

УДК.681.5

Ю.Е. Обжерин, профессор, д-р техн. наук,**Е.Г. Бойко, ст. преподаватель***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: vm@sevgtu.sebastopol.ua***ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРИОДА КОНТРОЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОТКАЗОВ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ**

Построена полумарковская модель процесса контроля параметрических отказов восстанавливаемой системы без отключения работающего компонента. Найдены стационарные характеристики надежности и эффективности качества ее функционирования.

Ключевые слова: полумарковская модель, параметрический отказ, контроль, оптимизация.

Одна из важнейших задач, решение которой обеспечивает не только надежность автоматизированной производственной системы (АПС), но и качество выпускаемой продукции, – своевременный контроль параметрических отказов [1]. В современной литературе рассматриваются математические модели процесса контроля-восстановления, учитывающие, в основном, влияние только периодичности контроля на технико-экономические показатели АПС [2], и мало внимания уделяется различным стратегиям проведения контроля, на которые необходимо обращать особое внимание для каждой исследуемой АПС индивидуально, в связи с многообразием контролируемых параметров и систем контроля.

Представлена математическая модель контроля параметрических отказов восстанавливаемой системы, в которой отказ любого элемента влечет за собой выход из строя всей системы, что позволяет рассматривать ее как однокомпонентную. Предполагается, что параметрический отказ может быть обнаружен только при включенном контроле. В отличие от работы [3], рассматривается стратегия контроля без отключения работающего компонента на период проведения контроля. Для описания процесса контроля-восстановления АПС используется полумарковский процесс (ПМП) с общим фазовым пространством состояний [4].

Целью статьи является определение оптимального периода контроля параметрических отказов восстанавливаемой системы без отключения работающего компонента.

Рассмотрим систему, функционирующую следующим образом. В начальный момент времени система начала работу, контроль включен. Время безотказной работы системы – случайная величина (СВ) α с функцией распределения (ФР) $F(t) = P\{\alpha \leq t\}$ и плотностью распределения (ПР) $f(t)$. Контроль проводится через случайное время δ с ФР $R(t) = P\{\delta \leq t\}$ и ПР $r(t)$. Отказ обнаруживается только во время проведения контроля. Длительность проведения контроля СВ γ с ФР $V(t) = P\{\gamma \leq t\}$ и ПР $v(t)$. После обнаружения отказа система начинает восстановление, контроль отключается. Время восстановления системы СВ β с ФР $G(t) = P\{\beta \leq t\}$ и ПР $g(t)$. После восстановления все свойства системы полностью обновляются.

Временная диаграмма функционирования системы изображена на рисунке 1.

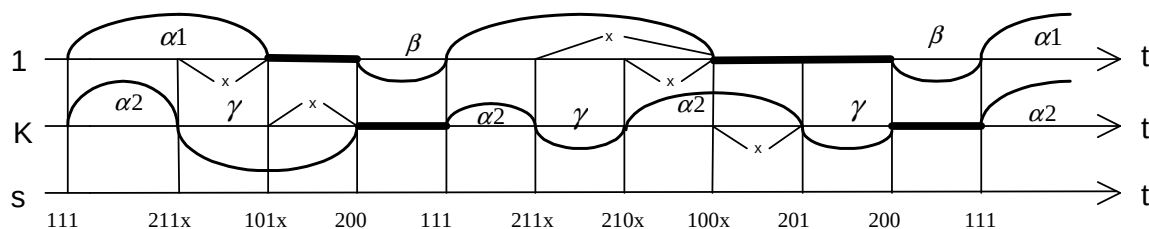


Рисунок 1 – Временная диаграмма функционирования системы

Для описания функционирования системы введем следующее пространство полумарковских состояний

$$E = \{111, 211x, 210x, 101x, 200, 100x, 201\},$$

где 111 – система начала работать, контроль включен; 211x – начался контроль, система работоспособна, до наступления параметрического отказа осталось время x ; 210x – контроль окончился, система работоспособна, до наступления параметрического отказа осталось время x ; 101x – контроль окончился, система работоспособна, до наступления параметрического отказа осталось время x ; 200 – отказ обнаружен, контроль отключен; 100x – отказ обнаружен, контроль отключен, до наступления восстановления системы осталось время x ; 201 – восстановление системы.

работоспособна, до наступлення параметрического отказа осталось время x ; 101х – наступил параметрический отказ, проводится контроля, до обнаружения отказа осталось время x ; 200 – отказ обнаружен, контроль отключился, началось восстановление системы; 100х – система отказала, до начала контроля осталось время x ; 201 – система в отказе, начался контроль.

