

УДК 681.511.46

О.Г. Подольская*Севастопольский национальный технический университет**Ул. Университетская 33, г. Севастополь, 99053, Украина**E-mail: pu545@sevcom.net***ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ИНВЕСТИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА
МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ**

Рассмотрено применение метода конечного состояния для определения оптимальной зависимости инвестиций от времени в одной неоклассической экономической задаче с нелинейной моделью. Приведен алгоритм метода и результаты его применения.

В настоящее время большое внимание специалистов уделяется разработке и исследованию динамических моделей производственных процессов на макро- и микроуровнях. Характерной особенностью большинства математических моделей указанных процессов является их нелинейность. Иногда они линеаризуемы и в этом случае для разработки управления могут быть использованы известные методы, предоставляемые современной теорией управления. Однако имеют место случаи, когда линеаризованные модели очень далеки от своих нелинейных прототипов. Одна из таких моделей исследована в работе [1], где показано, что в неоклассической задаче об инвестициях имеют место такие процессы, которые не могут быть воспроизведены линеаризованными моделями. Указанная задача может быть отнесена как к макроуровню, так и к микроуровню и имеет следующую постановку.

Рассматривается система

$$\frac{dK}{dt} = S - b \left(\frac{S^2}{K} \right), \quad (1)$$

$$t \in [t_0, t_f],$$

где K – накопленный к текущему моменту t объем капитала; b – некоторый внешний параметр, характеризующий эффективность инвестиций в конкретной области экономики или на предприятии; S – объем инвестиций.

Для решения задачи максимизации прибыли в [1] приведен критерий

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \exp(-rt) (F(K(t), L(t)) - V(t)L(t) - S(t)) dt \rightarrow \max, \quad (2)$$

где r – процентная ставка; V – средняя заработная плата одного работника; L – количество работников; $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ – доход от экономической деятельности, зависящий от имеющегося капитала K , количества работников L и параметров A и α .

Параметр A отражает вес дохода в сравнении с другими составляющими прибыли – затрат на оплату труда в виде произведения заработной платы V на число работников L и затрат на инвестиции S . Например, в украинской экономике вес заработной платы около 10 %, в экономике развитых стран Запада – около 40...60 %. Отсюда для заданной численности работников и средней заработной платы можно высчитать приблизительное значение коэффициента A для конкретной ситуации. В [1]

коэффициент A определяется из соотношения $K^* = \left(\frac{1}{A\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Приведена таблица значений K^* для

различных значений α и r . В частности, для $\alpha = 0,3$ и $r = 0,05$ $K^* \approx 13$. При этом получается $A \approx 20$.

Параметр α характеризует степень влияния величины вложенного капитала и количества работников на величину дохода. Есть капиталоемкие отрасли, где на доход больше влияют капитальные вложения, чем количество работников. С другой стороны, есть отрасли, где доход формируется в большей степени за счет ручного труда. Чем больше α , тем более автоматизированная (наукоемкая, фондоемкая, капиталоемкая) сфера деятельности рассматривается. В работе [1] исследуется модель для трех характерных значениях параметра α : 0,1 для низкой фондовооруженности; 0,3 для средней и 0,5 для высокой степени фондовооруженности.

Экспоненциальный множитель в (2) отражает долговременное отрицательное влияние высоких процентных ставок по банковским кредитам на инвестиционную активность и рост экономики.

В [1] поставлена задача максимизации J при управляемых параметрах S и V и постоянном значении L . Ввиду отсутствия в критерии (2) каких-либо параметров, отражающих положительное влияние стоимости рабочей силы на величину дохода, ясно, что результат решения в части величины V очевиден – минимальная (и даже нулевая) заработная плата.

Ввиду сказанного сформулируем задачу максимизации критерия (2) при дифференциальных ограничениях (1), известных зависимостях заработной платы и количества рабочей силы от времени и одном управляемом параметре – величине инвестиций S при естественном параметрическом ограничении $S \geq 0$.

Целью работы является демонстрация возможности применения метода конечного состояния [2] для решения нелинейных задач управления экономикой. Данный метод относится к группе методов решения обратной задачи динамики и основан на использовании так называемых переменных конечного состояния. Указанные переменные являются функциями двух времен (конечного t_f , текущего t) и пространственного аргумента (текущего состояния $x(t)$) и имеют смысл прогноза конечного состояния неуправляемой системы, возбужденной в момент t начальным условием $x(t)$. Метод разработан для задач управления с моделями в виде нормальных систем дифференциальных (обыкновенных, с переменными запаздываниями, в частных производных), конечно-разностных (одноиндексных и многоиндексных) и смешанных уравнений.

