

УДК 681.32

Л.Л. Беляева, старший преподаватель*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ****АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ И РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА**

Предложен метод для определения параметров линейных цифровых САУ. Приведено краткое описание метода и результаты исследования цифровых САУ на основе построения областей устойчивости и качества.

Актуальность. Одной из важных задач исследования цифровых САУ является изучение влияния изменения параметров на устойчивость и показатели качества системы. Как правило, изменение параметров обусловлено изменением условий эксплуатации САУ. Поэтому возникает необходимость в использовании методов, которые позволяют определить все значения параметров, при которых система будет сохранять устойчивость, а показатели качества будут не хуже заданных. Эффективным средством настройки систем в этом случае являются области заданных свойств САУ в пространстве изменяющихся параметров. Для построения областей устойчивости и качества цифровых САУ чаще всего используется метод перебора и метод Д-разбиения. Методы построения областей качества разработаны в основном для САУ с дробно-рациональными передаточными функциями, САУ с запаздываниями [1, 2].

Цель работы заключается в распространении метода построения областей устойчивости и качества (ОУК) для исследования линейных цифровых САУ.

Постановка задачи. Рассматриваются линейные цифровые системы автоматического управления, включающие:

– непрерывную часть, заданную математическими моделями отдельных звеньев в виде дробно-рациональных передаточных функций

$$W_i(s) = \frac{v_i(s)}{u_i(s)} = \frac{b_i(s)}{a_i(s)}, \quad (1)$$

где $b_i(s) = \sum_{l=0}^{m_i} b_{il}s^l$; $a_i(s) = \sum_{k=0}^{n_i} a_{ik}s^k$ ($i=1, \dots, g$); $u(s), v(s)$ – изображения непрерывных входных и выходных сигналов звеньев по Лапласу.

– цифровую часть, в которую входят:

цифровое вычислительное устройство с математической моделью в комплексной области

$$W_{ЦВУ}(e^{sT_0}) = \frac{\gamma(e^{sT_0})}{\alpha(e^{sT_0})} = \frac{b_{ЦВУ}(e^{sT_0})}{a_{ЦВУ}(e^{sT_0})}, \quad (2)$$

где $b_{ЦВУ}(e^{sT_0}) = \sum_{i=0}^p b_i e^{isT_0}$; $a_{ЦВУ}(e^{sT_0}) = \sum_{j=0}^q a_j e^{jsT_0}$; α, γ – входной и выходной сигналы ЦВУ;

аналого-цифровые преобразователи, математические модели которых в комплексной области

$$\alpha(e^{sT_0}) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \alpha(p) \frac{1}{1-e^{-T_0(p-s)}} dp,$$

где $\alpha(p)$ – изображение сигнала $\alpha(t)$, поступающего на вход АЦП;

цифро-аналоговые преобразователи, заданные математической моделью в комплексной области при амплитудно-импульсной модуляции с экстраполятором нулевого порядка

$$W_\phi(s) = \frac{\beta(s)}{\gamma(s)} = \frac{(1-e^{-sT_0})}{s}.$$

Коэффициенты многочленов числителя и знаменателя функций (1) и (2) зависят от вектора варьируемых параметров $\lambda \in \Lambda \subseteq R^r$. Ставится задача определения подмножества $\Lambda_z \subseteq \Lambda$, такого, чтобы система удовлетворяла заданным свойствам для любых λ из множества Λ_z . Изучаются изменения свойств системы в зависимости от изменения λ . Считается, что система характеризуется

показателями $\{K_i\}_{i=0}^g$. Показатель K_0 определяет устойчивость системы, а показатели K_i ($i=1, \dots, g$) определяют ее качество. Система удовлетворяет заданному качеству по показателю K_i , если $K_i \leq K_{i\text{зад}}$ или $K_i \geq K_{i\text{зад}}$. Знак $\leq$ или $\geq$ определяется показателем качества, например, для запасов устойчивости выбирается знак $\geq$. В качестве значений K_0 определим $\{0,1\}$, где 0 соответствует неустойчивой системе, а 1 соответствует устойчивой системе. Каждый из показателей качества K_i ($i=1, \dots, g$) в общем случае зависит от вектора λ .

