

УДК 621

А.И. Бохонский*Севастопольский национальный технический университет**Ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sabastopol.ua***ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО ФУНКЦИЯМ**

На ряде примеров иллюстрируется процедура восстановления функционалов по заданным функциям и сделаны выводы об актуальности задач “реверсионного” исчисления.

Ключевые слова: функция, уравнение Эйлера, функционал.

В вариационном исчислении ищется функция, доставляющая экстремум функционалу [1]. В [2], например, приведены примеры решения задач поиска безусловного и условного экстремумов функционалов на основе метода вариаций.

Вариационное исчисление широко используется в задачах синтеза оптимальных управлений. В [3] уделялось внимание выбору критериев оптимальности (функционалов) и класса функций, удовлетворяющих условиям управляемого движения летательных аппаратов и обеспечивающих экстремум функционалов.

Для достаточно простого функционала $J[x(t)] = \int_0^T F(t, x(t), \frac{dx}{dt}) dt$ необходимое условие

экстремума (равенство нулю первой вариации) приводит к уравнению Эйлера $F_x - \frac{d}{dt} F_v = 0$; его решение – функция $x_*(t)$, при которой достигается экстремум.

В настоящее время с привлечение систем аналитических вычислений применяются алгоритмы (стратегии поиска) решения вариационных задач для различных типов функционалов, зависящих от: нескольких функций, производных высшего порядка и других.

Стратегия поиска функционала по заданной функции и до настоящего времени не получила своего отражения в современной литературе.

Целью данной статьи является иллюстрация на характерных примерах процедуры нахождения функционала по заданной функции с обсуждением возможного ее практического приложения при решении некоторых задач оптимального управления, в частности, например, – задач управления деформированием упругих стержней.

Следуя высказыванию *И. Ньютона “при изучении наук примеры полезнее правил”*, далее приводятся примеры, которые иллюстрируют процедуру восстановления функционала по заданной функции и, в конечном счете, могут привести к полезным обобщениям.

Процедуры решения обратных задач вариационного исчисления иллюстрируются на ряде простых примеров.

Пример 1. Наблюдаемая скорость погружения подводной лодки, как функции времени, с сопротивлением, пропорциональным скорости погружения

$$V(t) = \frac{p}{ks} (1 - e^{-\frac{kst}{M}}), \quad (1)$$

где p – отрицательная плавучесть; k – коэффициент пропорциональности ($k > 0$); s – площадь горизонтальной проекции лодки; M – масса лодки. Уравнение (1) после вычисления производной $\frac{dv}{dt}$, исключения времени и преобразований приводит к дифференциальному уравнению

$$M \frac{dV}{dt} = -ksV + p. \quad (2)$$

В данном случае (2) – это уравнение Эйлера ($F_y - \frac{d}{dt} F_v = 0$) для функционала

$$J_2 = \int_0^T (M V^2 / 2 + py) e^{\frac{kst}{M}} dt, \quad (3)$$

который по смыслу соответствует принципу действия (в форме Гамильтона). После подстановки выражений для V и u в (3) и интегрирования (в Maple) следует:

$$J_2 := \frac{1}{2} \frac{M p^2 \left(-3 M e^{\left(\frac{2 k s T}{M} \right)} - M + 2 e^{\left(\frac{2 k s T}{M} \right)} k s T + 4 e^{\left(\frac{k s T}{M} \right)} M \right) e^{\left(-\frac{k s T}{M} \right)}}{k^3 s^3}.$$

Исходные данные: $k = 0,01 \text{ кг/м}^2 \text{ с}$; $M = 3000 \text{ кг}$; $s = 100 \text{ м}^2$; $T = 20 \text{ с}$. В этом случае $J_2 = J_2(p) = 0,92 p^2$, т.е. критерий при увеличении отрицательной плавучести возрастает по квадратной параболе.

Пример 2. Задана непрерывная дифференцируемая функция

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2), \quad (4)$$

где $n, C_1, C_2 = \text{const}$. Найти функционал, которому функция (1) доставляет экстремум.

2.1. Нахождение дифференциального уравнения по его решению (4).

Производные функции (4):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -n e^{-nt} (C_1 t + C_2) + e^{-nt} C_1, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= n^2 e^{-nt} (C_1 t + C_2) - 2n e^{-nt} C_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует

$$e^{-nt} C_1 = \frac{dx}{dt} + n e^{-nt} (C_1 t + C_2). \quad (6)$$

После подстановки (6) в (5) и преобразований получено однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + n^2 x = 0. \quad (7)$$

Физический смысл уравнения (7) известен: оно описывает аperiodическое движение материальной точки с учетом линейно-вязкого сопротивления (при $n = k$, где k – частота собственных колебаний).

