

УДК 519.212

**Д.И. Долгин,**

**В.П. Долгин, канд. техн. наук**

Севастопольский национальный технический университет,

ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053

*E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua*

# ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ТРАНСПОРТНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ФИКСИРОВАННОГО ЧИСЛА ЗАЯВОК

*Изложен подход обобщения метода оптимизации на случай введения обслуживания фиксированного числа заявок по части маршрутов путем модификации совокупности базисных переменных.*

**Ключевые слова:** оптимизация, линейное программирование, ограничение, целевая функция, минимизация, транспортная задача

При решении задач оптимизации, требующих отыскания наибольших и наименьших значений, прибегают к методам линейного программирования. Линейное программирование – раздел математики, занимающийся решением задач на отыскание наибольших и наименьших значений, для которых методы математического анализа оказываются непригодными. К их числу относятся задачи рационального использования сырья и оборудования, составления оптимального плана обслуживания заявок, например на перевозку, работы транспорта и другие, относящиеся к сфере оптимального планирования. При традиционном подходе к решению указанных задач [1] не рассматриваются методы введения дополнительных ограничений на величину неизвестных.

**Целью статьи** является расширение возможностей метода оптимизации путем введения дополнительных ограничений на структуру базисных переменных.

Рассмотрим общую формулировку задачи линейного программирования [1]. Дана система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2; \\ & \text{-----} \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{aligned} \tag{1}$$

и линейная функция

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (2)$$

Требуется найти такое неотрицательное решение системы (1)

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (3)$$

при котором функция  $f$  принимает наименьшее значение.

Уравнения (1) представляют собой систему ограничений данной задачи, а функция  $f$  является целевой функцией (или линейной формой). Система ограничений в виде неравенств сводится к системе в форме равенств способом введения фиктивных добавочных неизвестных. Так, если имеется неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

то, вводя неизвестное  $x_{n+1} \geq 0$ , получим

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n x_{n+1} = b_i.$$

Значением  $x_{n+1}$  в окончательном результате можно пренебречь.

Так как  $\min(f) = -\max(-f)$ , то любая задача максимизации сводится к задаче минимизации (и наоборот). Поэтому постановку задачи линейного программирования в форме (1) – (3) можно считать общей.

Пусть поставлена задача линейного программирования в форме (1) – (3). Требуется среди неотрицательных решений системы (1) найти решение, минимизирующее целевую функцию (2).

Положим, что заданная система ограничений преобразована так, что какие-либо  $r$  ее неизвестных выражены через остальные следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1,n}x_n + \beta_1; \\ x_2 &= a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2,n}x_n + \beta_2; \\ &\text{-----} \\ x_r &= a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{r,n}x_n + \beta_r, \end{aligned} \quad (4)$$

причем

$$\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \dots, \beta_r \geq 0. \quad (5)$$

В этом случае неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_r$  являются базисными неизвестными, а остальные – свободными (небазисными). Таким образом, совокупность неизвестных  $B = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  образует базис.

В процессе эксплуатации (обслуживания) в силу различных случайных факторов (изменение планов заказчика, изменения состояния коммуникаций из-за ремонта, аварийных ситуаций на трассе, вынужденных изменений режимов обслуживания и других) может меняться состав переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Например, возможны ситуации, когда одна или несколько переменных принимают постоянные значения. В этом случае нужно вычислять целевую функцию при фиксированных значениях некоторых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Задавая начальные ограничения базисным неизвестным, изменим систему уравнений (4) в соответствии с дополнительными условиями задачи. Ясно, что ввод ограничений изменит базис.

Подставляя в (2) вместо базисных неизвестных их выражения (4), целевую функцию  $f$  представим через свободные неизвестные:

$$f = \gamma_0 + \gamma_{r+1} \dots + \gamma_n x_n. \quad (6)$$

Положим теперь, что все свободные неизвестные  $x_i$  ( $i = r+1, r+2, \dots, n$ ) равны нулю. Тогда для целевой функции (6) из системы (4) получим:

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0, \dots, 0),$$

что в силу (5) удовлетворяет условиям неотрицательности (3). Это решение является допустимым. Для этого решения, соответствующего базису  $B$ , значение целевой функции будет  $f = \gamma$ .