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n, n \geq 0\}$ системы:

$$\begin{aligned} p_{111}^{211y} &= \int_0^{\infty} f(y+t)r(t)dt; \quad p_{111}^{100y} = \int_0^{\infty} r(y+t)f(t)dt; \quad p_{210x}^{211y} = r(x-y), \quad 0 < y < x; \\ p_{210x}^{100y} &= r(y+x), \quad y > 0; \quad p_{101x}^{200} = p_{100x}^{201} = p_{201}^{200} = p_{200}^{111} = 1; \\ p_{211x}^{101y} &= v(y+x), \quad y > 0; \quad p_{211x}^{210y} = v(x-y), \quad 0 < y < x. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим через $\rho(111)$, $\rho(200)$ и $\rho(201)$ значения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ на состояниях 111, 200 и 201 и предположим существование стационарных плотностей $\rho(211x)$, $\rho(210x)$, $\rho(101x)$ и $\rho(100x)$ для состояний 211х, 210х, 101х и 100х соответственно. Составим для них систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho(111) = \rho(200), \\ \rho(211x) = \rho(111) \int_0^{\infty} f(x+t)r(t)dt + \int_x^{\infty} \rho(210y)r(y-x)dy, \\ \rho(101x) = \int_0^{\infty} \rho(211y)v(x+y)dy, \\ \rho(210x) = \int_x^{\infty} \rho(211y)v(y-x)dy, \\ \rho(200) = \int_0^{\infty} \rho(101y)dy + \rho(201), \\ \rho(100x) = \rho(111) \int_0^{\infty} r(x+t)f(t)dt + \int_0^{\infty} \rho(210y)r(y+x)dy, \\ \rho(201) = \int_0^{\infty} \rho(100y)dy, \\ 2\rho_0 + \int_0^{\infty} \rho(100x)dx + \int_0^{\infty} \rho(211x)dx + \int_0^{\infty} \rho(211x)dx + \int_0^{\infty} \rho(211x)dx + \rho(201) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Последнее уравнение в системе (2) – условие нормировки.

Методом последовательных приближений можно показать, что система уравнений (2) имеет следующее решение:

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho(111) = \rho(200), \\ \rho(211x) = \rho_0 \int_0^{\infty} f(x+t) \left[r(t) + \int_0^t h_{\pi}(y)r(t-y)dy \right] dt, \\ \rho(101x) = \rho_0 \int_0^{\infty} f(t)dt \left[\int_0^t r(y)v(t+x-y)dy + \int_0^t h_{\pi}(z)dz \int_0^{t-z} r(y)v(t+x-y-z)dy \right], \\ \rho(210x) = \rho_0 \int_0^{\infty} f(t+x)h_{\pi}(t)dt, \\ \rho(100x) = \rho_0 \int_0^{\infty} f(t) \left[r(t+x) + \int_0^t h_{\pi}(y)r(t+x-y)dy \right] dt, \\ \rho(201) = \rho_0 \int_0^{\infty} f(t) \left[\bar{R}(t) + \int_0^t h_{\pi}(y)\bar{R}(t-y)dy \right] dt. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь ρ_0 находится их условия нормировки; $h_\pi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{*(n)}(t)$ – плотность функции восстановления $H_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (R * V)^{*(n)}(t)$ альтернирующего процесса, $\pi^{*(n)}(t)$ – n -кратная свертка функции $\pi(t) = \int_0^t r(y)v(t-y)dy$.

Для исходной системы множества работоспособных состояний E_+ и отказовых состояний E_- имеют вид:

$$E_+ = \{111, 211x, 210x\}, \quad E_- = \{101x, 200, 100x, 201\}.$$

Найдем стационарные характеристики системы.

Определим средние времена пребывания в состояниях системы:

$$\begin{aligned} M\theta_{111} &= \int_0^{\infty} \bar{F}(t)\bar{R}(t)dt; \quad M\theta_{211x} = \int_0^x \bar{V}(t)dt; \quad M\theta_{101x} = x; \\ M\theta_{201} &= M\gamma; \quad M\theta_{100x} = x; \quad M\theta_{200} = M\beta; \quad M\theta_{210x} = \int_0^x \bar{R}(t)dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ и среднее стационарное время восстановления T_- найдем по формулам [4]

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(e)\rho(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-)\rho(de)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(e)\rho(de)}{\int_{E_-} P(e, E_-)\rho(de)}, \quad (5)$$

где $\rho(de)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$; $m(e)$ – средние времена пребывания в состояниях системы; $P(e, E_-)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ из работоспособных состояний в отказовые.

