

УДК 621.52

В.Я. Копп, профессор, д-р техн. наук; Е.А. Волошина, инженер*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: ps@sevgtu14.sebastopol.ua***АНАЛИЗ ДВУХКООРДИНАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

Рассматриваются вопросы, связанные с точностью двухкоординатных измерений, определяется вид двумерной плотности распределения случайных величин, соответствующих погрешностям измерений.

Ключевые слова: *двухкоординатные измерения, энтропия, плотность распределения, измерения.*

Любое современное производство должно быть оснащено измерительными средствами, позволяющими осуществлять точный и объективный контроль технологического процесса. От этого зависят уровень качества продукции и производительность. В автоматизированном производстве своевременное получение необходимой достоверной измерительной информации является одним из важнейших условий качественного управления объектом регулирования. Однако обеспечение высокой точности измерений и ее оценка оказываются весьма непростой задачей. Во многих случаях при разработке средств измерений требуется знать вид плотности распределения их погрешности.

Целью данной работы является определение вида двумерной плотности распределения $P(x, y)$ случайных величин, являющихся погрешностями измерений по координатам x, y , при известных предельных значениях этих погрешностей $(\pm a), (\pm b)$. Предполагается также, что из статистических исследований известны $\alpha_{01}[x, y]$, $\alpha_{10}[x, y]$, $\alpha_{02}[x, y]$, $\alpha_{20}[x, y]$, $\alpha_{11}[x, y]$ – первые и вторые центральные моменты данных случайных величин. Плотность распределения $P(x, y)$ выбирается из условия наибольшей неопределенности, соответствующей максимуму дифференциальной энтропии $H_{\text{диф.}}$.

Математическая постановка задачи формулируется следующим образом.

Необходимо определить:

$$\max \rightarrow \left\{ H_{\text{диф.}} = - \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a p(x, y) \cdot \ln p(x, y) \cdot dx \cdot dy \right\}, \text{ при условиях:}$$

$$\begin{cases} \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a p(x, y) \cdot dx \cdot dy = 1; \\ \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a x p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \alpha_{10}[x, y] = Mx_3; \\ \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a y p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \alpha_{01}[x, y] = My_3; \\ \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a (x - M_x)^2 p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \alpha_{20}[x, y] = Dx_3; \\ \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a (y - M_y)^2 p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \alpha_{02}[x, y] = Dy_3; \\ \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a (x - M_x)(y - M_y) p(x, y) \cdot dx \cdot dy = \alpha_{11}[x, y] = Kxy_3, \end{cases}$$

где $\alpha_{01}[x, y]$, $\alpha_{10}[x, y]$, $\alpha_{02}[x, y]$, $\alpha_{20}[x, y]$, $\alpha_{11}[x, y]$ – центральные моменты первого и второго порядков случайных величин, указанные выше.

Выражение для двумерной плотности определяется на основе решения уравнения Эйлера:

$$\frac{dF_{\Sigma}(x, y)}{dP(x, y)} = -\ln P(x, y) - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 (x - M_x)^2 + \lambda_5 (y - M_y)^2 + \lambda_6 (x - M_x)^2 (y - M_y)^2 = 0,$$

где

$$F_{\Sigma}(x, y) = -p(x, y) \cdot \ln p(x, y) + \lambda_1 p(x, y) + \lambda_2 x p(x, y) + \lambda_3 y p(x, y) + \\ + \lambda_4 (x - M_x)^2 p(x, y) + \lambda_5 (y - M_y)^2 p(x, y) + \lambda_6 (x - M_x)^2 (y - M_y)^2 p(x, y),$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ – множители Лагранжа.

Таким образом, выражение для двумерной плотности имеет вид:

$$p(x, y) = e^{-1+\lambda_1'} \cdot e^{\lambda_2' x + \lambda_3' y + \lambda_4' x^2 + \lambda_5' y^2 + \lambda_6' x \cdot y},$$

где $\lambda_1 + \lambda_1'' = \lambda_1'$; $\lambda_1'' = \lambda_4 M_x^2 + \lambda_5 M_y^2 + \lambda_6 M_x M_y$; $\lambda_2' = \lambda_2 - 2\lambda_4 M_x - \lambda_6 M_y$; $\lambda_3' = \lambda_3 - 2\lambda_4 M_y - \lambda_6 M_x$.

