

УДК 681.5.015.42

В.В. Захаров*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua***КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ ПРИ АСИММЕТРИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ**

Предлагается метод корреляционного параметрического синтеза в негауссовском приближении нелинейных дифференциальных систем управления с асимметрией плотности вероятности на основе детерминированных градиентных методов и способ его алгоритмизации. Метод основывается на матричной модели моментов до третьего порядка включительно нелинейной стохастической дифференциальной системы.

Ключевые слова: модель состояния, дисперсионная модель, асимметрия плотности вероятности, негауссовское приближение, полиномы Эрмита нескольких переменных, параметрическая оптимизация.

Введение. Статья посвящена новым результатам исследований в рамках направления, которое было определено в предшествующей публикации [1], и является естественным её продолжением. Направление связано с проблематикой корреляционного параметрического синтеза стохастических многомерных нелинейных дифференциальных систем управления на основе дисперсионной дифференциальной модели (ДДМ) при негауссовском приближении распределения вероятностей $(n \times 1)$ -вектора x_t её модели состояния с сосредоточенными параметрами в форме дифференциального уравнения Ито [4]

$$\frac{d}{dt} x_t = A_t x_t + B_t f[x_t, t] + C_t \omega_t + \Xi_t v_t. \quad (1)$$

Принципиально точные уравнения математического ожидания (МО) $m_t = E\{x_t\}$ и дисперсионной матрицы (ДМ) $D_t = E\{x_t^0 [x_t^0]^T\}$ модели ДДМ определены в [2] как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_t &= A_t m_t + B_t \bar{f} + \Xi_t v_t, \quad m_{t_0} = m_0, \\ \frac{d}{dt} D_t &= R + R^T + W, \quad D_{t_0} = D_0, \quad t \in [t_0, t_F], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\bar{f} = E\{f[x_t, t]\}, \quad R = A_t D_t + B_t \bar{R}, \quad \bar{R} = E\{f[x_t, t][x_t^0]^T\} \cong F + K D_t, \quad (3)$$

$W = C_t Q_t C_t^T$, $x_t^0 = x_t - m_t$. Здесь и далее A_t, B_t, C_t, Ξ_t – матричные коэффициенты соответствующих размеров; $f[x_t, t]$, v_t и ω_t – векторные нелинейная детерминированная функция, детерминированное возмущение и гауссовский белый шум [3] интенсивности $Q_t = E\{\omega_t \omega_t^T\}$ соответственно; символы E и T – МО и транспонирование матрицы соответственно, а индексом t обозначена соответствующая функциональная зависимость.

В [1] стали предметом рассмотрения и обсуждения первые полученные результаты для частной постановки задачи синтеза, предполагающей симметрию плотности вероятности $p(x_t)$ и, следовательно, равенство нулю всех центральных моментов третьего порядка компонентов вектора состояния x_t . В этом случае плотность вероятности $p(x_t)$ негауссовского распределения x_t будет либо островершинной, либо плосковершинной по сравнению с гауссовской. Заметим, что такое предположение оправдано для большого числа непрерывных систем управления, нелинейности модели (1) которых – нечётные функции, а возмущение $C_t \omega_t + \Xi_t v_t$ модели – центрированное.

Целью статьи является рассмотрение проблематики параметрической оптимизации стохастических нелинейных дифференциальных систем при асимметрии плотности вероятности на основе детерминированных градиентных методов и предложенного в [2] соответствующего варианта дифференциальной дисперсионной модели (ДДМ) в негауссовском приближении, а также получение матричных уравнений для частных производных моментов и описание эффективного способа алгоритмизации их численного решения.

1. ДДМ при асимметрии $p(x_t)$. От гауссовской $p(x_t)$ может отличаться не островершинным либо плосковершинным характером её кривой, а асимметрией. Известно [3], что степень такого отличия