Для применения метода приведем задачу (1), (2) к терминальной задаче. Для этого прежде всего заменим верхний предел интегрирования в (2) на t и продифференцируем (2) по t . В результате получим дифференциальное уравнение для величины прибыли как функции времени. Поскольку для метода конечного состояния необходима модель с линейно входящим управлением, а переменная инвестиций S входит в (1) нелинейно, будем считать S переменной состояния, дифференциальное уравнение для которой имеет в правой части неизвестную и подлежащую определению новую управляющую функцию $u(t)$. Это преобразование, естественно, ограничивает зависимости инвестиций от времени классом непрерывных дифференцируемых функций, однако для применения указанного метода такое преобразование модели необходимо. Для удобства последующих выкладок переименуем переменные в следующем соответствии: $x_1(t)$ – прирост прибыли как функция времени; $x_2(t) \sim K(t)$; $x_3(t) \sim S(t)$. В итоге получаем задачу оптимального управления в форме Майера:

$$\begin{aligned} J &= x_1(t_f) \rightarrow \max, \\ \frac{dx_1(t)}{dt} &= \exp(-rt)(F(x_2, L(t)) - V(t)L(t) - x_3(t)), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3 - b\left(\frac{x_3^2}{x_2}\right), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= u(t), \\ t &\in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $L(t)$, $V(t)$ – известные функции времени, т.е. изменения во времени численности работников и средней заработной платы; x^0 – известный вектор начальных условий.

Терминальное управление методом конечного состояния для терминальной задачи

$$\begin{aligned} J &= J(x(t_f)) \rightarrow J^*, \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \Phi(t, x) + B(t)u(t), \\ t &\in [t_0, t_f], \quad x(t_0) = x^0 \end{aligned} \quad (4)$$

рассчитывается по следующему алгоритму

$$\begin{aligned}
u(t) &= G^+ f_J, \quad G^+ = \frac{G^T}{GG^T}, \quad G = \left(\frac{\partial J}{\partial x} \Big|_{x=y(t_f, t, x(t))} \right) W(t_f, t, x(t)) B(t), \\
f_J &= \frac{J^* - J(y(t_f, t, x(t)))}{T_u}, \\
\frac{dy(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} &= \Phi(\vartheta, y), \quad \frac{dW(\vartheta, t, x(t))}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial \Phi(\vartheta, x)}{\partial x} \Big|_{x=y(\vartheta, t, x(t))} \right) W, \\
\vartheta &\in [t, t_f], \quad y(t, t, x(t)) = x(t), \quad W(t, t, x(t)) = I,
\end{aligned} \tag{5}$$

где символами T, I обозначены операция транспонирования матриц и единичная матрица соответственно; J – целевая функция критерия. Зависящие от двух временных ϑ, t и пространственного аргумента $x(t)$ функции называются переменными конечного состояния (вектор y) и нелинейной переходной матрицей (матрица W), а параметр $T_u \ll t_f$ является регулировочным. Он позволяет управлять скоростью приближения так называемой критериальной функции времени t $J(y(t_f, t, x(t)))$ к заданному значению критерия J^* , а также в определенной степени регулировать амплитуды управляющих воздействий. Из (5) видно, что конечное (при $t = t_f$) значение критериальной функции и значение целевой функции равны, т.е.

$$J(y(t_f, t_f, x(t_f))) = J(x(t_f)), \tag{6}$$

поэтому достижение критериальной функцией к моменту $t = t_f$ заданного значения J^* эквивалентно решению задачи (4).

Сравнивая задачи (3) и (4), видим, что (3) удовлетворяет всем требованиям задачи (4) за исключением того, что (3) – задача достижения максимального значения критерия, а (4) – задача приведения критерия к заданному значению. Отказ от требования оптимальности позволяет рассчитать управление более простыми способами, в частности, методом конечного состояния. Для максимизации же критерия задачу (4) можно решать многократно, постепенно увеличивая значение J^* до тех пор, пока оно не выйдет на границу области достижимости. В методе конечного состояния указанная область обнаруживается по отклонению фактического и теоретического поведения критериальной функции. При заданном в (5) выражении для функции f_J теоретическое значения критериальной функции вычисляются по выражению $\bar{J}(t) = (\bar{J}(t_0) - J^*) \exp(-(t - t_0)/T_u) + J^*$, а фактические значения в каждый из моментов t в соответствии с (5) рассчитываются интегрированиями однородной системы на интервале $[t, t_f]$ с начальными условиями $y(t, t, x(t)) = x(t)$ и подстановками полученных конечных значений $y(t_f, t, x(t))$ в выражение для целевой функции критерия J . Как правило, указанные выше отклонения вначале небольшие, а при дальнейшем удалении от области достижимости возрастают. При этом часто возникают траектории типа скользящего режима вдоль кривых, являющихся функциональными отображениями множеств достижимости. Иногда процессы нарушения достижимости «жесткие», когда при малейшем нарушении соответствующих условий происходит срыв процесса управления.