2.2. Дифференциальное уравнение (7) является уравнением Эйлера для функционала с подинтегральной функцией $F(t, x(t), \frac{dx}{dt})$:

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + n^2 x \right) e^{2nt} = 0.$$

Тогда $F_x = -n^2 x e^{2nt}, \quad \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = \left(2n \frac{dx}{dt} + n^2 x \right) e^{2nt}.$

Искомый функционал принимает вид $J = \int_0^T \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - n^2 x^2 \right) e^{2nt} / 2 \cdot dt = \text{extr}.$

Проверка (вычисление первой вариации) подтверждает корректность рассмотренной процедуры восстановления функционала по функции (4), однако проблема единственности решения требует специального обоснования.

Пример 3. Найти функционал для функции $x(t) = A \sin(kt)$. После двукратного дифференцирования и преобразований следует уравнение $\ddot{x} + k^2 x = 0$, решением которого является исходная функция. В данном случае уравнение Эйлера соответствует функционалу $J = \int_0^T \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - k^2 x^2 \right) / 2 \cdot dt = \text{extr}$ или $\int_0^T (L - \Pi) dt = \text{extr}$, что в классической механике отражает принцип Гамильтона–Остроградского.

Пример 4. Управление деформированием стержня [4]. Сила P_y медленно движется с постоянной скоростью вдоль стержня с шарнирно закрепленными концами. Найти: управления в виде опорных моментов M_1 и M_2 , обеспечивающие минимум критерия $J = \int_0^a W_1^2(x)dx + \int_a^L W_1^2(x)dx$ при ограничении в виде равенства нулю перемещения по направлению силы $W(a) = 0$.

Если в классических задачах оптимального управления движением объектов нельзя заранее (без применения известных процедур синтеза управления) записать решения дифференциальных уравнений, в которых неизвестные управления входят в правую часть, то в рассматриваемой задаче управления деформированием с использованием методов механики деформируемого твердого тела (например, метода начальных параметров) сразу записываются выражения для $W_1(x)$ и $W_2(x)$, в которые управления M_1 и M_2 входят как символы. Задача на условный экстремум сводится к задаче на безусловный с использованием множителя Лагранжа

$$J_1 = J + \lambda W(a) = \min. \quad (8)$$

Управления и множитель λ находятся из необходимых условий экстремума критерия (8). Громоздкие аналитические преобразования выполнены с привлечением Maple. Выражения для управлений и множителя Лагранжа (на языке Maple):

$m1u :=$

$$\frac{(12 L^7 - 53 a L^6 + 77 a^2 L^5 - 21 a^3 L^4 - 35 a^4 L^3 + 14 a^5 L^2 + 10 a^6 L - 4 a^7) P_y a}{6 L^5 (2 L^2 - 7 L a + 7 a^2)},$$

$$m2u := \frac{(10 L^6 - 49 a L^5 + 84 a^2 L^4 - 35 a^3 L^3 - 28 a^4 L^2 + 22 a^5 L - 4 a^6) a^2 P_y}{6 L^5 (2 L^2 - 7 L a + 7 a^2)},$$

$$\lambda := \frac{(L^5 - 5 a L^4 + 2 L^3 a^2 + 14 a^3 L^2 - 18 a^4 L + 6 a^5) P_y a}{360 (2 L^2 - 7 L a + 7 a^2) E m J},$$

где EmJ – жесткость при изгибе (Em – модуль упругости первого рода; J – осевой момент инерции); L – пролет.

Графики построены при: $L = 0,8$ м; $P_y = 500$ Н; $d = 0,02$ м; $Em = 2 \cdot 10^{11}$ Па. График $\lambda(a)$ изображен на рисунке 1, а деформационного критерия $J_1(a)$ – на рисунке 2.

