

УДК 621.002:681.324

В.В. Голикова, аспирант,**Е.Л. Первухина, профессор, д-р техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***МЕТОД АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Предлагается метод анализа чувствительности при оценивании состояния дискретных динамических систем со стохастическим входом в виде белого шума, основанный на разложении следа ковариационной матрицы ошибок оценивания в ряд Тейлора.

Для динамических систем одним из наиболее распространенных алгоритмов оценивания является фильтр Калмана [1]. Однако при его использовании результаты в существенной степени зависят как от текущих наблюдений за системой, так и от априорной информации о вероятностных характеристиках параметров. К сожалению, практика прикладных исследований показывает, что известные модификации фильтра либо не работают в отсутствие всех необходимых сведений о системе, либо слишком чувствительны к отклонениям от исходных предположений: даже небольшие отклонения приводят к большим ошибкам в конечных выводах. Поэтому проблема количественного определения степени чувствительности алгоритмов оценивания к изменению параметров системы или их вероятностных характеристик по-прежнему актуальна.

Целью исследования является разработка метода количественного определения степени чувствительности дискретных динамических систем со стохастическим входом в виде белого шума к отклонениям параметров от фиксированных значений, заключающегося в разложении следа ковариационной матрицы ошибок оценивания в ряд Тейлора в окрестности точного значения меняющегося параметра.

Рассматривается линейная динамическая система, описываемая уравнениями состояния

$$x_t = A_t x_{t-1} + G_t \omega_t \quad (1)$$

и наблюдения

$$y_t = B_t x_t + H_t v_t \quad (2)$$

при $t=1, 2, \dots$, где x_t – вектор состояния системы (размерности $n \times 1$), вектор шума объекта ω_t (размерности $q \times 1$) представляет белый шум с $E[\omega_t] = 0$, $E[\omega_t \omega_k^T] = Q_t \delta_{tk}$ (δ_{tk} – символ Кронекера, т.е. $\delta_{tk} = 1$ при $t=k$ и $\delta_{tk} = 0$ при $t \neq k$), y_t – вектор наблюдения (размерности $m \times 1$), а вектор шума наблюдения v_t (размерности $p \times 1$) является белым шумом с $E[v_t] = 0$, $E[v_t v_k^T] = R_t \delta_{tk}$, A_t – переходная $n \times n$ -матрица, обратимая, G_t – $n \times q$ -матрица входов, B_t – $m \times n$ -матрица наблюдения, H_t – $m \times p$ -матрица. Предполагается, что $E[\omega_t v_k^T] = 0$.

Матрицы A , B в уравнениях (1), (2) и начальные значения вектора состояний называют параметрами системы. Часто их считают известными. В противном случае для их определения используют методы идентификации. Однако на практике эти методы не всегда приводят к точным значениям системных параметров, поэтому возникает задача оценки влияния возможных отклонений (ошибок моделирования, или идентификации) на результаты оценивания вектора состояния x_t . Различают случайные или детерминированные отклонения, предполагая, что они малы по сравнению с точными значениями параметров. В качестве меры значимости отклонения $n \times n$ -матрицы D с элементами d_{ij} используют матричную норму, например, евклидову

$$\|D\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |d_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Рассмотрим влияние отклонений (ошибок моделирования) в значении элементов матрицы A , предполагая значения остальных системных параметров точными. Влияние отклонения, например, ковариационных матриц шума системы и шума наблюдения на результаты оценивания рассмотрено в работе [2].

Итак, если отклонение параметра A_t носит случайный характер, то его свойства описывают средним и корреляционной матрицей. Под анализом ошибок в этом случае понимают определение отношения между корреляционной матрицей матрицы A_t и корреляционной матрицей вектора состояния x_t [3]. В рассматриваемом случае предположим, что существует детерминированное отклонение

матрицы A_t от точного значения матрицы $\hat{A}_t - \delta A_t$, которое ведет к отклонению вектора состояния x_t от решения уравнения (1), поэтому проведем анализ чувствительности системы.

Для количественного оценивания степени чувствительности дискретного оптимального алгоритма оценки состояния x_t (фильтра Калмана) к вариации δA переходной матрицы A_t используем $\text{tr}[P_t]$ – след апостериорной ковариационной матрицы ошибок оценивания, которая рассчитывается по формуле:

$$P_t = [I - K_t B_t] P_{t|t-1} [I - K_t B_t]^T + K_t H_t R_t H_t^T K_t^T, \quad (4)$$

где K_t – матрица оптимальных (по Калману) коэффициентов усиления, T – символ транспонирования. В предположении независимости ошибок оценивания ковариационная матрица P_t будет диагональной и норму (3) матрицы P_t можно заменить ее следом. В выражении (4) $P_{t|t-1}$ обозначает априорную ковариационную матрицу ошибок оценивания:

$$P_{t|t-1} = A_{t-1} P_{t-1} A_{t-1}^T + G_{t-1} Q_{t-1} G_{t-1}^T. \quad (5)$$

Индекс $t/t-1$ в выражении (5) означает, что оценивание вектора x_t проводят по результатам наблюдений до момента времени $t-1$.