Производился расчет МКС-управления (управления методом конечного состояния) по алгоритму (5) при следующих значениях параметров и начальных условий системы (4) и алгоритма (5): $\alpha = 0,3$; $b = 5$; $A = 20$; $r = 0,05$; $t_0 = 0$; $t_f = 120$; $L = 100$; $V = 3$; $x_1(0) = 0$; $x_2(0) = 13$; $x_3(0) = 0$; $T_u = 5$. Все параметры системы, кроме числа работников L , взяты из [1]. Параметр A рассчитан по приведенному выше соотношению. Интегрирование дифференциальных уравнений системы (5) производилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом $h = 1$. Физические размерности времен и денежных единиц можно трактовать как месяцы и тысячи долларов соответственно.

Расчеты производились с помощью специализированного пакета МКС-2002 [3], в котором реализован метод конечного состояния для расчета МКС-управлений. Графики зависимостей критериальной функции $J(y(t_f, t, x(t)))$ (фактической) и координат $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ от времени для $J^* = 18000$ изображены на рисунках 1 – 4.

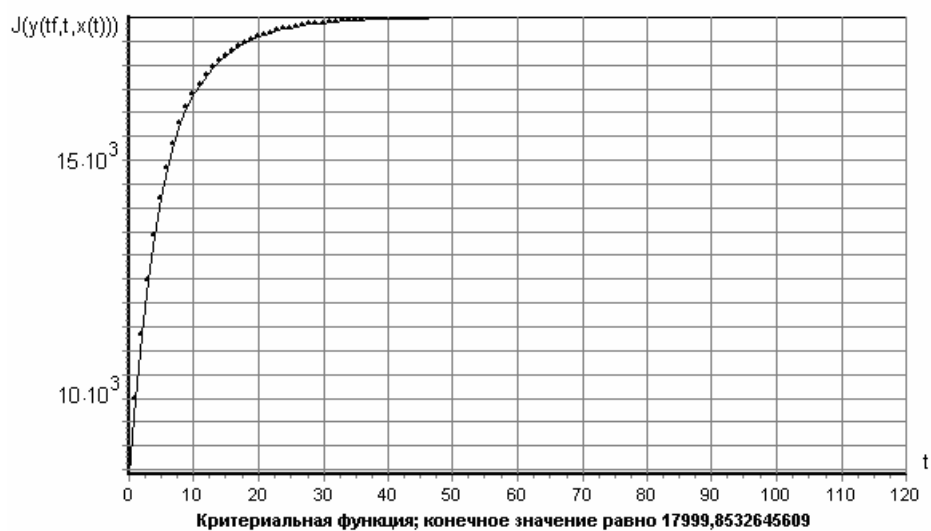


Рисунок 1 – График зависимости критериальной функции от времени (месяцев)

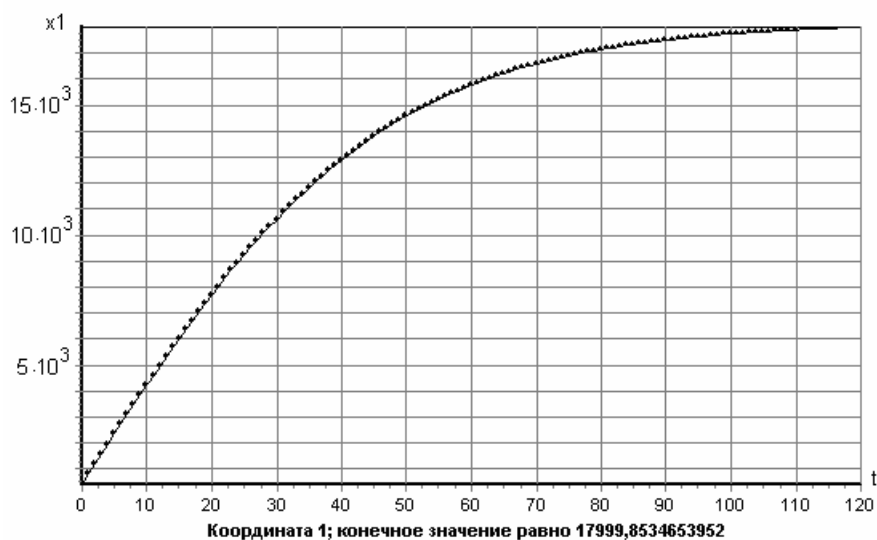


Рисунок 2 – График зависимости прироста прибыли (в тысячах долларов) от времени (месяцев)

