 + p_j^2} \\ \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{1j} u_{4j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{2j} u_{4j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{3j} u_{4j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{4j}^2}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{5j} u_{4j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{6j} u_{4j}}{s^2 + p_j^2} \\ \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{1j} u_{5j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{2j} u_{5j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{3j} u_{5j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{4j} u_{5j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{5j}^2}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{6j} u_{5j}}{s^2 + p_j^2} \\ \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{1j} u_{6j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{2j} u_{6j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{3j} u_{6j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{4j} u_{6j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{5j} u_{6j}}{s^2 + p_j^2} & \sum_{j=1}^6 \frac{r_j u_{6j}^2}{s^2 + p_j^2} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

На рисунке 1 изображена структурная схема в Simulink (в соответствии с методом главных координат). В Maple создана программа для расчетов по методу главных координат.

Механическая система с двумя степенями свободы изображена на рисунке 2. Её дифференциальные уравнения движения:

$$m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) q_1 = c_1 q^e(t) + c_2 q_2, \quad m_2 \ddot{q}_2 + c_2 q_2 = c_2 q_1, \quad (4)$$

где c_1, c_2 — жесткости виброизоляторов. Если кинематическое возбуждение (переносное движение) гармоническое ($q^e = B \sin \omega t$), то

$$m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) q_1 = c_1 B \sin \omega t + c_2 q_2, \quad m_2 \ddot{q}_2 + c_2 q_2 = c_2 q_1. \quad (5)$$

Для системы уравнений (4) применен метод главных координат. При свободных колебаниях уравнения движения

$$m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) q_1 - c_2 q_2 = 0, \quad m_2 \ddot{q}_2 + c_2 q_2 - c_2 q_1 = 0.$$

После подстановки $q_1 = u_1 \sin(pt + \phi)$, $q_2 = u_2 \sin(pt + \phi)$, где u_k — амплитуды, p — частота, ϕ — фаза колебаний, следует система уравнений относительно амплитудных перемещений: $(c_1 + c_2)u_1 - c_2 u_2 - p^2 m_1 u_1 = 0$, $-c_2 u_1 + c_2 u_2 - p^2 m_2 u_2 = 0$.