Исследуются следующие показатели: устойчивость; запас устойчивости по амплитуде; запас устойчивости по фазе; интервальный запас устойчивости по амплитуде; секторный запас устойчивости по фазе; показатель колебательности.

Решается задача определения множеств

$$\Lambda_i = \{\lambda \mid \lambda \in \Lambda \vee K_i(\lambda) \leq K_{i\text{зад}} \text{ (} K_i(\lambda) \geq K_{i\text{зад}} \text{)}\} \quad (i=0, \dots, g). \quad (3)$$

Множество Λ_0 будем называть множеством устойчивости, а каждое из множеств Λ_i ($i=1, \dots, g$) – множеством заданного качества по показателю K_i ($i=0, \dots, g$). Множества значений (3), удовлетворяющих заданным условиям, образуют области на плоскости варьируемых параметров. Рассматриваются случаи одного и двух неопределенных параметров.

Суть метода. Построение уравнений границы области устойчивости (ГОУ) осуществляется на основе характеристического уравнения цифровой САУ: $a(z, \lambda) = 0$.

Общий вид характеристического квазимногочлена при зависимости его коэффициентов от варьируемого параметра следующий:

$$a(e^{sT_0}, \lambda) = \sum_{i=0}^n a_i(\lambda) e^{isT_0}. \quad (4)$$

Уравнения, определяющие границы областей Д-разбиения для многочлена (4)

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{a(e^{j\omega T_0}, \lambda)\} = 0, \\ \operatorname{Im}\{a(e^{j\omega T_0}, \lambda)\} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Все точки границ Д-разбиения являются вещественными решениями λ системы (5). Произведя замену $z = e^{j\omega T_0} = \cos \omega T_0 + j \sin \omega T_0$ в уравнении (4), получим

$$a(\omega, \lambda) = \sum_{i=0}^n a_i(\lambda) \cdot (\cos i\omega T_0 + j \sin i\omega T_0) = \sum_{k=0}^n a_k(\lambda) \cos k\omega T_0 + j \sum_{l=1}^n a_l(\lambda) \sin l\omega T_0 = 0.$$

Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k(\lambda) \cos k\omega T_0 = 0, \\ \sum_{l=1}^n a_l(\lambda) \sin l\omega T_0 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Далее рассматривается построение уравнений границ областей качества (ГОК) для следующих показателей качества: запаса устойчивости по амплитуде, запаса устойчивости по фазе, показателя колебательности.

Исходной математической моделью для построения уравнений границ указанных ОК является дискретная передаточная функция разомкнутой цифровой САУ

$$W(e^{sT_0}, \lambda) = \frac{b(e^{sT_0}, \lambda)}{a(e^{sT_0}, \lambda)}.$$

При определении границы области заданного запаса устойчивости по амплитуде необходимо учитывать условие пересечения годографом $W(e^{j\omega T_0}, \lambda)$ действительной отрицательной полуоси комплексной плоскости

$$W(e^{j\omega T_0}, \lambda) = 1/a.$$

Система уравнений границы области заданного запаса устойчивости по амплитуде в пространстве одного параметра записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{W(e^{j\omega T_0}, \lambda)\} = 1/a; \\ \operatorname{Im}\{W(e^{j\omega T_0}, \lambda)\} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

При определении границы области заданного запаса устойчивости по фазе необходимо учитывать условие пересечения годографом $W(e^{j\omega T_0}, \lambda)$ окружности единичного радиуса на комплексной плоскости, т.е.

$$W(e^{j\omega T_0}, \lambda) = \omega_{cp},$$

где $\omega_{cp} = e^{-j\varphi_{don}}$.

Система уравнений границы области заданного запаса устойчивости по фазе в пространстве одного параметра представляется следующим образом:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{W(e^{j\omega T_0}, \lambda)\} = \cos \varphi_{don}; \\ \operatorname{Im}\{W(e^{j\omega T_0}, \lambda)\} = -\sin \varphi_{don}. \end{cases} \quad (8)$$

На комплексной плоскости $(\operatorname{Re}\{W(e^{j\omega T_0})\}, \operatorname{Im}\{W(e^{j\omega T_0})\})$ годографа $W(e^{j\omega T_0})$ предписанный показатель M_{Π} изображается в виде окружности. Графическое представление можно заменить выражением вида:

$$(\operatorname{Re}\{W(e^{j\omega T_0})\} + C)^2 + \operatorname{Im}\{W(e^{j\omega T_0})\}^2 = r^2,$$

где $C = M_{\Pi}^2 / (M_{\Pi}^2 - 1)$, $r = M_{\Pi} / (M_{\Pi}^2 - 1)$.