случайного многомерного процесса от гауссовского характеризуют величины вероятностных моментов третьего порядка его компонентов. Такой вариант ДДМ предложен в [2]. В этом случае аналитические представления элементов (3) описания (2) через центральные моменты третьего порядка компонентов вектора x_t , коэффициенты статистической линеаризации в гауссовском приближении $\bar{f}_z$ функции $f[x_t, t]$ и их частные производные $\bar{f}_z^{[v]} = \frac{\partial^{\sigma[v]}}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} \bar{f}_z$ по компонентам вектора m_t принимают вид

$$\bar{f} \cong \bar{f}_z + \sum_{\sigma[v]=3} m_v \bar{f}_z^{[v]} / \Pi[v!],$$

$$F = \sum_{i=1}^n \{e_i^T \otimes \sum_{\sigma[v]=2} m_{v+i} \bar{f}_z^{[v]} / \Pi[v!]\}, \quad (4)$$

$$K = K_z + \sum_{\sigma[v]=3} m_v K_z^{[v]} / \Pi[v!], \quad K_z = \frac{\partial}{\partial m} \bar{f}_z, \quad K_z^{[v]} = \frac{\partial^{\sigma[v]}}{\partial m_1^{v_1} \dots \partial m_n^{v_n}} K_z.$$

Здесь $v_{+i} = v + e_i$, $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ – векторные индексы, e_i – единичный $(n \times 1)$ -вектор,

$\Pi[v!] = \prod_{i=1}^n (v_i!)$, а $m_v = E \{ \prod_{i=1}^n [x_i^0]^{v_i} \}$ – центральный момент порядка $\sigma[v] = \sum_{i=1}^n v_i$ [3].

Коэффициенты представлений (4) – центральные моменты третьего порядка компонентов x_t . Матрица центральных моментов третьего порядка M_3 вектора состояния x_t стохастической модели (1) определена в [2] как блочная $(n \times n^2)$ -матрица

$$M_3 = \sum_{k=1}^n \{e_k^T \otimes M_k\}, \quad (5)$$

а уравнение её k -ого $(n \times n)$ -матричного блока $M_k = E \{x_t^0 [x_t^0]^T x_{k_t}^0\}$ – как

$$\frac{d}{dt} M_k = R_k + R_k^T + \sum_{i=1}^n \{e_i \otimes [e_k^T R_i]\}, \quad (6)$$

где e_μ – единичный $(n \times 1)$ -вектор, $R_\mu = A_t M_\mu + B_t \bar{R}_\mu$, $\bar{R}_\mu \cong F_\mu + K_\mu D_t$, $\mu \in \{k, i\}$. Аналитические представления матричных коэффициентов F_μ , K_μ через центральные моменты третьего порядка компонентов вектора x_t , коэффициенты статистической линеаризации в гауссовском приближении векторной функции $f[x_t, t]$ и их частные производные по компонентам вектора m_t приведены в [2]:

$$F_\mu = \sum_{j=1}^n d_{j\mu} \frac{\partial F}{\partial m_j} + \sum_{i=1}^n \{e_i^T \otimes \sum_{\sigma[v]=1} m_{v+i+\mu} \bar{f}_z^{[v]} / \Pi[v!]\},$$

$$K_\mu = \sum_{j=1}^n d_{j\mu} \frac{\partial K}{\partial m_j} + \sum_{\sigma[v]=2} m_{v+\mu} K_z^{[v]} / \Pi[v!]. \quad (7)$$

Здесь $d_{j\mu} = e_j D_t e_\mu$, $v_{+i+\mu} = v + e_i + e_\mu$, а F и K определены в (4). Таким образом, уравнения (2), (5), (6) образуют замкнутую систему – вариант ДДМ в негауссовском приближении для асимметричной плотности вероятности вектора состояния x_t .

2. Критерий оптимальности и его градиент. Параметрическая оптимизация на основе детерминированных градиентных методов предполагает на каждой итерации вычисление градиента

$\nabla J = \sum_{\lambda=1}^{n_p} e_\lambda^T \otimes \frac{\partial}{\partial p_\lambda} J$ критерия оптимальности J по вектору некоторых параметров $p = \sum_{\lambda=1}^{n_p} e_\lambda p_\lambda$, от

которых зависят все или некоторые матричные коэффициенты A_t , B_t , C_t , Ξ_t модели (1). Заметим, что для большинства приложений этими параметрами будут просто некоторые коэффициенты (или один коэффициент) одной или нескольких из этих матриц.