Тогда

$$e^{\lambda_1'-1} = \frac{1}{\int_{-b-a}^b \int_a^b e^{\lambda_2' x + \lambda_3' y + \lambda_4' x^2 + \lambda_5' y^2 + \lambda_6' xy} dx dy} = \frac{C_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_3' y + \lambda_5' y^2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_2' x + \lambda_4' x^2 + \lambda_6' xy} dx}.$$

Введем обозначения:

$$-\lambda_2'^2 - \frac{(4\lambda_4\lambda_3' - 2\lambda_2'\lambda_6')^2}{4(4\lambda_4\lambda_5' - \lambda_6'^2)} = K; \quad 4\lambda_4\lambda_5' - \lambda_6'^2 = \gamma; \quad \frac{4\lambda_4\lambda_3' - 2\lambda_2'\lambda_6'}{2(4\lambda_4\lambda_5' - \lambda_6'^2)} = t.$$

Таким образом, получаем:

$$e^{\lambda_1'-1} = \frac{C_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_3' y + \lambda_5' y^2 - \frac{(\lambda_2' + \lambda_6' y)^2}{4\lambda_4}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_4 \left(x + \frac{\lambda_2' + \lambda_6' y}{2\lambda_4} \right)^2} dx}.$$

Рассмотрим выражение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_4 \left(x + \frac{\lambda_2' + \lambda_6' y}{2\lambda_4} \right)^2} dx = \left[\lambda_4 = -\frac{1}{2\varepsilon_x^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}}; \frac{\lambda_2' + \lambda_6' y}{2\lambda_4} = m_x \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\varepsilon_x^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}}} dx = \\ = \left[\frac{x-m_x}{\sqrt{2\varepsilon_x^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}}} = z; dz = \frac{dx}{\sqrt{2\varepsilon_x^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}}}; dx = \sqrt{2\varepsilon_x^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} dz \right] = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \sqrt{2\varepsilon_x^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} dz = \sqrt{2\varepsilon_x^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{2\varepsilon_x^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \sqrt{\pi}, \\ e^{\lambda_1'-1} = \frac{C_1}{\varepsilon_x^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^K e^{\gamma(y+t)^2} dy}.$$

Выполним преобразования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^K e^{\gamma(y+t)^2} dy = \left[\gamma = -\frac{1}{2\varepsilon_y^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}}; t = -m_y \right] = e^K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\varepsilon_y^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}}} dy = \\ = \left[\frac{y-m_y}{\sqrt{2\varepsilon_y^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}}} = w; dw = \frac{dy}{\sqrt{2\varepsilon_y^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}}}; dy = \sqrt{2\varepsilon_y^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} dw \right] = \\ = e^K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} \sqrt{2\varepsilon_y^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} dw = e^K \sqrt{2\varepsilon_y^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} dw = e^K \sqrt{2\varepsilon_y^2 \sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \sqrt{\pi}.$$

Обозначим:

$$e^{\lambda_1'-1} = \frac{C_1}{2\pi\varepsilon_x\varepsilon_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}e^K}; \quad C = \frac{C_1}{e^K}; \quad e^{\lambda_1'-1} = \frac{C}{2\pi\varepsilon_x\varepsilon_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}.$$

Тогда

$$P(x, y) = \frac{C}{2\pi\epsilon_x\epsilon_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \left[\frac{(x-M_x)^2}{\epsilon_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-M_x)(y-M_y)}{\epsilon_x\epsilon_y} + \frac{(y-M_y)^2}{\epsilon_y^2} \right]},$$

где $C = \frac{2\pi\epsilon_x\epsilon_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}{\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \left[\frac{(x-M_x)^2}{\epsilon_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-M_x)(y-M_y)}{\epsilon_x\epsilon_y} + \frac{(y-M_y)^2}{\epsilon_y^2} \right]} dx dy}.$

Таким образом, можно считать доказанным, что двумерная плотность распределения подчиняется усеченному нормальному закону.

Определим математические ожидания случайных величин по соответствующим координатам.

Обозначим $C_1 = \frac{C}{2\pi\epsilon_x\epsilon_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}},$

Тогда $Mx_3 = C_1 \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a x e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \left[\frac{(x-M_x)^2}{\epsilon_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-M_x)(y-M_y)}{\epsilon_x\epsilon_y} + \frac{(y-M_y)^2}{\epsilon_y^2} \right]} dx dy.$

Введя еще одно обозначение $K_x = \frac{-1}{2\sqrt{1-\rho_{xy}^2}},$ получим:

$$Mx_3 = C_1 \int_{-b}^b e^{\frac{K_x(y-M_y)^2}{\epsilon_y^2}} dy \int_{-a}^a x e^{K_x \left(\frac{(x-M_x)^2}{\epsilon_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-M_x)(y-M_y)}{\epsilon_x\epsilon_y} \right)} dx.$$