Годограф $W(e^{j\omega T_0})$ в местах пересечения с окружностью соответствующего показателя M имеет ординату амплитудной характеристики $|\Phi| = M_l$. Для того, чтобы показатель колебательности замкнутой системы был равен заданному M_{Π} , необходимо, чтобы годограф $W(e^{j\omega T_0})$ касался соответствующей окружности. На этом принципе основывается способ определения области в пространстве неопределенных параметров, внутри которой показатель колебательности не хуже заданного.

Условие пересечения годографа $W(e^{j\omega T_0}, \lambda)$ с окружностью M_{Π} запишется в виде

$$\lambda \operatorname{Re}\{W(e^{j\omega T_0})\} = U_{\Pi},$$

$$\lambda \operatorname{Im}\{W(e^{j\omega T_0})\} = V_{\Pi},$$

$$(U_{\Pi} + C)^2 + V_{\Pi}^2 = r^2,$$

где U_{Π} , V_{Π} – координаты точки пересечения.

Условие касания годографа $W(e^{j\omega T_0}, \lambda)$ и окружности показателя M_{Π} записывается как $F_m(U, V) = -\frac{U_{\Pi} + C}{V_{\Pi}}$.

Тогда система уравнений границы заданного показателя колебательности запишется в виде

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Re}\{W(e^{j\omega T_0}, \lambda)\} + C)^2 + (\operatorname{Im}\{W(e^{j\omega T_0}, \lambda)\})^2 = r^2; \\ & \frac{\operatorname{Re}\{W(e^{j\omega T_0}, \lambda)\} + C}{\operatorname{Im}\{W(e^{j\omega T_0}, \lambda)\}} = -\frac{d \operatorname{Re}\{W(e^{j\omega T_0}, \lambda)\}}{d \operatorname{Im}\{W(e^{j\omega T_0}, \lambda)\}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вещественные решения λ уравнений (6) – (9) определяют границы ОУК.

В работе [4] показано, что стандартные функции современных математических программных пакетов (MathCad, Matlab, Maple) не могут быть применимы для решения систем трансцендентных уравнений ГОУК. Для их решения требуется применение средств программирования. Для приближенного решения уравнений ГОУК можно использовать численные итерационные методы. При линейном вхождении неопределенных параметров можно использовать итерационный метод Гаусса-Зейделя. При нелинейном вхождении параметров применимы итерационные методы Мюллера, Ньютона-Рафсона. Недостатком итерационных методов является необходимость в задании начальных приближений. Неточность выбора начальных приближений может привести к потере отдельных решений, что является недопустимым при определении границ областей устойчивости и заданного качества.

Предлагается метод определения вещественных решений системы трансцендентных уравнений, представленных в виде [2]:

$$\begin{cases} \varphi(\lambda, \omega) = 0, \\ \psi(\lambda, \omega) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

1. Требуется найти решения системы (10) с непрерывными функциями $\varphi(\lambda, \omega)$, $\psi(\lambda, \omega)$ в прямоугольнике $P: \lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$, $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$. 2. Каждая из функций $\varphi(\lambda, \omega)$ и $\psi(\lambda, \omega)$

представлена в виде суммы слагаемых $\varphi(\lambda, \omega) = \sum_{i=1}^{n_\varphi} \chi_i(\lambda, \omega)$; $\psi(\lambda, \omega) = \sum_{i=n_\varphi+1}^{n_\varphi+n_\psi} \chi_i(\lambda, \omega)$. 3. Прямоугольник

P разбит на прямоугольники P_k , такие, что на каждом из отрезков $\lambda_{\min,k} \leq \lambda \leq \lambda_{\max,k}$; $\omega = c = \text{const}$; $\omega_{\min,k} \leq c \leq \omega_{\max,k}$ каждое слагаемое $\chi_i(\lambda, c)$ является неубывающей или невозрастающей функцией λ , а на каждом из отрезков $\omega_{\min,k} \leq \omega \leq \omega_{\max,k}$; $\lambda = c = \text{const}$; $\lambda_{\min,k} \leq c \leq \lambda_{\max,k}$ каждое слагаемое $\chi_i(c, \omega)$ является неубывающей или невозрастающей функцией ω .