С учетом формул (1), (3) и (4), найдем выражения, входящие в (5):

$$\begin{aligned} \int_{E_+} m(e)\rho(de) &= m(110)\rho(110) + \int_0^{\infty} m(211x)\rho(211x)dx + \\ &+ \int_0^{\infty} m(210x)\rho(210x)dx = \rho_0 \int_0^{\infty} \bar{F}(t)\bar{R}(t)dt + \rho_0 \int_0^{\infty} dx \int_0^x \bar{R}(t)dt \int_0^{\infty} h_\pi(y) f(x+y)dy + \\ &+ \rho_0 \int_0^{\infty} dx \int_0^x \bar{V}(t)dt \int_0^{\infty} f(x+z)r(z)dz + \rho_0 \int_0^{\infty} dx \int_0^x \bar{V}(t)dt \int_0^{\infty} f(x+z)dz \int_0^z h_\pi(y)r(z-y)dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразовывая второе, третье и четвертое слагаемые выражения (6), и с учетом формулы

$$\bar{R}(t) + \int_0^x \bar{V}(x-y)r(y)dy + \int_0^x h_\pi(z)dz \int_0^{x-z} \bar{V}(x-y-z)r(y)dy + \int_0^x \bar{R}(x-y)h_\pi(y)dy = 1,$$

получаем:

$$\int_{E_+} m(e)\rho(de) = \rho_0 M\alpha.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{E_-} m(e)\rho(de) &= \int_0^{\infty} m(100x)\rho(100x)dx + \int_0^{\infty} m(101x)\rho(101x)dx + m(201)\rho(201) + m(200)\rho(200) = \\ &= \rho_0 \int_0^{\infty} xdx \int_0^{\infty} f(t)dt \int_0^t r(y)v(t+x-y)dy + \rho_0 \int_0^{\infty} xdx \int_0^{\infty} f(t)dt \int_0^t h_\pi(z)dz \int_0^{t-z} r(y)v(t+x-y-z)dy + M\beta\rho_0 + \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& + M\gamma\rho_0 \int_0^\infty f(t)\bar{R}(t)dt + M\gamma\rho_0 \int_0^\infty f(t)dt \int_0^t h_\pi(y)\bar{R}(t-y)dy + \\
& + \rho_0 \int_0^\infty xdx \int_0^\infty f(t)r(t+x)dt + \rho_0 \int_0^\infty xdx \int_0^\infty f(t)dt \int_0^t h_\pi(y)r(t+x-y)dy.
\end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования в слагаемых, входящих в выражение (7), и, интегрируя их по частям, получаем:

$$\int_{E_-} m(e)p(de) = \rho_0 \left((M\gamma + M\delta) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z)h_\pi(z)dz \right) + M\beta - M\alpha \right).$$

Тогда,

$$\int_E m(e)p(de) = \rho_0 \left((M\gamma + M\delta) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z)h_\pi(z)dz \right) + M\beta \right). \quad (8)$$

Далее,

$$\int_{E_+} P(e, E_-) \rho(de) = \rho(111)P(111, E_-) + \int_0^\infty \rho(211x)P(211x, E_-)dx + \int_0^\infty \rho(210x)P(210x, E_-)dx = \rho_0.$$

Таким образом, средняя стационарная наработка на отказ T_+ имеет вид: $T_+ = M\alpha$.

Среднее стационарное время восстановления T_- определяется формулой:

$$T_- = M\beta - M\alpha + (M\delta + M\gamma) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z)h_\pi(z)dz \right).$$

Стационарный коэффициент готовности найдем из соотношения: $K_G = \frac{T_+}{T_+ + T_-}$.

$$\text{Тогда} \quad K_G = \frac{M\alpha}{M\beta + (M\delta + M\gamma) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z)h_\pi(z)dz \right)}. \quad (9)$$

Получим формулу для K_G исследуемой системы с учетом календарного контроля при условии неслучайного времени периодичности контроля $\tau > 0$. Учитывая, что в этом случае $R(t) = 1(t - \tau)$, где $\tau = \text{const}$, выражение (9), примет вид:

$$K_G = \frac{M\alpha}{M\beta + (\tau + M\gamma) \left(1 + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \bar{F}(z + n\tau) v^{*(n)} dz \right)}.$$

Предположим, что и периодичность контроля и длительность контроля неслучайны: $\delta = \tau; \gamma = h$.

Тогда формула (9) примет вид:

$$K_G = \frac{M\alpha}{M\beta + (\tau + h) \sum_{n=0}^\infty \bar{F}(n(\tau + h))}. \quad (10)$$

Важными характеристиками для оценки качества функционирования АС, являются экономические критерии, такие как средняя прибыль в единицу календарного времени S и средние затраты в единицу времени исправного функционирования C . Для их определения воспользуемся формулами [2]:

$$S = \frac{\int_E m(e) f_s(e) p(de)}{\int_E m(e) p(de)}, \quad C = \frac{\int_{E_+} m(e) f_c(e) p(de)}{\int_{E_+} m(e) p(de)}. \quad (11)$$

Здесь $f_s(e)$, $f_c(e)$ – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Для данной АС функции $f_s(e)$ и $f_c(e)$ имеют вид:

$$f_s(e) = \begin{cases} c_1, e \in \{111, 211x_1\}, \\ -c_2, e = 220, \\ -c_3, e \in \{212x_1, 202\}, \\ -c_4, e = 101x_2, \end{cases} \quad f_c(e) = \begin{cases} 0, e \in \{111, 211x_1\}, \\ c_2, e = 220, \\ c_3, e \in \{212x_1, 202\}, \\ c_4, e = 101x_2, \end{cases} \quad (12)$$

где c_1 – прибыль, получаемая за единицу времени функционирования; c_2 – затраты за единицу времени восстановления; c_3 – затраты за единицу времени на контроль; c_4 – потери за единицу времени от брака.