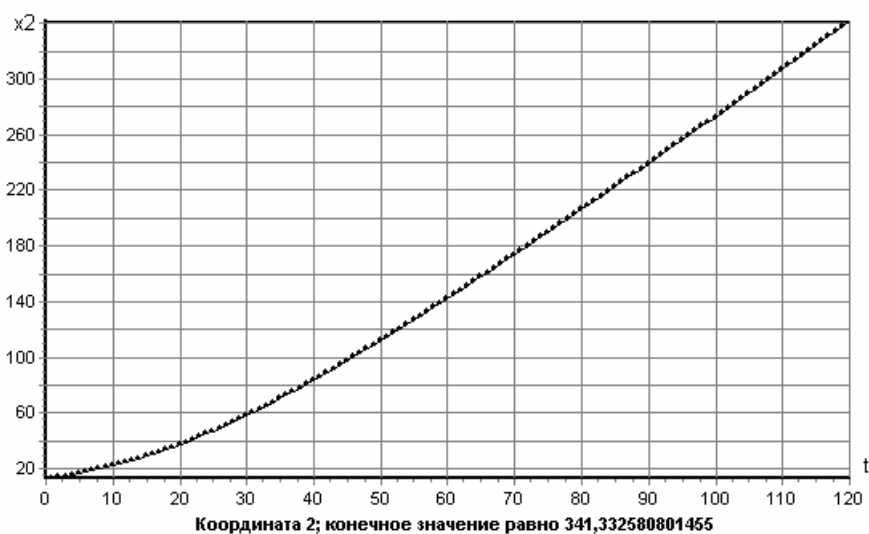


Рисунок 3 – График роста капитала (в тысячах долларов) от времени (месяцев)

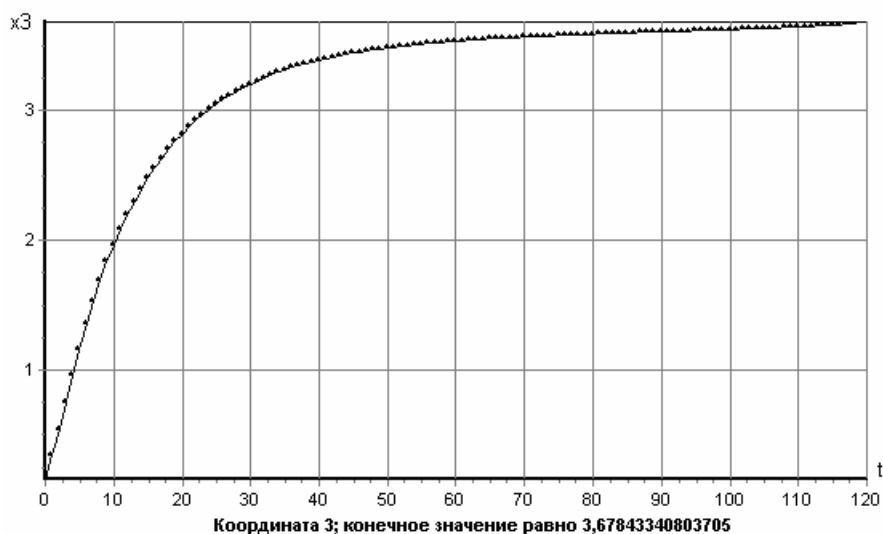


Рисунок 4 – График изменения инвестиций (в тысячах долларов)

Анализ приведенных результатов показывает, что процессы протекают в близком соответствии с теорией: критериальная функция ведет себя как экспонента с постоянной времени $T_u = 5$ и почти точно равна заданному $J^* = 18000$ (17999,85 на рисунке 3); конечное значение первой координаты совпадает с конечным значением критериальной функции, т.е. выполняется равенство (6). Инвестиции интенсивно растут ежемесячно в течение первых четырех лет. При этом темпы роста прибыли превышают темпы роста капитала. А затем инвестиции сохраняются почти постоянными в течение оставшегося времени. При этом капитализация растет, а прибыль вначале растет, а затем устанавливается к постоянному значению 16550. С течением времени вложения в инвестиции обесцениваются. Полученные результаты подтверждаются базовой моделью инвестиций неоклассической экономической теории [4].