Преобразовывая подынтегральное выражение, имеем:

$$\frac{(x-M_x)^2}{\epsilon_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-M_x)(y-M_y)}{\epsilon_x\epsilon_y} = \frac{\epsilon_y x^2 - 2x(\epsilon_y M_x + \rho_{xy}\epsilon_x y - \rho_{xy}\epsilon_x M_y) + \epsilon_y M_x^2 + 2\rho_{xy}y\epsilon_x M_x - 2\rho_{xy}\epsilon_x M_x M_y}{\epsilon_x^2 \epsilon_y};$$

$$\epsilon_y M_x + \rho_{xy}\epsilon_x y - \rho_{xy}\epsilon_x M_y = \Phi_{x1};$$

$$\epsilon_y x^2 - 2x(\epsilon_y M_x + \rho_{xy}\epsilon_x y - \rho_{xy}\epsilon_x M_y) = \epsilon_y \left(x - \frac{\Phi_{x1}}{\epsilon_y} \right)^2 - \frac{\Phi_{x1}^2}{\epsilon_y}.$$

$$Mx_3 = C_1 \int_{-b}^b e^{\frac{K_x(y-M_y)^2}{\epsilon_y^2} + \frac{K_x(\epsilon_y M_x^2 + 2\rho_{xy}y\epsilon_x M_x - 2\rho_{xy}\epsilon_x M_x M_y - \frac{\Phi_{x1}^2}{\epsilon_y})}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}} dy \int_{-a}^a x e^{K_x \frac{\epsilon_y \left(x - \frac{\Phi_{x1}}{\epsilon_y} \right)^2}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}} dx. \quad (1)$$

Преобразовав $\int_{-a}^a x e^{K_x \frac{\epsilon_y \left(x - \frac{\Phi_{x1}}{\epsilon_y} \right)^2}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}} dx,$ получим:

$$\int_{-a}^a x e^{K_x \frac{\epsilon_y \left(x - \frac{\Phi_{x1}}{\epsilon_y} \right)^2}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}} dx = \left[\begin{array}{l} x - \frac{\Phi_{x1}}{\epsilon_y} = Z; \quad x = Z + \frac{\Phi_{x1}}{\epsilon_y}; \quad dx = dZ \\ x = a; \quad Z = a - \frac{\Phi_{x1}}{\epsilon_y}; \quad x = -a; \quad Z = -a - \frac{\Phi_{x1}}{\epsilon_y} \end{array} \right] = A_1 + A_2.$$

$$A_1 = \frac{\frac{K_x a^2}{\epsilon_x^2} + \frac{K_x \Phi_{x1}^2}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}}{2K_x} \left(e^{-\frac{2K_x a \Phi_{x1}}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}} - e^{-\frac{2K_x a \Phi_{x1}}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}} \right); \quad (2)$$

$$A_2 = \frac{\varphi_{x1}}{\varepsilon_y \sqrt{\beta_x}} \frac{1}{C_{x2}} \sqrt{\pi}. \quad (3)$$

$$\text{Здесь } C_{x2} = \frac{\left(a - \frac{\varphi_{x1}}{\varepsilon_y}\right) \sqrt{\beta_x}}{\int_{\left(-a - \frac{\varphi_{x1}}{\varepsilon_y}\right) \sqrt{\beta_x}}^{+\infty} e^{-h_x^2} dh_x / \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_x^2} dh_x}.$$

Подставляя (2) и (3) в выражение (1), получаем:

$$Mx_3 = C_1 \int_{-b}^b e^{\frac{K_x (y-M_y)^2}{\varepsilon_y^2} + \frac{K_x \left(\varepsilon_y M_x^2 + 2\rho_{xy} \varepsilon_x M_x - 2\rho_{xy} \varepsilon_x M_x M_y - \frac{\varphi_{x1}^2}{\varepsilon_y}\right)}{\varepsilon_x^2 \varepsilon_y}} \left(\frac{\varepsilon_x^2 e^{\frac{K_x a^2}{\varepsilon_x^2} + \frac{K_x \varphi_{x1}^2}{\varepsilon_x^2 \varepsilon_y}}}{2K_x} \left(e^{-\frac{2K_x a \varphi_{x1}}{\varepsilon_x^2 \varepsilon_y}} - e^{-\frac{2K_x a \varphi_{x1}}{\varepsilon_x^2 \varepsilon_y}} \right) + \frac{\sqrt{\pi} \varphi_{x1}}{\varepsilon_y C_{x2} \sqrt{\beta_x}} \right) dy =$$

$$= A_3 + A_4 - A_5. \quad (4)$$

$$A_3 = \frac{C_1 \sqrt{\pi}}{\varepsilon_y C_{x2} \sqrt{\beta_x}} e^{w_{x1} - \frac{w_{x3}^2}{w_{x2}}} \left(\frac{\rho_{xy} e^{\frac{w_{x2} b^2 + w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{2w_{x2}} (e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}}) - \frac{\sqrt{\pi}}{C_{x3} \sqrt{\beta_{x1}}} \left(\frac{\rho_{xy} w_{x3}}{w_{x2}} - w_x \right) \right); \quad (5)$$