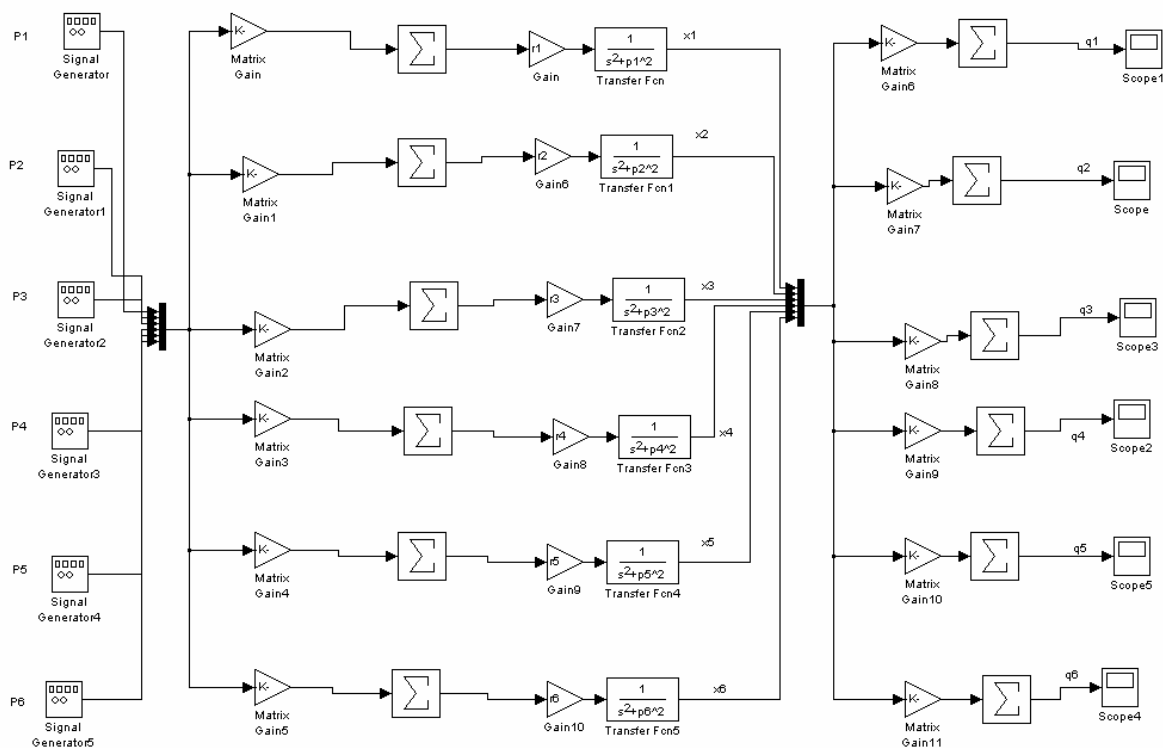


Рисунок 1 – Структурная схема в Simulink по методу главных координат (шесть степеней свободы)

Вековое уравнение в данном случае получено из определителя

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - p^2 m_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - p^2 m_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Из (6) следует биквадратное уравнение

$$m_1 m_2 p^4 - ((c_1 + c_2)m_2 + c_2 m_1)p^2 + c_1 c_2 = 0 \quad \text{или} \quad p^4 - \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) p^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0.$$

Собственные частоты равны:

$$p_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}},$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}.$$

Согласно методу главных координат каждой частоте p_k соответствует своя форма колебаний и соотношения между всеми амплитудными перемещениями u_k . Для каждой собственной частоты p_k найдена форма (мода) колебаний.

Соотношения между амплитудными отклонениями масс $\frac{u_{2k}}{u_{1k}} = \frac{(c_1 + c_2 - p_k^2 m_1)}{c_2}$.

Амплитуда одной из масс задана так: $u_{11} = u_{22} = 1$. Первая форма (мода) колебаний характеризуется величинами $u_{11} = 1$, $u_{21} = \frac{(c_1 + c_2 - p_1^2 m_1)}{c_2}$, а вторая $u_{12} = 1$, $u_{22} = \frac{(c_1 + c_2 - p_2^2 m_1)}{c_2}$.

Уравнения движения системы (рисунок 2) в главных координатах:

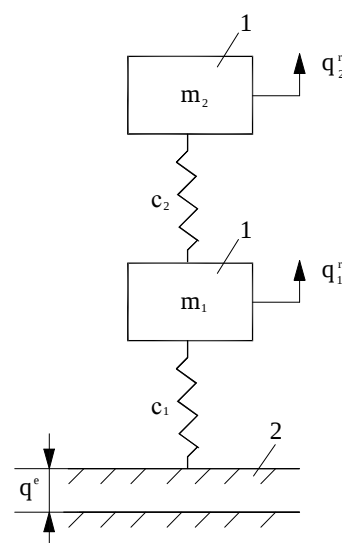


Рисунок 2 – Модель виброзащитного устройства с кинематическим возбуждением

$$\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = Q_1 / M_1; \quad \ddot{x}_2 + p_2^2 x_2 = Q_2 / M_2, \quad (7)$$

где x_1, x_2 — главные координаты системы; Q_1, Q_2 — обобщенные силы; M_1, M_2 — обобщенные массы. Обобщенные массы вычисляются так:

$$M_1 = m_1 u_{11}^2 + m_2 u_{21}^2, \quad M_2 = m_1 u_{12}^2 + m_2 u_{22}^2. \quad (8)$$

Соответственно обобщенные силы:

$$Q_1 = P_1 u_{11} + P_2 u_{21}, \quad Q_2 = P_1 u_{12} + P_2 u_{22}. \quad (9)$$

После решения системы (7) физические координаты выражаются через обобщенные

$$q_1 = x_1 u_{11} + x_2 u_{12}, \quad q_2 = x_1 u_{21} + x_2 u_{22}. \quad (10)$$

Система уравнений (7) с учетом (8) и (9) приобретает вид:

$$\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = \frac{P_1 u_{11} + P_2 u_{21}}{m_1 u_{11}^2 + m_2 u_{21}^2}; \quad \ddot{x}_2 + p_2^2 x_2 = \frac{P_1 u_{12} + P_2 u_{22}}{m_1 u_{12}^2 + m_2 u_{22}^2}.$$

Из (4) видно, что $P_1 = c_1 q^e(t)$, $P_2 = 0$ и тогда

$$\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = \frac{P_1 u_{11}}{m_1 u_{11}^2 + m_2 u_{21}^2}; \quad \ddot{x}_2 + p_2^2 x_2 = \frac{P_1 u_{12}}{m_1 u_{12}^2 + m_2 u_{22}^2}. \quad (11)$$