Используя результаты формул (3), (4), (8) и (12), находим значения выражений (11):

$$S = \left[c_1 \int_0^\infty \bar{F}(y) \left(\bar{R}(y) + \int_0^y h_\pi(t) \bar{R}(y-t) dt \right) dy - (c_3 - c_4) M \gamma \int_0^\infty f(y) \left(\bar{R}(y) + \int_0^y h_\pi(t) \bar{R}(y-t) dt \right) dy + \right. \\ \left. + c_3 \int_0^\infty \bar{V}(z) dz \int_0^\infty f(y+z) \left(\bar{R}(y) + \int_0^y h_\pi(t) \bar{R}(y-t) dt \right) dy - c_3 M (\gamma \wedge \alpha) + c_4 M \alpha - c_2 M \beta - \right. \\ \left. - c_3 \int_0^\infty \bar{V}(t) dt \int_0^\infty \bar{F}(y+t) h_\pi(y) dy - c_4 (M \gamma + M \delta) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z) h_\pi(z) dz \right) \right] / \left[M \beta + (M \delta + M \gamma) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z) h_\pi(z) dz \right) \right]; \quad (13)$$

$$C = \left[c_2 M \beta + c_3 M (\gamma \wedge \alpha) + c_4 M \alpha + c_4 (M \gamma + M \delta) \left(1 + \int_0^\infty \bar{F}(z) h_\pi(z) dz \right) + \right. \\ \left. + (c_3 - c_4) M \gamma \int_0^\infty f(y) \left(\bar{R}(y) + \int_0^y h_\pi(t) \bar{R}(y-t) dt \right) dy + c_3 \int_0^\infty \bar{V}(t) dt \int_0^\infty \bar{F}(y+t) h_\pi(y) dy - \right. \\ \left. - c_3 \int_0^\infty \bar{V}(z) dz \int_0^\infty f(y+z) \left(\bar{R}(y) + \int_0^y h_\pi(t) \bar{R}(y-t) dt \right) dy \right] / M \alpha. \quad (14)$$

Использование формул (13), (14) позволило определить оптимальный период контроля рассматриваемой системы для различных законов распределения случайных величин, с учетом, что $\delta = \tau$, $\gamma = h$. В таблице 1 представлены результаты вычислений.

При вычислениях функций (12) были приняты следующие исходные данные:

$$c_1 = 2 \text{ у.е.}; \quad c_2 = 2 \text{ у.е.}; \quad c_3 = 1 \text{ у.е.}; \quad c_4 = 1 \text{ у.е.}$$

Таблица 1 – Определение оптимального периода контроля

Исходные данные				Результаты			
Вид распределения случайных величин	$M\alpha$	$M\beta$	h	τ_{onm}	$S(\tau_{onm})$	τ_{onm}	$C(\tau_{onm})$
	ч	ч	ч	ч	у.е./ч	ч	у.е./ч
Показательный	60	0,5	0,25	4,37	1,753	0	0,007
Эрланга II порядка	60	0,5	0,25	4,424	1,751	0	0,022
Эрланга IV порядка	60	0,5	0,25	4,422	1,754	0	0,023

В дальнейшем планируется использовать полученную методику для построения и исследования математических моделей многокомпонентных АС с последовательным и параллельным соединениями, а также для различных видов контроля.

Библиографический список

1. Черкесов Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов / Г.Н. Черкесов. — СПб.: Питер, 2005. — 479 с.
2. Каштанов В.А. Теория надежности сложных систем (теория и практика) / В.А. Каштанов, А.И. Медведев. — М.: Европейский центр по качеству, 2002. — 470 с.
3. Обжерин Ю.Е. Фазовое укрупнение полумарковской модели системы с учетом контроля / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко // Вестник Херсонского национального технического университета. — 2007. — Вып. 2 (28). — С. 224–229.
4. Корольюк В.С. Стохастические модели систем / В.С. Корольюк. — К.: Наук. думка, 1989. — 208 с.
5. Копп В.Я. Стохастические модели автоматизированных систем с временным резервированием / В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский. — Севастополь: Изд-во СевГТУ, 2000. — 284 с.

Поступила в редакцию 01.03.2010 г.