$$A_4 = \frac{C_1 \varepsilon_x^2 \sqrt{\pi} e^{\frac{w_{x6}}{w_{x4}} - \frac{w_{x5}^2}{w_{x4}}}}{2K_x \sqrt{\beta_{x2}} C_{x4}}; \quad (6)$$

$$A_5 = \frac{C_1 \varepsilon_x^2 \sqrt{\pi} e^{\frac{w_{x6}}{w_{x4}} - \frac{w_{x7}^2}{w_{x4}}}}{2K_x \sqrt{\beta_{x2}} C_{x5}}; \quad (7)$$

$$\text{где } C_{x3} = \frac{\int_{\left(-b + \frac{w_{x3}}{w_{x2}}\right) \sqrt{\beta_{x1}}}^{\left(b + \frac{w_{x3}}{w_{x2}}\right) \sqrt{\beta_{x1}}} e^{-h_{x1}^2} dh_{x1}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_{x1}^2} dh_{x1}}; \quad C_{x4} = \frac{\int_{\left(-b + \frac{w_{x5}}{w_{x4}}\right) \sqrt{\beta_{x2}}}^{\left(b + \frac{w_{x5}}{w_{x4}}\right) \sqrt{\beta_{x2}}} e^{-h_{x2}^2} dh_{x2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_{x2}^2} dh_{x2}}; \quad C_{x5} = \frac{\int_{\left(-b + \frac{w_{x7}}{w_{x4}}\right) \sqrt{\beta_{x2}}}^{\left(b + \frac{w_{x7}}{w_{x4}}\right) \sqrt{\beta_{x2}}} e^{-h_{x3}^2} dh_{x3}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_{x3}^2} dh_{x3}};$$

$$w_{x1} = \frac{\varepsilon_x^2 K_x M_y^2 + K_x \varepsilon_y^2 M_x^2 - 2K_x \varepsilon_y \rho_{xy} \varepsilon_x M_x M_y - K_x w_x^2}{\varepsilon_y^2 \varepsilon_x^2}; \quad w_{x2} = \frac{\varepsilon_x^2 K_x - K_x \rho_{xy}^2 \varepsilon_x^2}{\varepsilon_y^2 \varepsilon_x^2};$$

$$w_{x3} = \frac{\varepsilon_x^2 K_x M_y + K_x \varepsilon_y \rho_{xy} \varepsilon_x M_x - K_x w_x \varepsilon_x \rho_{xy}}{\varepsilon_y^2 \varepsilon_x^2}.$$

Подставляя полученные (5 – 7) в выражение (4), получаем математические ожидания случайных величин по координате x :

$$Mx_3 = \frac{C_1 \sqrt{\pi}}{\varepsilon_y C_{x2} \sqrt{\beta_x}} e^{w_{x1} - \frac{w_{x3}^2}{w_{x2}}} \left(\frac{\rho_{xy} e^{\frac{w_{x2} b^2 + w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{2w_{x2}} (e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}}) - \frac{\sqrt{\pi}}{C_{x3} \sqrt{\beta_{x1}}} \left(\frac{\rho_{xy} w_{x3}}{w_{x2}} - w_x \right) \right) +$$

$$+ \frac{C_1 \varepsilon_x^2 \sqrt{\pi} e^{\frac{w_{x6}}{w_{x4}} - \frac{w_{x5}^2}{w_{x4}}}}{2K_x \sqrt{\beta_{x2}} C_{x4}} - \frac{C_1 \varepsilon_x^2 \sqrt{\pi} e^{\frac{w_{x6}}{w_{x4}} - \frac{w_{x7}^2}{w_{x4}}}}{2K_x \sqrt{\beta_{x2}} C_{x5}}.$$

Аналогично находим математические ожидания случайных величин по координате y .

Определим дисперсии случайных величин по соответствующим координатам:

$$Dx_3 = C_1 Mx_3^2 - C_1 \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a x^2 P(x, y) dx dy = C_1 Mx_3^2 - D_1.$$

Рассмотрим D_1 :

$$D_1 = C_1 \int_{-b}^b e^{\frac{K_x(y-M_y)^2}{\epsilon_y^2} + \frac{K_x\left(\epsilon_y M_x^2 + 2\rho_{xy} y M_x - 2\rho_{xy} M_x M_y - \frac{\Phi_{x1}^2}{\epsilon_y}\right)}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}} dy \int_{-a}^a x^2 e^{\frac{K_x\left(x - \frac{\Phi_{x1}}{\epsilon_y}\right)^2}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}} dx. \quad (8)$$