Основная идея метода решения задачи линейного программирования состоит в переходе от базиса  $B$  к новому базису  $B'$  так, чтобы новое значение  $f$  уменьшилось или, по крайней мере, не увеличилось

$$B \rightarrow B', \text{ если } f_{B'} \leq f_B.$$

Таким путем в конечном итоге можно прийти к базису, дающему минимум функции  $f$ , либо выяснить, что задача не имеет решения. Переход к новому базису  $B'$  происходит путем удаления из исходного базиса  $B$  одной из неизвестных и введения вместо нее какой-либо свободной неизвестной. Эти преобразования связаны с перестройкой системы (4). Результатом каждого очередного этапа преобразований является новый базис, соответствующее ему базисное решение, а также соответствующее этому решению значение целевой функции.

Рассмотренный подход составляет основное содержание метода решения задачи линейного программирования, называемого симплекс-методом или методом последовательного улучшения плана.

Рассмотрим пример решения транспортной задачи оптимизации плана перевозок.

#### Условие задачи

**Дано:** В  $m$  пунктах  $C_1, \dots, C_m$  находится соответственно  $Q_1, \dots, Q_m$  единиц груза, которые необходимо доставить в  $n$  пунктов  $M_1, \dots, M_n$ . Стоимость перевозки единицы груза из пунктов отправки  $C_1, \dots, C_m$  в пункты доставки  $M_1, \dots, M_n$  заданы матрицей  $c$  размерностью  $n \times m$ . Необходимо доставить в пункты  $M_1, \dots, M_n$  соответственно  $Q_{m+1}, \dots, Q_{m+n}$  единиц груза. Фиксированные значения по некоторым маршрутам доставки заданы матрицей  $b$  размерностью  $n \times m$ .

**Требуется** Составить план перевозок с минимальными затратами на транспортировку при выполнении требования дополнительных ограничений введенных матрицей  $b$ .

Для решения задачи введем обозначения. Для этого составим схемы перевозок, их стоимости и ограничений в табличной форме (таблица 1).

Таблица 1 – Схема перевозок

| В пункты        | $M_1$               | $M_2$               | ----- | $M_n$               | отправлено                                |
|-----------------|---------------------|---------------------|-------|---------------------|-------------------------------------------|
| из пункта $C_1$ | $x_1$               | $x_2$               | ----- | $x_n$               | $Q_1$                                     |
| из пункта $C_2$ | $x_{2n+1}$          | $x_{2n+2}$          | ----- | $x_{2n+n}$          | $Q_2$                                     |
| -----           | -----               | -----               | ----- | -----               | -----                                     |
| из пункта $C_m$ | $x_{m \cdot n + 1}$ | $x_{m \cdot n + 2}$ | ----- | $x_{m \cdot n + n}$ | $Q_m$                                     |
| <b>Получено</b> | $Q_{m+1}$           | $Q_{m+2}$           | ----- | $Q_{m+n}$           | $\sum_{i=1}^n Q_{m+i} = \sum_{j=1}^m Q_j$ |

Таблица 2 – Стоимость перевозок

| В пункты        | $M_1$             | $M_2$             | ----- | $M_n$             |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------|-------------------|
| из пункта $C_1$ | $c_1$             | $c_2$             | ----- | $c_n$             |
| из пункта $C_2$ | $c_{2n+1}$        | $c_{2n+2}$        | ----- | $c_{2n+n}$        |
| -----           | -----             | -----             | ----- | -----             |
| из пункта $C_m$ | $c_{m \cdot n+1}$ | $c_{m \cdot n+2}$ | ----- | $c_{m \cdot n+n}$ |

Таблица 3 – Фиксированные значения доставки

| В пункты        | $M_1$             | $M_2$             | ----- | $M_n$             |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------|-------------------|
| из пункта $C_1$ | $b_1$             | $b_2$             | ----- | $b_n$             |
| из пункта $C_2$ | $b_{2n+1}$        | $b_{2n+2}$        | ----- | $b_{2n+n}$        |
| -----           | -----             | -----             | ----- | -----             |
| из пункта $C_m$ | $b_{m \cdot n+1}$ | $b_{m \cdot n+2}$ | ----- | $b_{m \cdot n+n}$ |