После ввода обозначений $k_1 = u_{11} r_1 = \frac{u_{11}}{m_1 u_{11}^2 + m_2 u_{21}^2}$, $k_2 = u_{12} r_2 = \frac{u_{12}}{m_1 u_{12}^2 + m_2 u_{22}^2}$ система (11)

записывается следующим образом

$$\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = c_1 k_1 q^e(t) \quad \ddot{x}_2 + p_2^2 x_2 = c_1 k_2 q^e(t)$$

или с учетом правой части в (5) $\ddot{x}_1 + p_1^2 x_1 = c_1 k_1 B \sin(\omega t)$; $\ddot{x}_2 + p_2^2 x_2 = c_1 k_2 B \sin(\omega t)$.

Процедура выражения физических координат через главные реализована в математическом пакете Maple.

```
> restart;
> de1:=diff(x1(t),t$2)+p1^2*x1(t)=c1*k1*B*sin(w*t);
de1 := (∂² / ∂t² x1(t)) + p1² x1(t) = c1 k1 B sin(w t)
> cond:=x1(0)=0, D(x1)(0)=0:
> dsolve({de1,cond},x1(t)); # решение уравнения
x1(t) = - (c1 k1 B w sin(p1 t) / (p1 (p1² - w²))) + (c1 k1 B sin(w t) / (p1² - w²))
> x1:=rhs(%);
x1 := - (c1 k1 B w sin(p1 t) / (p1 (p1² - w²))) + (c1 k1 B sin(w t) / (p1² - w²))
> de2:=diff(x2(t),t$2)+p2^2*x2(t)=c1*k2*B*sin(w*t);
de2 := (∂² / ∂t² x2(t)) + p2² x2(t) = c1 k2 B sin(w t)
> cond:=x2(0)=0, D(x2)(0)=0:
> dsolve({de2,cond},x2(t)); # решение уравнения
x2(t) = (c1 k2 B w sin(p2 t) / (p2 (-p2² + w²))) - (c1 k2 B sin(w t) / (-p2² + w²))
> x2:=rhs(%);
x2 := (c1 k2 B w sin(p2 t) / (p2 (-p2² + w²))) - (c1 k2 B sin(w t) / (-p2² + w²))
> q1:=x1*u11+x2*u12; # физические координаты
```

$$\begin{aligned}
 q1 &:= \left(-\frac{c1 k1 B w \sin(p1 t)}{p1 (p1^2 - w^2)} + \frac{c1 k1 B \sin(w t)}{p1^2 - w^2} \right) u11 \\
 &+ \left(\frac{c1 k2 B w \sin(p2 t)}{p2 (-p2^2 + w^2)} - \frac{c1 k2 B \sin(w t)}{-p2^2 + w^2} \right) u12 \\
 &> \text{q2:=x1*u21+x2*u22; } \quad \# \text{ фізическіе координаты} \\
 q2 &:= \left(-\frac{c1 k1 B w \sin(p1 t)}{p1 (p1^2 - w^2)} + \frac{c1 k1 B \sin(w t)}{p1^2 - w^2} \right) u21 \\
 &+ \left(\frac{c1 k2 B w \sin(p2 t)}{p2 (-p2^2 + w^2)} - \frac{c1 k2 B \sin(w t)}{-p2^2 + w^2} \right) u22
 \end{aligned}$$

В Matlab (Simulink) создана модель (в виде структурной схемы), соответствующая системе уравнений (11), рисунок 3, а. Передаточные функций по первому входному воздействию $P_1 = c_1 q^e(t)$ (второе входное $P_2 = 0$) из (3) с учетом принятых обозначений

$$W_{11}(s) = \frac{k_1 u_{11}}{s^2 + p_1^2} + \frac{k_2 u_{12}}{s^2 + p_2^2}, \quad W_{21}(s) = \frac{k_1 u_{21}}{s^2 + p_1^2} + \frac{k_2 u_{22}}{s^2 + p_2^2}.$$