Вычисляя интегралы по x в выражении (8), получаем:

$$\begin{aligned} D_1 = C_1 \int_{-b}^b e^{\frac{K_x(y-M_y)^2}{\epsilon_y^2} + \frac{K_x\left(\epsilon_y M_x^2 + 2\rho_{xy} y M_x - 2\rho_{xy} M_x M_y - \frac{\Phi_{x1}^2}{\epsilon_y}\right)}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}} + \frac{K_x a^2 \epsilon_y^2 + K_x \Phi_{x1}^2}{\epsilon_x^2 \epsilon_y^2} + \gamma_x \frac{\gamma_{x1} \epsilon_x^2}{K_x \epsilon_y} dy - \\ - C_1 \int_{-b}^b \frac{\epsilon_x^2}{K_x \epsilon_y} \frac{\rho_{xy} y}{2} e^{\frac{K_x(y-M_y)^2}{\epsilon_y^2} + \frac{K_x\left(\epsilon_y M_x^2 + 2\rho_{xy} y M_x - 2\rho_{xy} M_x M_y - \frac{\Phi_{x1}^2}{\epsilon_y}\right)}{\epsilon_x^2 \epsilon_y}} + \frac{K_x a^2 \epsilon_y^2 + K_x \Phi_{x1}^2}{\epsilon_x^2 \epsilon_y^2} + \gamma_x dy + C_1 \int_{-b}^b \frac{\epsilon_x^2 \gamma_{x2}}{K_x \epsilon_y} e^{\gamma_{x7} + \gamma_x} dy + \\ + C_1 \int_{-b}^b \frac{\epsilon_x^2}{K_x \epsilon_y} \frac{\rho_{xy} y}{2} e^{\gamma_{x7} + \gamma_x} dy + C_1 \int_{-b}^b \gamma_{x3} e^{\gamma_{x8}} dy + C_1 \int_{-b}^b \gamma_{x4} y^2 e^{\gamma_{x8}} dy + C_1 \int_{-b}^b \gamma_{x5} y e^{\gamma_{x8}} dy = \\ = E_1 - E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7. \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$E_1 = \frac{C_1 \gamma_{x1} \sqrt{\pi} \epsilon_x^2 e^{-w_{x9}}}{K_x \epsilon_y \sqrt{\beta_{x3}} C_{x6}}, \quad (10)$$

$$E_2 = \frac{C_1 \rho_{xy} \epsilon_x^2 e^{-w_{x9}}}{2 K_x \epsilon_y} \left(\frac{\frac{K_x b^2 + K_x \tau_{x3}^2}{\epsilon_y^2}}{2 K_x} \left(e^{\frac{2 K_x b \tau_{x3}}{\epsilon_y^2}} - e^{\frac{-2 K_x b \tau_{x3}}{\epsilon_y^2}} \right) - \frac{\tau_{x3} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta_{x3}} C_{x6}} \right); \quad (11)$$

$$E_3 = \frac{C_1 \gamma_{x2} \sqrt{\pi} \epsilon_x^2 e^{-w_{x11}}}{K_x \epsilon_y \sqrt{\beta_{x3}} C_{x7}}; \quad (12)$$

$$E_4 = \frac{C_1 \rho_{xy} \epsilon_x^2 e^{-w_{x11}}}{2 K_x \epsilon_y} \left(\frac{\frac{K_x b^2 + K_x \tau_{x4}^2}{\epsilon_y^2}}{2 K_x} \left(e^{\frac{2 K_x b \tau_{x4}}{\epsilon_y^2}} - e^{\frac{-2 K_x b \tau_{x4}}{\epsilon_y^2}} \right) - \frac{\tau_{x4} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta_{x3}} C_{x7}} \right); \quad (13)$$

$$\text{где } C_{x6} = \frac{\int_{(-b+\tau_{x3})\sqrt{\beta_{x3}}}^{(b+\tau_{x3})\sqrt{\beta_{x3}}} e^{-h_{x4}^2} dh_{x4}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_{x4}^2} dh_{x4}}; \quad C_{x7} = \frac{\int_{(-b+\tau_{x4})\sqrt{\beta_{x3}}}^{(b+\tau_{x4})\sqrt{\beta_{x3}}} e^{-h_{x5}^2} dh_{x5}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_{x5}^2} dh_{x5}};$$

$$E_5 = \frac{\sqrt{\pi} C_1 \gamma_{x3} e^{\frac{w_{x1}^2}{w_{x2}}}}{\sqrt{\beta_{x1}} C_{x3}}; \quad (14)$$