По данным таблицы 1 составим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 + x_2 + \dots + x_n &= Q_1; \\
 x_{2n+1} + x_{2n+2} + \dots + x_{2n+n} &= Q_2; \\
 &\dots \\
 x_{m \cdot n+1} + x_{m \cdot n+2} + \dots + x_{m \cdot n+n} &= Q_m;
 \end{aligned} \right\} \text{ По строкам таблицы 1}$$

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 + x_{2 \cdot n+1} + \dots + x_{m \cdot n+1} &= Q_{m+1}; \\
 x_2 + x_{2 \cdot n+2} + \dots + x_{m \cdot n+2} &= Q_{m+2}; \\
 &\dots \\
 x_n + x_{2 \cdot n+n} + \dots + x_{m \cdot n+n} &= Q_{m+n}.
 \end{aligned} \right\} \text{ По столбцам таблицы 1}$$

По данным таблиц 1 и 2 опишем целевую функцию

$$Y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{m \cdot n+n} x_{m \cdot n+n}. \quad (8)$$

Для задания фиксированного значения доставки  $b_j$  единиц груза необходимо положить в системе уравнений (7) значение переменной  $x_j = b_j$ . При отсутствии дополнительных ограничений переменной  $x_j$  значение  $b_j$  в матрице отсутствует. Следует заметить, что при увеличении количества фиксированных значений матрицы  $b$  уменьшается число возможных вариантов решения. В предельном случае, когда матрица  $b$  полностью заполнена, существует только одно значение целевой функции (8), обусловленное значениями элементов матрицы  $b$ , т.е. целевая функция вырождается, принимая фиксированное значение.

Рассмотрим пример. Положим, что в системе (7) уравнений  $m = 2$ ;  $n = 3$ ;  $Q_1 = 20$ ;  $Q_2 = 40$ ;  $Q_3 = 15$ ;  $Q_4 = 25$ ;  $Q_5 = 20$ . В этом случае число уравнений системы равно сумме  $m + n = 5$ , а число неизвестных равно произведению  $m \times n = 6$ .

Реализация изложенных рассуждений выполнена с помощью Maple – процедуры оптимизации [2,3] и результат представлен графиками на рисунках 1 и 2.

#### > ОПТИМИЗАЦИЯ\_09.mws

##### ПРОЦЕДУРА ОПТИМИЗАЦИИ

```

ОРТ:=proc(b, j) local Syst, Str, Col, C, x;
              global EXT, MAX, MIN, Y, c;
x[j]:=b;
# ПЛАН ПЕРЕВОЗОК (таблица 1)
Str:= x[3]+x[2]+x[1] = Q[1], # По строкам
      x[4]+x[5]+x[6] = Q[2]; # таблицы 1
Col:= x[1]+x[4] = Q[3],
      x[2]+x[5] = Q[4],      # По столбцам
      x[3]+x[6] = Q[5];      # таблицы 1
Syst := {Str, Col};          # Система уравнений
Y:=sum('c[i]*x[i]', 'i'=1..m*n); # Целевая функция
MIN:=minimize(Y, Syst, NONNEGATIVE); # Минимальные затраты
MAX:=maximize(Y, Syst, NONNEGATIVE); # Максимальные затраты
EXT:=MIN: #EXT:=MAX;
end:

```

При указанных параметрах системы для значений элементов матрицы стоимости  $c_6=7$ ;  $c_5=4$ ;  $c_4=9$ ;  $c_3=3$ ;  $c_2=4$ ;  $c_1=5,6$  (таблица 2) максимум целевой функции составит величину  $Y_{\max}=376$  при значениях  $x_1=0$ ;  $x_2=20$ ;  $x_3=0$ ;  $x_4=15$ ;  $x_5=5$ ;  $x_6=20$ , а минимум целевой функции  $Y_{\min}=295$  получен при значениях  $x_1=0$ ;  $x_2=0$ ;  $x_3=20$ ;  $x_4=15$ ;  $x_5=25$ ;  $x_6=0$  (рисунок 1).