Передаточные функции, вычисленные как $\Phi_1(s) = \frac{q_1(s)}{q^e(s)}$ и $\Phi_2(s) = \frac{q_2(s)}{q^e(s)}$, равны:

$$\Phi_1(s) = c_1 \left(\frac{s^2(k_1 u_{11} + k_2 u_{12}) + k_1 u_{11} p_2^2 + k_2 u_{12} p_1^2}{s^4 + s^2(p_1^2 + p_2^2) + p_1^2 p_2^2} \right),$$

$$\Phi_2(s) = c_1 \left(\frac{s^2(k_1 u_{12} + k_2 u_{22}) + k_1 u_{12} p_2^2 + k_2 u_{22} p_1^2}{s^4 + s^2(p_1^2 + p_2^2) + p_1^2 p_2^2} \right).$$

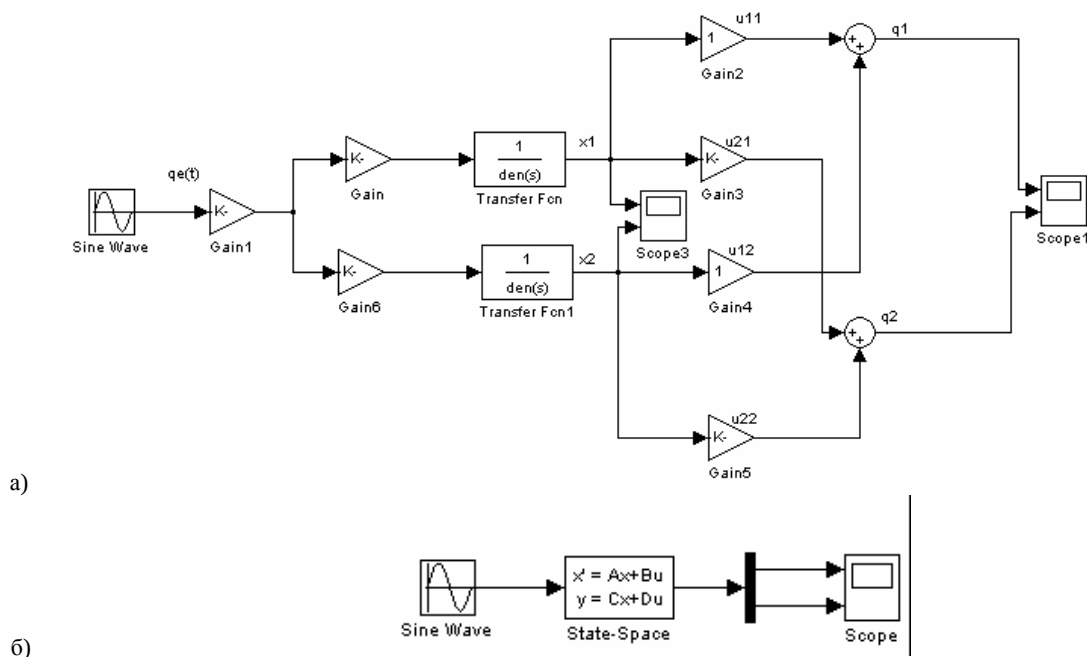


Рисунок 3 – Модели в Simulink (две степени свободы):
а) по методу главных координат (структурная схема); б) в переменных состояния

Для проверки результатов, полученных методом главных координат, в Simulink дополнительно создана модель исследуемого объекта в переменных состояния (рисунок 3, б). Блок Sine Wave формирует синусоидальный входной сигнал (кинематическое возбуждение), а блок State-Space – модель объекта; Scope – позволяет получить графики зависимостей выходных величин q_1, q_2 от времени [2]. Система уравнений (5) в переменных состояния

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{c_1 + c_2}{m_1} y_1 + \frac{c_2}{m_1} y_3 + \frac{c_1}{m_1} B \sin \omega t,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = y_4,$$

$$\frac{dy_4}{dt} = \frac{c_2}{m_2} y_1 - \frac{c_2}{m_2} y_3;$$

$q_1 = y_1$, $q_2 = y_3$, где y_1, y_2, y_3, y_4 — переменные состояния.