При большем, чем 18000, значении параметра J^* , критериальная функция постепенно отклоняется от экспоненты, что свидетельствует о выходе на границу области достижимости. В алгоритме (5) этому соответствуют особые точки, когда знаменатель GG^T равен нулю. Всякий раз, когда это происходит, управление становится бесконечным (практически при расчетах нулевой знаменатель заменяется малым числом). При этом происходит возврат в достижимую область и вновь под воздействием МКС-управления траектория критериальной функции приобретает заданный экспоненциальный вид до следующей особой точки. Если особые точки расположены близко друг от друга, траектория критериальной функции уже идет не по экспоненте, а через некоторое функциональное отображение особых точек в форме скользящего режима. При этом множество достижимости все время изменяется, так как каждый новый экспоненциальный участок начинается с новых начальных условий, образованных скачками координат от бесконечного управляющего воздействия. В данном случае имеет место как раз такой («мягкий») случай, когда отклонения теоретического и фактического поведения критериальной функции по мере приближения к границе области достижимости нарастают постепенно. В «жестком» же случае малейшее нарушение условий достижимости приводит к срыву процесса и цель управления оказывается недостижимой. Значение параметра J^* , при котором достигнуто максимальное значение критерия 21828, оказалось равным 22340 (с точностью до десятков). Следует сказать, что при этом зависимости инвестиций от времени оказались совершенно другими – в виде растущей функции с конечным значением 110 (сравните со значением 3,68 на рисунке 4). Что же касается прибыли (координата 1) и капитала (координата 2) в конце периода, то они получились равными 22340 и 2838 тыс. долларов. Таким образом, максимальная прибыль получилась за счет существенно большей капитализации. Сравнивая со случаем $J^* = 18000$, видим, что для увеличения прибыли на 25 % пришлось более чем в восемь раз увеличить капитал.

К сожалению, в [1] не приведены алгоритм управления и результаты, с которыми можно было бы сопоставить полученные выше зависимости. В [1] исходная модель (3) редуцирована к модели без внешних и управляющих воздействий, где оптимальная зависимость инвестиций от времени и количество работников скрыты в структуре и параметрах. Приводимые же в [1] результаты в виде фазовых портретов иллюстрируют только отличия нелинейной и линеаризованной моделей.

Таким образом, применение метода конечного состояния для решения одной из экономических задач позволило получить практически полезное решение в виде графика роста инвестиций (из оговоренного выше класса функций), обеспечивающих почти максимальную прибыль за конечный

интервал времени. При этом используемая модель позволяет учитывать изменяющиеся во времени затраты на рабочую силу, коэффициенты A, b, r и α . При соответствующей модификации постановки задачи с целью учета положительного влияния высокой оплаты труда на прибыль метод конечного состояния может быть применен и для этого случая. С учетом выполненных ранее исследований применения метода конечного состояния для задач управления нелинейными электроэнергетическими, гидродинамическими и другими системами, можно утверждать, что указанный метод является эффективным и перспективным средством решения нелинейных задач управления в самых разных областях человеческой деятельности.

Дальнейшие исследования связаны с обобщением метода конечного состояния на непрерывно-дискретные системы, поскольку для реальных производственных процессов с участием человека характерны дискретные во времени решения (управляющие воздействия).

Библиографический список

1. Herbert Ric D. Non-Linearities and Dynamics in a Neoclassical Model of Investment / Ric D. Herbert, Peter J. Stemp // Proc. Of 14th Triennial World Congress of IFAC, 5th-9th July 1999; Paper M-5-E-02-2. — Beijing: Chinese Academy of Science, 1999. — 6 p.
2. Шушляпин Е.А. Управление нелинейными непрерывно-дискретными системами методом конечного состояния / Е.А. Шушляпин, О.Г. Подольская // Тр. IV Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'05 ИПУ им. В.А. Трапезникова, 25 – 28 января 2005 г. — Москва, 2005. — С. 1495 – 1513.
3. Шушляпин Е.А. Программное обеспечение расчета управления и ковариационного анализа для многомерных нелинейных систем с гладкими нелинейностями / Е.А. Шушляпин, Л.В. Смиреникова, А.Е. Шушляпина // Системы контроля окружающей среды: сб. научн. тр. — МГИ: Севастополь, 2003. — С. 110 – 113.
4. Селищев А.С. Макроэкономика / А.С. Селищев. — СПб: Изд-во Питер, — 2002. — 448 с.

Поступила в редакцию 28.03.2007 г.