Если выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{i=1}^{n_\varphi} \chi_{i\min} > 0, \sum_{i=n_\varphi+1}^{n_\varphi+n_\psi} \chi_{i\min} > 0, \sum_{i=1}^{n_\varphi} \chi_{i\max} < 0, \sum_{i=n_\varphi+1}^{n_\varphi+n_\psi} \chi_{i\max} < 0, \quad (11)$$

то в прямоугольнике P_k не существует решения системы (10).

Если в прямоугольнике P_k система (10) не имеет решения, то за конечное число делений прямоугольник P_k будет разбит на прямоугольники, в каждом из которых выполняется хотя бы одно из условий (11).

Если в прямоугольнике P_k существует решение системы (10), то для него не может выполняться ни одно из условий неравенств (11), поскольку выполнение каждого из них есть достаточное условие отсутствия решения. В этом случае производится деление прямоугольника P_k на два прямоугольника P_{k1} и P_{k2} . Хотя бы в одном из прямоугольников P_{k1} или P_{k2} существует решение системы (10). Для этого прямоугольника снова не выполняется ни одно из неравенств (11) и процесс деления повторяется. В результате получаются последовательности прямоугольников, каждая из которых содержит решение системы (10). Эти последовательности стягиваются в точки, являющиеся решениями системы (10). Других решений в прямоугольнике P система (10) не имеет.

Ниже приведена иллюстрация (рисунок 1) определения ГОУ для системы трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} (e^{\alpha T_0} \cos \omega T_0 - 1) + (-k1 \cdot e^{\alpha T_0} + k1) = 0; \\ e^{\alpha T_0} \sin \omega T_0 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Граница области устойчивости должна быть построена в пространстве двух неопределенных параметров $k1$ (линейная зависимость), α (нелинейная зависимость) в пространстве $(\alpha = f(k1))$. Решение системы уравнений выполнено итерационным методом Ньютона-Рафсона и предложенным методом. Алгоритмы вычислительных методов реализованы в среде программирования Delphi6.

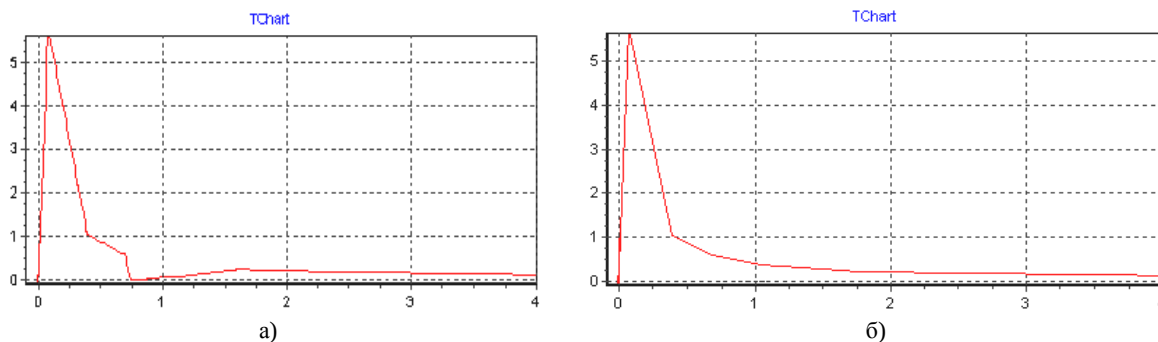


Рисунок 1 – ГОУ, определенные для системы (12):
а – ГОУ, определенная методом Ньютона-Рафсона;
б – ГОУ, определенная предложенным методом

Ошибка вычислений, заданная при решении уравнений (12) методом Ньютона-Рафсона и предложенным методом, составляла $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}$, время вычисления $T_{\text{выч}} = 1$ с. В ходе решения методом Ньютона-Рафсона при каждом новом значении ω требовалось определять начальные приближения, которые влияют на точность результата, т.е. на точность определения границы области устойчивости.