$$E_6 = C_1 \gamma_{x4} e^{\frac{w_{x1} w_{x3}^2}{w_{x2}}} \left(\frac{be}{2w_{x2}} \left(e^{2bw_{x3}} + e^{-2bw_{x3}} \right) + \frac{w_{x3} e^{\frac{w_{x2} b^2 + w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{2w_{x2}^2} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2w_{x2} \sqrt{\beta_{x1} C_{x3}}} - \right. \\ \left. - \frac{2w_{x3} e^{\frac{w_{x2} b^2 + w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{2w_{x2}^2} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) + \frac{w_{x3}^2 \sqrt{\pi}}{w_{x2}^2 \sqrt{\beta_{x1} C_{x3}}} \right); \quad (15)$$

$$E_7 = C_1 \gamma_{x5} e^{\frac{w_{x1} w_{x3}^2}{w_{x2}}} \left(\frac{e}{2w_{x2}} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) - \frac{w_{x3} \sqrt{\pi}}{w_{x2} \sqrt{\beta_{x1} C_{x3}}} \right). \quad (16)$$

Подставляя выражения (9) – (16) в (8), получаем дисперсию случайных величин по координате x :

$$Dx_3 = C_1 Mx_3^2 - \frac{C_1 \gamma_{x1} \sqrt{\pi} \epsilon_x^2 e^{-w_{x9}}}{K_x \epsilon_y \sqrt{\beta_{x3} C_{x6}}} + \frac{C_1 \rho_{xy} \epsilon_x^2 e^{-w_{x9}}}{2K_x \epsilon_y} \left(\frac{\frac{K_x b^2 + K_x \tau_{x3}^2}{\epsilon_y^2} e}{2K_x} \left(e^{\frac{2K_x b \tau_{x3}}{\epsilon_y^2}} - e^{\frac{-2K_x b \tau_{x3}}{\epsilon_y^2}} \right) - \frac{\tau_{x3} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta_{x3} C_{x6}}} \right) - \\ - \frac{C_1 \gamma_{x2} \sqrt{\pi} \epsilon_x^2 e^{-w_{x11}}}{K_x \epsilon_y \sqrt{\beta_{x3} C_{x7}}} - \frac{C_1 \rho_{xy} \epsilon_x^2 e^{-w_{x11}}}{2K_x \epsilon_y} \left(\frac{\frac{K_x b^2 + K_x \tau_{x4}^2}{\epsilon_y^2} e}{2K_x} \left(e^{\frac{2K_x b \tau_{x4}}{\epsilon_y^2}} - e^{\frac{-2K_x b \tau_{x4}}{\epsilon_y^2}} \right) - \frac{\tau_{x4} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta_{x3} C_{x7}}} \right) - \\ - \frac{\sqrt{\pi} C_1 \gamma_{x3} e^{\frac{w_{x1} w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{\sqrt{\beta_{x1} C_{x3}}} - \\ - C_1 \gamma_{x4} e^{\frac{w_{x1} w_{x3}^2}{w_{x2}}} \left(\frac{be}{2w_{x2}} \left(e^{2bw_{x3}} + e^{-2bw_{x3}} \right) + \frac{w_{x3} e^{\frac{w_{x2} b^2 + w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{2w_{x2}^2} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2w_{x2} \sqrt{\beta_{x1} C_{x3}}} - \right. \\ \left. - \frac{2w_{x3} e^{\frac{w_{x2} b^2 + w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{2w_{x2}^2} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) + \frac{w_{x3}^2 \sqrt{\pi}}{w_{x2}^2 \sqrt{\beta_{x1} C_{x3}}} \right) - \\ - C_1 \gamma_{x5} e^{\frac{w_{x1} w_{x3}^2}{w_{x2}}} \left(\frac{e}{2w_{x2}} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) - \frac{w_{x3} \sqrt{\pi}}{w_{x2} \sqrt{\beta_{x1} C_{x3}}} \right).$$

Аналогично находим дисперсию случайных величин по координате y :

