

УДК 621.52

В.Я. Копп, профессор, д-р техн. наук,**А.А. Скидан, доцент,****В.М. Шарапов, профессор, д-р техн. наук,****Ю.Е. Обжерин, д-р техн. наук***Севастопольский национальный технический университет,**Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности,**Черкасский государственный технологический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: ps@sevgtu14.sebastopol.ua***ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДИАПАЗОНОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

Предложен подход к информационному анализу диапазонов измерений, основанный на выборе законов распределения случайных величин, исходя из максимума их дифференциальной энтропии.

Известно что, значительное влияние на точность измерений оказывает величина диапазона измерений. Выбор величин диапазонов не является новой задачей. Ему посвящено большое количество работ [1, 2], в которых теоретически обоснованы пути решения данной задачи. В данной статье речь пойдет лишь о корректировке и о частичном упрощении известных формул приведенных в [1]. Корректировка связана со следующим обстоятельством: предполагается, что посредством дополнительного тестирования известна дисперсия погрешности средства измерения, а закон распределения этой случайной величины выбирается из условия обеспечения максимума дифференциальной энтропии. В [3] строго доказано что если случайная величина ограничена конечными пределами то при заданной дисперсии максимальную энтропию обеспечивает усеченный нормальный закон ее распределения, что соответствует наихудшему случаю съема информации.

Упрощение известных формул связано с вычислением интеграла вида $\int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy$, в котором

$0 \leq x \leq 1$, за счет аппроксимации подинтегрального выражения.

Целью статьи является выбор оптимального диапазона измерений, что соответствует обеспечению максимума информационной способности средства измерений N [1]. Рассмотрим определение информационной способности средства измерения при аддитивной, мультипликативной и смешанной погрешности.

Для процесса измерения геометрических параметров деталей в машино-приборостроении основное значение имеет случай аддитивной погрешности. Для этого случая в [1] выведена формула, позволяющая вычислять информационную способность средства измерения:

$$N = \frac{\ln D}{\gamma_0 \sqrt{D}}; D = \frac{x_2}{x_1}; \gamma_0 = \frac{\Delta_0}{x_2}, \quad (1)$$

где D – диапазон измерений; γ_0 – относительная аддитивная погрешность; x_1, x_2 – верхний и нижний пределы измерений соответственно; Δ_0 – абсолютная аддитивная погрешность и в данном случае равная погрешности Δ средства измерения ($\Delta = \Delta_0$).

Для симметричной случайной величины с нулевым математическим ожиданием, распределенной по усеченному нормальному закону, как известно из [3], выражение для дифференциальной энтропии принимает вид

$$H_{\text{диф}} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2Ca}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_c^2}{2\sigma^2}} \right] - \ln \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

где C – нормирующий множитель, а $\pm \Delta_c$ – пределы, определяющие границы усечения.

Так как дифференциальная энтропия равномерно распределенной величины в пределах от $-\Delta_{\max}$ до $+\Delta_{\max}$ равна

$$H_{\text{диф}} = \ln 2\Delta_{\max}, \quad (2)$$

то с учетом (2) выражения для $2\Delta_{\max}$ и γ_0 при $\Delta_0 = \Delta_{\max}$, имеют вид:

$$2\Delta_{\max} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2Ca}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_c^2}{2\sigma^2}} \right] - \ln \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right\}; \quad (3)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2x_2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2Ca}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_c^2}{2\sigma^2}} \right] - \ln \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right\}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), окончательно получаем:

$$N = \frac{\ln D}{\frac{1}{2x_0} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2Ca}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_c^2}{2\sigma^2}} \right] - \ln \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right\} \sqrt{D}}. \quad (5)$$

Для многократных измерений выражение (4) имеет вид:

$$N = \frac{\ln D}{\frac{1}{2x_0} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2Ca}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_c^2}{2\frac{\sigma^2}{n}}} \right] - \ln \frac{C}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{2\pi}} \right\} \sqrt{D}}. \quad (6)$$

Здесь n – число повторных измерений.

В случае чисто мультипликативной погрешности в [1] приведена формула, позволяющая вычислять информационную способность средства измерения, имеющая вид

$$N = \frac{\ln D}{2\gamma_s}, \quad (7)$$

где γ_s – относительная погрешность чувствительности (относительная мультипликативная погрешность).

В этом случае $\Delta = \gamma_s x$ и $\Delta_{\max} = \gamma_s x_2$, значит $\gamma_s = \frac{\Delta_{\max}}{x_2}$, а $\Delta = \frac{\Delta_{\max}}{x_2} x$. Значение $\Delta_{\max}$ определяем из (3). Подставив выражение для γ_s в (7) с учетом (3) получим:

$$N = \frac{\ln D}{2\Delta_{\max}} x_2 = \frac{\ln D}{\exp \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2Ca}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_c^2}{2\sigma^2}} \right] - \ln \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right\}}. \quad (8)$$

Соответственно для многократных измерений выражение (8) имеет вид:

$$N = \frac{\ln D}{2\Delta_{\max}} x_2 = \frac{\ln D}{\exp \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2Ca}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_c^2}{2\frac{\sigma^2}{n}}} \right] - \ln \frac{C}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{2\pi}} \right\}} x_2. \quad (9)$$

Для случая определения информационной способности средств измерений при любом соотношении аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности в [1] приводится следующее выражение

$$N = \frac{\ln D}{2\gamma_s \mu_0}, \quad (10)$$

где $\mu_0 = e^{\Delta q_0}$, а Δq_0 равно

$$\Delta q_0 = \frac{1}{\ln D} \int_{x_0/x_2}^{x_0/x_1} \frac{\ln(1+y)}{y} dy, \quad (11)$$

где $x_0 = Bx_2$, $B = \frac{\gamma_0}{\gamma_s}$, причем $\gamma_s x_0 = \gamma_0 x_2$; $y = \frac{x_0}{x}$.