Исследование цифровых САУ. Для реализации метода ОУК разработано программное обеспечение в среде программирования Delphi6. С его помощью проведены исследования цифровых САУ, структуры которых имеют широкое распространение в промышленности.

На рисунке 2 изображена структурная схема астатической электромеханической системы автоматического регулирования (САР) скорости двигателя постоянного тока (ДПТ) [4]. Передаточные функции элементов системы приведены в таблице 1.

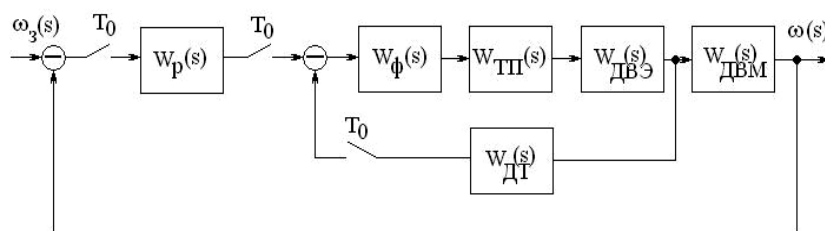


Рисунок 2 – Структурная схема цифровой САР скорости ДПТ

Таблица 1 – Передаточные функции элементов системы (рисунок 2)

Функциональный блок	Общий вид передаточной функции	Передаточная функция с параметрами
Цифровой ПИ-регулятор, $W_p(z)$	$\frac{a_1 - b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$	
Фиксатор нулевого порядка, $W_\Phi(s)$	$\frac{1 - e^{-sT_0}}{s}$	
Тиристорный преобр., $W_{ТП}(s)$	$k_{ТП}$	6,67
Электромагн. сост. ДПТ, $W_{ДВЭ}(s)$	$\frac{k_1}{T_1 s + 1}$	$\frac{10}{0,1s + 1}$
Электромех. сост. ДПТ, $W_{ДВМ}(s)$	$\frac{k_2}{T_2 s + 1}$	$\frac{1}{3s + 1}$
Датчик тока, $W_{ДТ}(s)$	k_{OC}	0,03

Ниже показаны ГОУ (рисунок 3,а) и ГОК (рисунок 3,б). ГОК построены для следующих показателей качества: запаса устойчивости по амплитуде, запаса устойчивости по фазе. При построении ГОК заданы значения $\Delta L = 20$ дБ, $\Delta \varphi = 45$ град. Границы построены в пространстве параметров настройки цифрового ПИ-регулятора скорости ($K_P = f(K_I)$).

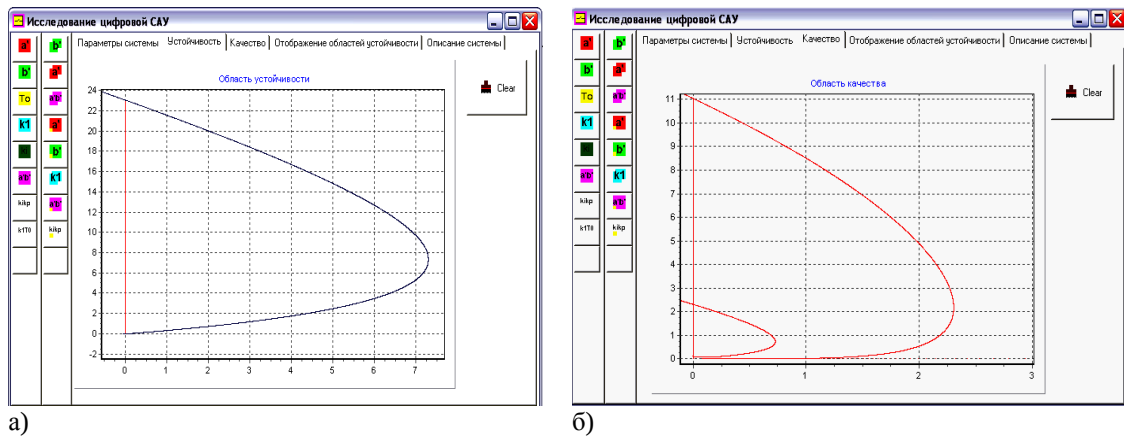


Рисунок 3 – ГОУК цифровой САУ скорости ДПТ в пространстве параметров $K_P = f(K_I)$