Найдем корреляционный момент

$$K_{xy_3} = C_1 \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a (x - Mx_3)(y - My_3) e^{\frac{-1}{2\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \left[\frac{(x-Mx_3)^2}{\epsilon_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-Mx_3)(y-My_3)}{\epsilon_x \epsilon_y} + \frac{(y-My_3)^2}{\epsilon_y^2} \right]} dx dy; \\ K_{xy_3} = C_1 \left(\int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a xy P(x, y) dx dy - My_3 \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a x P(x, y) dx dy - Mx_3 \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a y P(x, y) dx dy + Mx_3 My_3 \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a P(x, y) dx dy \right) = \\ = C_1 \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a xy P(x, y) dx dy - C_1 Mx_3 My_3. \quad (17)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
\int_{-b-a}^b \int_{-a}^a xyP(x,y)dx dy &= \int_{-b}^b ye^{\frac{K_x(y-M_y)^2}{\varepsilon_y^2}} dy \int_{-a}^a xe^{K_x \left(\frac{(x-M_x)^2}{\varepsilon_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-M_x)(y-M_y)}{\varepsilon_x \varepsilon_y} \right)} dx = \\
&= \frac{\rho_{xy}\sqrt{\pi}}{\varepsilon_y C_{x2}\sqrt{\beta_x}} \int_{-b}^b y^2 e^{\frac{w_{x2}}{w_{x2}} \left(y + \frac{w_{x3}}{w_{x2}} \right)^2 - \frac{w_{x3}^2}{w_{x2}} + w_{x1}} dy + \frac{w_x \sqrt{\pi}}{\varepsilon_y C_{x2}\sqrt{\beta_x}} \int_{-b}^b ye^{\frac{w_{x2}}{w_{x2}} \left(y + \frac{w_{x3}}{w_{x2}} \right)^2 - \frac{w_{x3}^2}{w_{x2}} + w_{x1}} dy + \\
&\quad + \frac{\varepsilon_x^2}{2K_x} e^{\frac{w_{x6}}{w_{x4}} - \frac{w_{x5}^2}{w_{x4}}} \int_{-b}^b ye^{\frac{w_{x4}}{w_{x4}} \left(y + \frac{w_{x5}}{w_{x4}} \right)^2} dy - \frac{\varepsilon_x^2}{2K_x} e^{\frac{w_{x6}}{w_{x4}} - \frac{w_{x7}^2}{w_{x4}}} \int_{-b}^b ye^{\frac{w_{x4}}{w_{x4}} \left(y + \frac{w_{x7}}{w_{x4}} \right)^2} dy = \\
&= Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4.
\end{aligned} \tag{18}$$

$$Q_1 = \frac{\rho_{xy}\sqrt{\pi}}{\varepsilon_y C_{x2}\sqrt{\beta_x}} e^{\frac{w_{x1}}{w_{x2}} - \frac{w_{x3}^2}{w_{x2}}} \left[\frac{be}{2w_{x2}} \left(e^{2bw_{x3}} + e^{-2bw_{x3}} \right) + \frac{w_{x3}e}{2w_{x2}^2} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) - \right. \\
\left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2w_{x2}\sqrt{\beta_{x1}}C_3} - \frac{2w_{x3}e^{\frac{w_{x2}b^2 + w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{2w_{x2}^2} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) + \frac{w_{x3}^2\sqrt{\pi}}{w_{x2}^2\sqrt{\beta_{x1}}C_3} \right]; \tag{19}$$

$$Q_2 = \frac{w_x \sqrt{\pi}}{\varepsilon_y C_{x2}\sqrt{\beta_x}} e^{\frac{w_{x1}}{w_{x2}} - \frac{w_{x3}^2}{w_{x2}}} \left[\frac{e^{\frac{w_{x2}b^2 + w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{2w_{x2}} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) - \frac{w_{x3}\sqrt{\pi}}{w_{x2}\sqrt{\beta_{x1}}C_{x3}} \right]; \tag{20}$$

$$Q_3 = \frac{\varepsilon_x^2}{2K_x} e^{\frac{w_{x6}}{w_{x4}} - \frac{w_{x5}^2}{w_{x4}}} \left[\frac{e^{\frac{w_{x4}b^2 + w_{x5}^2}{w_{x4}}}}{2w_{x4}} \left(e^{2bw_{x5}} - e^{-2bw_{x5}} \right) - \frac{w_{x5}\sqrt{\pi}}{w_{x4}\sqrt{\beta_{x2}}C_{x4}} \right]; \tag{21}$$

$$Q_4 = \frac{\varepsilon_x^2}{2K_x} e^{\frac{w_{x6}}{w_{x4}} - \frac{w_{x7}^2}{w_{x4}}} \left[\frac{e^{\frac{w_{x4}b^2 + w_{x7}^2}{w_{x4}}}}{2w_{x4}} \left(e^{2bw_{x7}} - e^{-2bw_{x7}} \right) - \frac{w_{x7}\sqrt{\pi}}{w_{x4}\sqrt{\beta_{x2}}C_{x5}} \right]. \tag{22}$$