Далее в [1] согласно выражениям $\frac{x_0}{x_1} = \frac{\gamma_0}{\gamma_s} \cdot \frac{x_2}{x_1} = B \cdot D$ и $\frac{x_0}{x_2} = \frac{\gamma_0}{\gamma_s} = B$ формула (11) приводится к виду:

$$\Delta q_0 = \frac{1}{\ln D} \int_B^{BD} \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \frac{1}{\ln D} \left[\int_0^{BD} \frac{\ln(1+y)}{y} dy - \int_0^B \frac{\ln(1+y)}{y} dy \right]. \quad (12)$$

Учитывая свойства функции $\varphi(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy$, заключающиеся в равенствах $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln^2 x}{2}$, и $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \frac{\pi^2}{6}$, в указанной литературе показано, что достаточно вычислять интеграл

$$E(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy \quad (13)$$

при $0 \leq x \leq 1$.

Алгоритм вычисления Δq_0 сводится к трем случаям.

1. При $B < 1$, $B \cdot D < 1$, $\Delta q_0 = \frac{1}{\ln D} [E(B \cdot D) - E(B)]$.
2. При $B < 1$, $B \cdot D > 1$, $\Delta q_0 = \frac{1}{\ln D} \left[\frac{\pi^2}{6} + \frac{\ln^2(B \cdot D)}{2} - E\left(\frac{1}{B \cdot D}\right) - E(B) \right]$.
3. При $B > 1$, $B \cdot D > 1$, $\Delta q_0 = \frac{1}{\ln D} \left[\frac{\ln^2(B \cdot D)}{2} - \frac{\ln^2 B}{2} - E\left(\frac{1}{B}\right) - E\left(\frac{1}{B \cdot D}\right) \right]$.

Подводя итог аналитическим преобразованиям в целом можно заметить, что корректируется значение энтропийной погрешности в соответствии с (3), на основании которой выполняются расчеты по формулам (5), (6), (8) – (10).

Упростить расчеты можно за счет приближенного вычисления выражения (13), используя разложение в ряд функции $\ln(1+y)$ в виде:

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \frac{(y-y_0)^n}{n}.$$

Подставляя данное выражение в интеграл $E(x)$ (см. формулу (13)) получаем приближенное решение:

$$E(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \frac{(x-x_0)^n}{n^2}. \quad (14)$$

При вычислении интеграла (13) по формуле (14) x_0 определялось из условия минимальной ошибки одномерным поиском. Результаты исследования выражения (14) показали, что при четырех членах ряда погрешность вычислений относительно численно определенного значения $E(x)$, средняя относительная ошибка 0,61 %, а средняя абсолютная ошибка составляет $-3,151 \cdot 10^{-6}$. После разложения в ряд Маклорена ($x_0 = 0$) при удержании четырех членов ряда указанные погрешности составили 0,74 % и $3,259 \cdot 10^{-6}$. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что $E(x)$ можно рассчитывать по формуле

$$E(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy = \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}. \quad (15)$$

Данное выражение исследовалось на точность вычислений при двух, трех двадцати членах ряда. Средние относительная и абсолютная погрешности соответственно составили: для двух членов ряда 3,22 % и $1,62 \cdot 10^{-5}$; для трех соответственно 1,32 % и $6,40 \cdot 10^{-6}$; для двадцати соответственно 0,14 % и $1,27 \cdot 10^{-7}$.

Таким образом, можно сделать вывод, что разложение в ряд Маклорена (15) до четвертого члена дает достаточную для расчетов точность.

После того, как определены значения $E(x)$ и Δq_0 , по (10) определяется информационная способность средства измерения N .

Как указывалось выше, оптимальное значение диапазона измерения определяется из решения оптимизационной задачи:

$$D \rightarrow \max\{N(D)\}.$$

Подводя итог выполненным исследованиям в целом, можно утверждать, что уточняется значение энтропийной погрешности в соответствии с (3), на основании которой выполняются расчеты по формулам (5), (6), (8) – (10).

Дальнейшие исследования позволят уточнить диапазоны измерения конкретных приборных систем.

Библиографический список

1. Новицкий П.В. Основы информационной теории измерительных устройств / П.В. Новицкий. — Л.: Энергия, 1968. — 248 с.
2. Коломиец О.М. Автоматический выбор диапазона измерений в цифровых приборах / О.М. Коломиец, Е.М. Прошин. — М.: Энергия, 1980. — 128 с.
3. Анализ дифференциальной энтропии при технических измерениях в машино-приборостроении / В.Я. Копп, А.А. Скидан, А.И. Балакин [и др.] // Труды Одесского политехнического университета: сб. науч. тр. — Одесса, 2007. — Вып. 1(27). — С. 214 – 218.

Поступила в редакцию 28.03.2007 г.