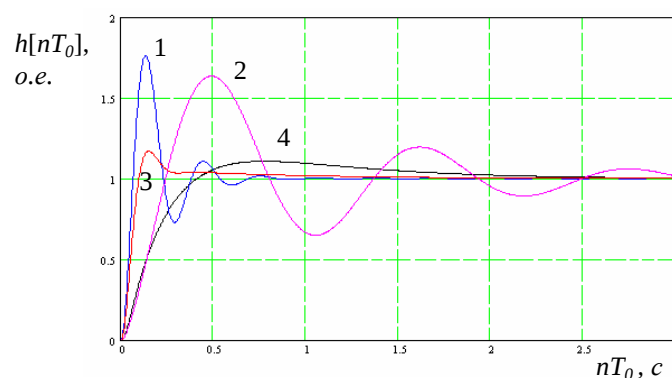


Рисунок 4 – Переходные процессы в цифровой САУ скорости ДПТ

На рисунке 4 изображены графики переходных процессов системы с параметрами настройки ПИ-регулятора согласно построенным областям. График 1 представляет переходный процесс при значениях $K_I=3$, $K_P=2$ (внутри области устойчивости и вне областей запасов устойчивости); график 2 – при значениях $K_I=1$, $K_P=1$ (внутри области запаса устойчивости по фазе и вне области запаса устойчивости по амплитуде); график 3 – при значениях $K_I=0,1$, $K_P=1$ (внутри областей запаса устойчивости по фазе и запаса устойчивости по амплитуде); график 4 – при значениях $K_I=0,03$, $K_P=0,6$.

Следующая система, для которой проведено исследование методом ОУК – цифровая электропневматическая САУ давления [5]. Ее функциональная схема показана на рисунке 5, а передаточные функции элементов приведены в таблице 2.

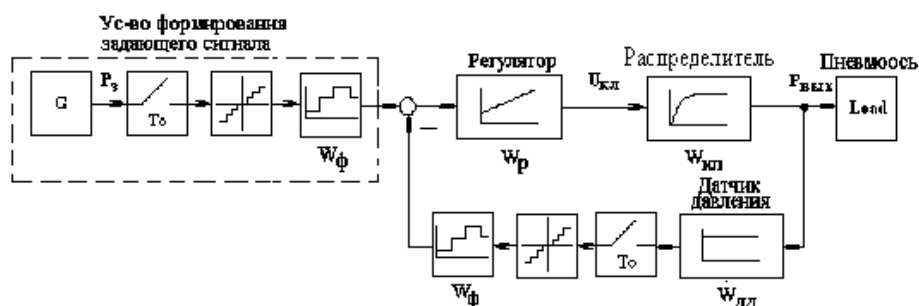


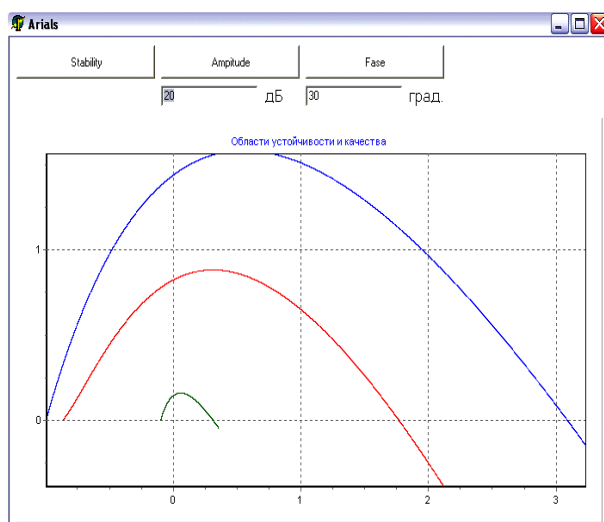
Рисунок 5 – Функциональная схема электропневматической САУ давления

Таблица 2 – Передаточные функции элементов системы (рисунок 5)