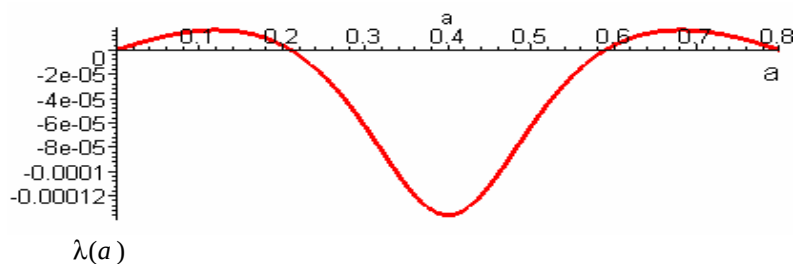


Рисунок 1 – График функции $\lambda(a)$

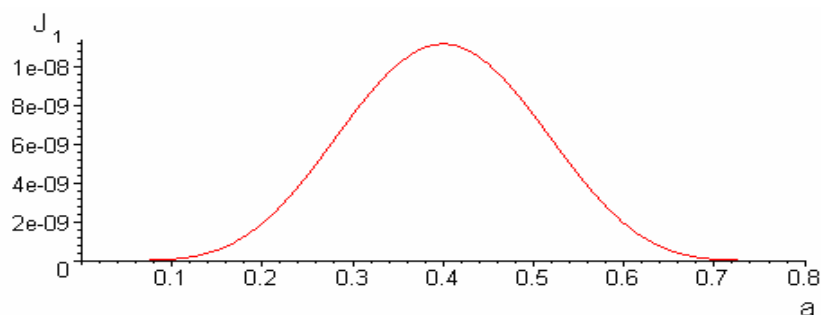


Рисунок 2 – График критерия $J_1(a)$

Если аналитическую функцию $\lambda(a)$ заменить полиномом $\lambda(a) = b_2 a^2 + b_3 a^3 + b_4 a^4 + b_5 a^5$, где $b_2, b_3, b_4, b_5 - const$, то в этом случае уравнение Эйлера $\frac{d^2 \lambda}{d a^2} = s$, где $s = 2b_2 + 6b_3 a + 12b_4 a^2 + 20b_5 a^3$

и функционал примет вид

$$J = \int_0^L \left(\left(\frac{d\lambda}{da} \right)^2 + s\lambda \right) da = \text{extr} . \quad (9)$$

Размерности деформационного критерия (8) и функционала (9), которому соответствует функция $\lambda(a)$, совпадают. Деформационный критерий (8) является функцией координаты a с максимумом при $a = L/2$; это соответствует минимуму λ . По функционалу (9) есть можно судить о роли ограничений в задачах на условный экстремум.

Функционал для $\lambda(a)$ по существу отражает энергетические затраты на реализацию управлений с учетом ограничения. Без учета ограничения при управлениях $M_1(a)$ и $M_2(a)$ вид функции $W(a)$ такой же, как и множителя Лагранжа, а математические образы функционалов для $W(a)$ и $\lambda(a)$ близки.

При решении задач восстановления функционалов возникают варианты, когда одному уравнению Эйлера соответствует не один функционал, но на определенном временном интервале численные значения функционалов одинаковы.

Утверждение. Для функционалов $\int_{t_1}^{t_2} F_1(\dot{x}, x) dt$ и $\int_{t_1}^{t_2} F_2(\dot{x}, x) dt$ с одинаковыми уравнениями Эйлера, найденными как $\frac{d}{dx}(F_1(\dot{x}, x)) - \frac{d}{dt} \frac{dF_1(\dot{x}, x)}{d\dot{x}} = 0$ и $\frac{d}{dx}(F_2(\dot{x}, x)) - \frac{d}{dt} \frac{dF_2(\dot{x}, x)}{d\dot{x}} = 0$, существуют такие значения пределов интегрирования t_1 и t_2 , при которых

$$\int_{t_1}^{t_2} F_1(\dot{x}, x) dt = \int_{t_1}^{t_2} F_2(\dot{x}, x) dt . \quad (10)$$

На примерах легко убедиться, что такие пределы интегрирования для определенных интегралов с разными подынтегральными функциями существуют. Это утверждение распространяется и на задачи интегрального исчисления.

Если t_1 и t_2 – корни (действительные числа) уравнения $F(t) = F_1(t) - F_2(t) = 0$, где $F_1(t)$ и $F_2(t)$ – первообразные непрерывных дифференцируемых функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то выполняется равенство $\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) dt$.

Выводы

1. Если реальный наблюдаемый процесс представим в виде аналитической функции и находится дифференциальное уравнение, решением которого является эта функция, то, восстановив по соответствующим правилам функционал, можно судить об этом функционале как критерии качества наблюдаемого процесса.

2. Процедура восстановления функционалов по заданным функциям может найти применение во многих областях при моделировании динамических процессов, в том числе, например, – в экономике, при сопоставлении функционалов-критериев, построенных по наблюдаемым реальным процессам.

Дальнейшие исследования связаны с анализом существования и единственности решения обратных задач вариационного исчисления с учетом утверждения (10) и решением ряда актуальных прикладных задач техники [5].

Библиографический список

1. Математический энциклопедический словарь. — М.: Сов. энциклопедия, 1988. — 647 с.
2. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев. — М.: Высш. шк., 2002. — 544 с.
3. Летов А.М. Динамика полета и управление / А.М. Летов. — М.: Наука, 1969. — 360 с.
4. Бохонский А.И. Управление деформированием нежестких деталей при токарной обработке: монография / А.И. Бохонский, А.Н. Вохмянин. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 1999. — 240с.
5. Бохонский А.И. Функция и ее функционал / А.И. Бохонский // Динамика, надежность и долговечность механических и биомеханических систем и элементов их конструкций: матер. междунар. науч.-техн. конф., Севастополь, 8-11 сент. 2009 г. — Севастополь, 2009. — С. 49–52.

Поступила в редакцию 18.09.2009 г.