Помимо указанного, на рисунке 1 изображены траектории изменения максимума целевой функции при изменениях значений элементов матрицы  $b$ . При подстановке в целевую функцию  $x_i=b_i$  ( $i=1...6$ ), где  $b_i$  изменяется с шагом 1 в диапазоне  $[0...25]$ , максимум целевой функции меняет свое значение в интервале от  $Y_{\min}$  до  $Y_{\max}$ . На рисунке 2 изображены траектории изменения максимума целевой функции для той же системы уравнений.

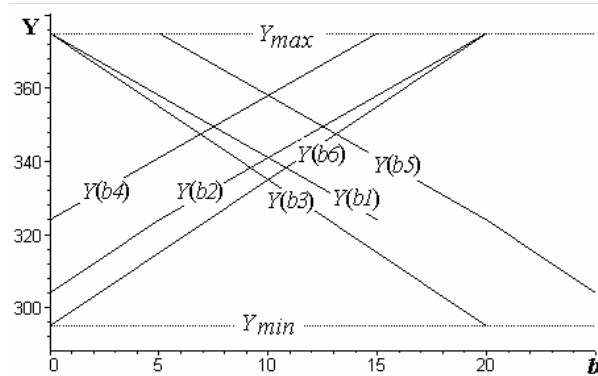


Рисунок 1 – Графики изменения максимума целевой функции

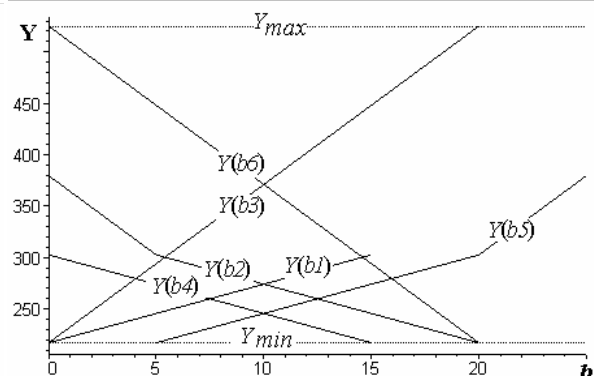


Рисунок 2 – Графики изменения минимума целевой функции

Для других значений элементов матрицы стоимости  $c_6=1,6$ ;  $c_5=12$ ;  $c_4=3$ ;  $c_3=9$ ;  $c_2=4$ ;  $c_1=0,7$  (таблица 2) максимум целевой функции составил величину  $Y_{\max}=525$  при значениях  $x_1=0$ ;  $x_2=0$ ;  $x_3=20$ ;  $x_4=15$ ;  $x_5=25$ ;  $x_6=0$ , а минимум целевой функции  $Y_{\min}=217$  получен при значениях  $x_1=0$ ;  $x_2=20$ ;  $x_3=0$ ;  $x_4=15$ ;  $x_5=5$ ;  $x_6=20$ , что изображено на рисунке 2. Кроме того, на рисунке 2 изображены траектории изменения минимума целевой функции при изменениях значений элементов матрицы  $b$  (таблица 3). При подстановке в целевую функцию  $x_i=b_i$  ( $i=1...6$ ), где  $b_i$  изменяется с шагом 1 в диапазоне  $[0...25]$ , минимум целевой функции меняет свое значение в интервале от  $Y_{\min}$  до  $Y_{\max}$ . На рисунке 2 также изображены траектории изменения минимума целевой функции для той же системы уравнений.

Таким образом, изменяя значения и число корректируемых базовых переменных можно изменять положение и величину экстремума целевой функции в фиксированном диапазоне.

Перспективы дальнейших исследований состоят в поиске подходов к обеспечению возможности оптимизации процессов и структур обслуживания.

#### Бibliографический список

1. Заварыкин В.М. Численные методы / В.М. Заварыкин, В.Г. Житомирский, М.П. Лапчик. — М.: Просвещение, 1990. — 176 с.
2. Математический пакет Maple V Release 4: Руководство пользователя / Г.В. Прохоров, В.В. Колбеев, К.И. Желнов, М.А. Леденев. — Калуга: Облиздат, 1998. — 200 с.
3. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE V R3/R4/R5 / В.П. Дьяконов. — М.: Изд-во «Солон», 1998. — 400 с.

Поступила в редакцию 1.03.2010 г.