Для решения поставленной задачи используем подход Гавронского [3], согласно которому степень изменения функционала при изменении матричного аргумента определяется разложением функционала в ряд Тейлора. Рассмотрим матрицу P_t как функцию от матричного аргумента A_t , а след $\text{tr}[P_t(A_t)]$ – как функционал от матричного аргумента A_t . Точная матрица $\hat{A}_t$ определяется соотношением: $\hat{A}_t = A_t - \delta A_t$. В дальнейшем условно опустим индексы у матриц. Разложим функционал $\text{tr}[P(A + \delta A)]$ около истинного значения матрицы A :

$$\begin{aligned} \text{tr}[P(\hat{A} + \delta A)] &= \text{tr}[P(\hat{A} \downarrow + \delta A \downarrow)] = \\ &= \text{tr}[P(A \downarrow)] + \left\{ \frac{\partial \text{tr}[P(A \downarrow)]}{\partial A \downarrow} \right\}^T \cdot (\delta A \downarrow \otimes 1) + O_2(\hat{A} \downarrow, \delta A \downarrow). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь δA – вариация ошибки в оценивании матрицы A ; $A \downarrow$, $\delta A \downarrow$ – матрицы-столбцы, полученные по способу записи "строка за строкой". Такой способ формирования производных матричных функций по матричному аргументу облегчает процедуру дифференцирования сложных матричных функций [2, 4].

С учетом формул матричного дифференцирования соотношение (4) относительно матрицы A можно переписать следующим образом:

$$\text{tr}[P(A + \delta A)] = \text{tr}[P(A \downarrow)] + 2(I - KB)^T (I - KB) A P \downarrow \cdot (\delta A \downarrow \otimes 1) + O_2(A \downarrow, \delta A \downarrow). \quad (7)$$

Вычисление членов разложения второго и более высоких порядков в (6) не производится, так как они представляют бесконечно малые величины высокого порядка. Второй член соотношения (6) описывает изменение исследуемого функционала $\text{tr}[P(A)]$, связанного с отклонением матрицы A от точного значения $\hat{A}$.

Для проведения численного эксперимента рассмотрим скалярную систему, для которой наблюдения формируются в соответствии с равенством:

$$z_t = x_t + w_t, \quad (8)$$

где w_t – гауссовский "белый" шум с дисперсией $\sigma^2 = 1$. Стационарный процесс x_t является процессом авторегрессии первого порядка:

$$x_{t+1} = ax_t + bv_{t+1}, \quad (9)$$

где $a = e^{-1}$, $b = \sqrt{15(1-e^{-2})}$, v_t гауссовский "белый" шум с дисперсией $\sigma_1 = 1$, независимый от w_t .

Функция ковариации процесса принята в виде: $R(m) = 15e^{-|m|}$; $E[x_t^2] = 15$, $E[y_t^2] = 16$.

Для системы (8), (9) выражение (6) примет вид:

$$p(a + \delta a) = p(a) + (1-k)^2 a p_{t|t}, \quad (10)$$

в котором второе слагаемое $(1-k)^2 a p_{t|t}$ характеризует изменение дисперсии ошибки в зависимости от меняющегося значения коэффициента a в выражении (9).

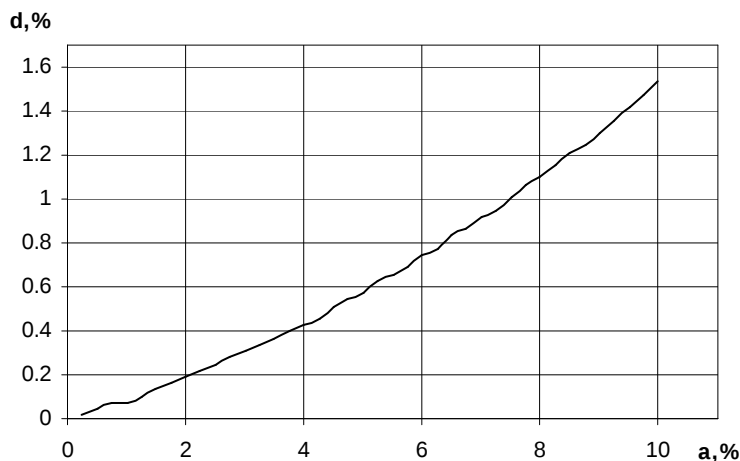


Рисунок 1 – Результаты эксперимента

Результаты численного эксперимента показаны на рисунке 1. По оси абсцисс отложены отклонения параметра a от его точного значения e^{-1} в процентах, по оси ординат – значение поправки к точному значению функционала ошибки, обозначенное как d , в процентах. Для данного примера при 5 % увеличении параметра a дисперсия ошибки оценивания состояния не превышает 0,5 %.

Рассмотренный метод количественного определения степени чувствительности дискретных динамических систем к отклонениям параметров от фиксированных значений прост для реализации на ЭВМ и позволяет оценить свойства ошибки оценивания состояния системы при ошибках в значении ее параметров. Дальнейшие направления исследований связаны с оценкой чувствительности реальных многомерных динамических систем.

Библиографический список

1. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана / А.В. Балакришнан. — М.: Мир, 1988. — 168 с.
2. Первухина Е.Л. Метод определения погрешности при оценке состояния динамических систем / Е.Л. Первухина // Вестник СевГТУ: сб. научн. тр. — Севастополь, 1996. — Вып. 2. — С. 131 – 135.
3. Gawronski W. Matrix functions: Taylor expansions, sensitivity and error analysis / W. Gawronski // Zastosowania Matematyki. 1977. — V. 16. — N 1. — P. 73 – 69.
4. Harville D.A. / D.A. Harville // Matrix Algebra from a Statistician's Perspective. — New York: Springer-Verlag, 1997. — 630 p.

Поступила в редакцию 06.06.2007 г.