Матрица коэффициентов системы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1 + c_2}{m_1} & 0 & \frac{c_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_2}{m_2} & 0 & -\frac{c_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix}$. Матрица входа $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Матрица выхода $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Матрица прямой передачи $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Численный пример. Исходные данные: $c_1 = 60000 \text{ Н/м}$, $c_2 = 70000 \text{ Н/м}$, $m_1 = 100 \text{ кг}$, $m_2 = 30 \text{ кг}$, $B = 0,01 \text{ м}$, $\omega = 60 \text{ с}^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1300 & 0 & 700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2333.3 & 0 & -2333.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В Maple получены графики главных и физических координат. Модель изображена на рисунке 3а. Для модели, изображенной на рисунке 3,б графики физических координат идентичны графикам, полученным с помощью предыдущих моделей. На рисунке 4 изображены графики главных и физических координат (модель рисунок 3).

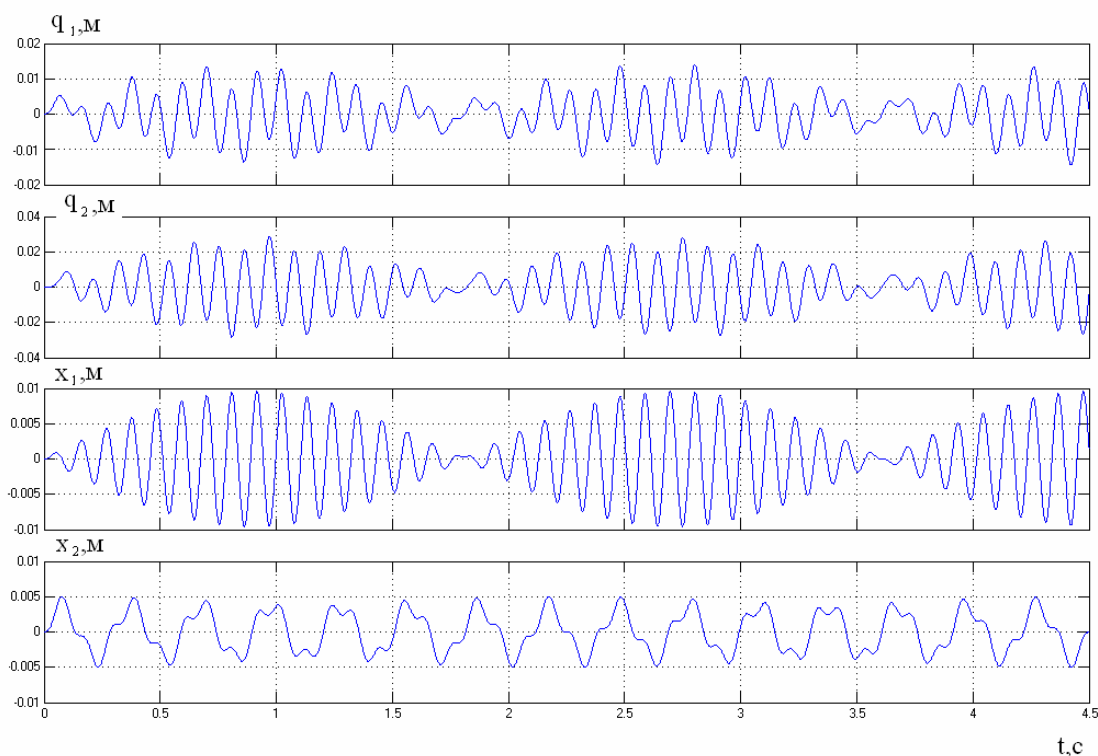


Рисунок 4 – Графики физических и главных координат

Вывод. Метод главных координат является простым и эффективным средством для нахождения матриц передаточных функций, построения структурных схем и моделей управления колебаниями механических систем с конечным числом степеней свободы.

Данный подход предполагается применить для синтеза системы управления с обратной связью движением виброизолированного упругого манипулятора с шестью степенями свободы, работающего в условиях детерминированных и случайных воздействий.

Библиографический список

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: учебник для вузов / В.Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1980. — 480 с.
2. Черных И.В. SIMULINK: среда создания инженерных приложений / И.В. Черных. — М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. — 496 с.
3. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бирман: пер. с англ. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 832 с.
4. Солодовников В.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов / В.В. Солодовников, В.Н. Плотников, А.В. Яковлев. — М.: Машиностроение, 1985. — 536 с.
5. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление: учебное пособие / Я.Н. Ройтенберг. — 2-е изд. — М.: Наука, 1978. — 552 с.
6. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. — Изд. 4-е, перераб. и доп. — СПб.: Изд-во «Профессия», 2007. — 752 с.

Поступила в редакцию 01.01.2010 г.