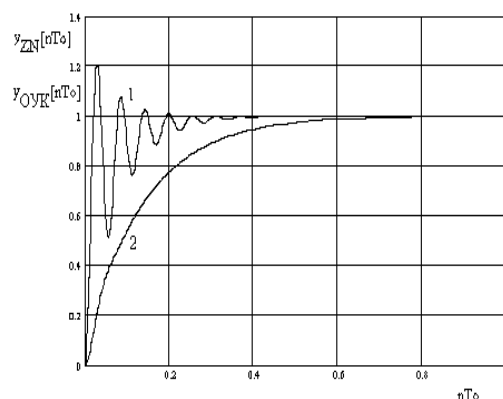
Наименование	Передаточная функция	Параметры
Пропорциональный пневматический распределитель	$W_{KL}(s) = \frac{U_{KL}(s)}{P_{KL}(s)} =$ $= \frac{K_{KL}}{T_{KL}^2 s^2 + 2\xi_{KL} T_{KL} s + 1}$	$K_{KL} = 1$ - коэффициент передачи распредел.; $T_{KL} = 0,012$ - постоянная времени распредел., с; $\xi_{KL} = 0,612$ - коэффициент демпфирования распредел.
Датчик давления	$W_{ДД}(s) = 1$	
Цифровой ПИ-регулятор	$W_{P-PI}(z) = \frac{U_{P-PI}(z)}{U_s(z) - U_{ДД}(z)} =$ $= \frac{a_1 - b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$	$a_1 = K_P + K_I$; $b_1 = K_P$

Для данной системы построены ГОУК (рисунок 6,а) в пространстве параметров настройки цифрового ПИ-регулятора $K_I = f(K_P)$. Переходные процессы (рисунок 6, б) построены при следующих значениях параметров: график 1 – переходный процесс в системе при $K_P=1,8$, $K_I=0,5$, взятыми из области устойчивости, но за пределами областей качества; график 2 – переходный процесс в системе при $K_P=0,1$, $K_I=0,1$, взятыми из внутренней области – пересечения областей устойчивости, запасов устойчивости по фазе и по амплитуде. Экспериментальные исследования, проведенные по методике, основанной на применении метода ОУК, подтвердили корректность полученных областей [5].

Выводы. На основе обобщения метода Д-разбиения получены уравнения границ областей устойчивости и качества в пространстве параметров цифровых САУ. Предложено применение численного метода для решения трансцендентных уравнений ГОУК цифровых САУ. На основе предложенного метода разработано программное обеспечение для ПК, с помощью которого проведены исследования цифровых САУ. В ходе исследования показано, что параметры систем, определенные по ОУК, соответствуют предъявленным требованиям к качеству. Перспективой дальнейших исследований является применение данного метода для класса многомерных линейных цифровых САУ.



а)



б)

Рисунок 6 – ГОУК и переходные процессы для цифровой САУ давления

Библиографический список

1. Пряшников Ф.Д. Численные методы построения областей устойчивости и качества / Ф.Д. Пряшников // Автоматика-2004: матер. 11-ї міжнар. конф., Київ, 27 – 30 вересня 2004. — Київ, 2004. — Т. 1. — С. 80 – 82.
2. Математические методы и информационные технологии исследования параметрических свойств систем автоматического управления (шифр «Параметр»): Отчет о НИР (заключ.). Руководитель Ф.Д. Пряшников. — ОЦО2604И5В; №ГР0100U001577; Инв №0203V002369. — Севастополь, 2002. — 175 с.: ил. — Библиогр.: С.168 – 175.
3. Беляева Л.Л. Определение параметров цифровых САУ на основе построения областей устойчивости и качества / Л.Л. Беляева // Матер. XIV Міжнар. конф. з автоматичного управління (Автоматика-2007), м. Севастополь, 10 – 14 вересня 2007 р. — Ч.1 — Севастополь: СКУАСиП, 2007. — С. 114 – 115.
4. Беляева Л.Л. Исследование цифровой системы автоматического управления на ЭВМ на основе построения областей устойчивости и качества/ Л.Л. Беляева // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. — Севастополь, 2006. — Вып. 9. — С. 226 – 235.
5. Краснодубец Л.А. Выбор параметров ПИД-регуляторов фирмы FESTO на основе построения областей устойчивости и качества /Л.А. Краснодубец, Л.Л. Беляева, Г.В. Нотченко // Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. — Севастополь, 2007. — Вып. 83. — С. 44 – 49.

Поступила в редакцию 06.03.2007 г.