Подставляя выражения (18 – 22) в (17), получаем:

$$\begin{aligned}
Kxy_3 &= \frac{C_1\rho_{xy}\sqrt{\pi}}{\varepsilon_y C_{x2}\sqrt{\beta_x}} e^{\frac{w_{x1}}{w_{x2}} - \frac{w_{x3}^2}{w_{x2}}} \left[\frac{be}{2w_{x2}} \left(e^{2bw_{x3}} + e^{-2bw_{x3}} \right) + \frac{w_{x3}e}{2w_{x2}^2} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2w_{x2}\sqrt{\beta_{x1}}C_3} - \frac{2w_{x3}e^{\frac{w_{x2}b^2 + w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{2w_{x2}^2} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) + \frac{w_{x3}^2\sqrt{\pi}}{w_{x2}^2\sqrt{\beta_{x1}}C_{x3}} \right] + \\
&\quad + \frac{C_1w_x\sqrt{\pi}}{\varepsilon_y C_{x2}\sqrt{\beta_x}} e^{\frac{w_{x1}}{w_{x2}} - \frac{w_{x3}^2}{w_{x2}}} \left[\frac{e^{\frac{w_{x2}b^2 + w_{x3}^2}{w_{x2}}}}{2w_{x2}} \left(e^{2bw_{x3}} - e^{-2bw_{x3}} \right) - \frac{w_{x3}\sqrt{\pi}}{w_{x2}\sqrt{\beta_{x1}}C_{x3}} \right] - C_1Mx_3My_3 + \\
&\quad + \frac{C_1\varepsilon_x^2}{2K_x} e^{\frac{w_{x6}}{w_{x4}} - \frac{w_{x5}^2}{w_{x4}}} \left[\frac{e^{\frac{w_{x4}b^2 + w_{x5}^2}{w_{x4}}}}{2w_{x4}} \left(e^{2bw_{x5}} - e^{-2bw_{x5}} \right) - \frac{w_{x5}\sqrt{\pi}}{w_{x4}\sqrt{\beta_{x2}}C_{x4}} \right] - \\
&\quad - \frac{C_1\varepsilon_x^2}{2K_x} e^{\frac{w_{x6}}{w_{x4}} - \frac{w_{x7}^2}{w_{x4}}} \left[\frac{e^{\frac{w_{x4}b^2 + w_{x7}^2}{w_{x4}}}}{2w_{x4}} \left(e^{2bw_{x7}} - e^{-2bw_{x7}} \right) - \frac{w_{x7}\sqrt{\pi}}{w_{x4}\sqrt{\beta_{x2}}C_{x5}} \right].
\end{aligned}$$

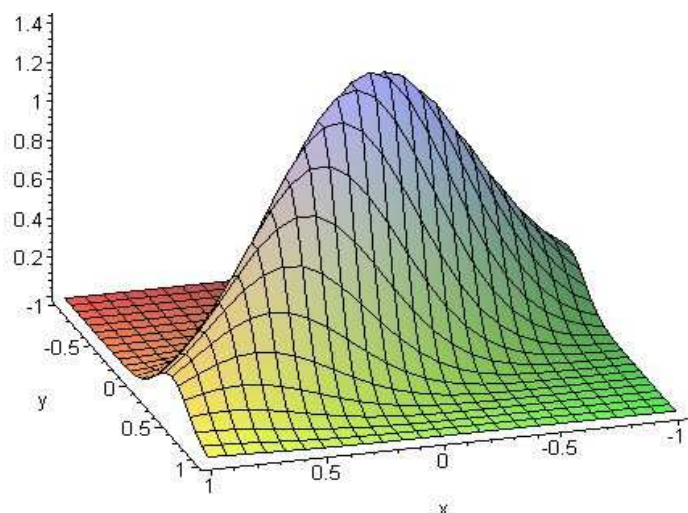


Рисунок 1 – Результаты моделирования величины $P(x, y)$

Подставляя полученные выражения для $P(x, y)$ в формулу дифференциальной энтропии после интегрирования получаем ее максимальное значение $H_{\text{диф.МАХ}}$. Выражение $H_{\text{диф.МАХ}}$, а также введенные замены постоянных коэффициентов в виду их громоздкости в статье не приводятся.

На рисунке 1 показаны результаты моделирования величины $p(x, y)$ при следующих параметрах $\alpha_{11}[x, y] = 0,1$; $\epsilon_x^2 = 0,2$; $\epsilon_y^2 = 0,1$; $\lambda_2 = 9,925$; $\lambda_3 = -4,349$; $\lambda_4 = -9,935$.

В дальнейшем планируется промоделировать полученные зависимости и разработать метод, основанный на энтропийном подходе, определения минимального числа повторных двухкоординатных измерений, удовлетворяющих требуемым условиям точности.

Библиографический список

1. Копп В.Я. Определение граничной оценки числа многократных двухпараметрических измерений на основе анализа дифференциальной энтропии / В.Я. Копп [и др.] // Вестник СевГТУ: сб. науч. тр. — Севастополь, 2007. — № 83. — С. 168–171.

Поступила в редакцию 13.04.2010 г.