Для корреляционного синтеза J и ∇J не зависят от варианта негауссовского приближения плотности вероятности $p(x_t)$ модели (1) и определены в [1]

$$J = J_1 + J_2, \quad J_1 = \text{tr}[G_{t_F} D_{t_F}] + \int_{t_0}^{t_F} \text{tr}[G_t D_t] dt, \quad J_2 = \text{tr}[G_{t_F} M_{t_F}] + \int_{t_0}^{t_F} \text{tr}[G_t M_t] dt, \quad (8)$$

$$\dot{J}_1 = \text{tr}[G_{t_F} \dot{D}_{t_F}] + \int_{t_0}^{t_F} \text{tr}[G_t \dot{D}_t] dt, \quad \dot{J}_2 = \text{tr}[G_{t_F} \dot{M}_{t_F}] + \int_{t_0}^{t_F} \text{tr}[G_t \dot{M}_t] dt, \quad (9)$$

где G_t, G_{t_F} – симметрические весовые матричные коэффициенты; tr – след квадратной матрицы [4]; $M_t = m_t m_t^T$; $\dot{J}_1 = \frac{\partial}{\partial p_\lambda} J_1$; $\dot{J}_2 = \frac{\partial}{\partial p_\lambda} J_2$; $\dot{D}_t = \frac{\partial}{\partial p_\lambda} D_t$; $\dot{M}_t = \frac{\partial}{\partial p_\lambda} M_t = \dot{m}_t m_t^T + \{\dot{m}_t m_t^T\}^T$; $\dot{m}_t = \frac{\partial}{\partial p_\lambda} m_t$, а символ $(\cdot)$ в качестве верхнего индекса и далее будет обозначать частную производную по параметру p_λ .

3. Матричные уравнения $\dot{m}_t$ и $\dot{D}_t$. Из (9) следует, что на каждой итерации для вычисления $\dot{J}_1, \dot{J}_2$ помимо уравнений ДДМ в негауссовском приближении необходимо решать в постановке задачи Коши дифференциальные уравнения частных производных МО $\dot{m}_t$ и ДМ $\dot{D}_t$, полученные и приведенные в [2]. Элементы $\dot{f}$ правой части уравнения $\dot{m}_t$ и $\dot{F}, \dot{K}$ линеаризованного представления составляющей $\dot{R}^2 = B_t(\dot{F} + \dot{K}D_t)$ правой части уравнения $\dot{D}_t$ в случае асимметрии $p(x_t)$ определяются как

$$\dot{f} \cong \dot{f}_z + \sum_{\sigma[v]=3} (\dot{m}_v \bar{f}_z^{[v]} + m_v \dot{f}_z^{[v]}) / \Pi[v!], \quad (10)$$

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^n \{e_i^T \otimes [\sum_{\sigma[v]=2} (\dot{m}_{v+i} \bar{f}_z^{[v]} + m_{v+i} \dot{f}_z^{[v]}) / \Pi[v!]]\}, \quad (11)$$

$$\dot{K} = \dot{K}_z + \sum_{\sigma[v]=3} (\dot{m}_v K_z^{[v]} + m_v [\dot{K}_z^{[v]}]) / \Pi[v!].$$

Из соотношений (10), (11) следует, что для вычисления $\dot{m}_t, \dot{D}_t$ в (9) необходимо совместное решение помимо уравнений ДДМ (2), $\dot{m}_t, \dot{D}_t$ и уравнений частных производных $\dot{M}_k, k = \overline{1, n}$ блоков M_k по параметрам p_λ .

4. Вычисление правых частей уравнений ДДМ (2), $M_k, \dot{m}_t, \dot{D}_t$. В [1] и [2] предложены эффективные алгоритмы вычисления матричных составляющих правых частей уравнений $\dot{m}_t, \dot{D}_t$ и ДДМ (2), M_k соответственно при их численном интегрировании на основе скалярных представлений составляющих правой части уравнения (1)

$$r_A = A_t x_t, \quad r_B = B_t \tilde{f}, \quad r_C = C_t \omega_t, \quad r_\Xi = \Xi_t v_t \quad (12)$$

и составляющих

$$r_{\dot{A}} = \dot{A}_t x_t, \quad r_{\dot{B}} = \dot{B}_t \tilde{f}, \quad r_{\dot{C}} = \dot{C}_t \omega_t, \quad r_{\dot{\Xi}} = \dot{\Xi}_t v_t, \quad r_{\dot{A}} = A_t \dot{x}_t, \quad r_{\dot{B}} = B_t \dot{f}, \quad r'_{\dot{B}} = B_t f' \quad (13)$$

правой части линеаризованного уравнения

$$\frac{d}{dt} \dot{x}_t = \dot{A}_t x_t + \dot{B}_t f[x_t, t] + \dot{C}_t \omega_t + \dot{\Xi}_t v_t + A_t \dot{x}_t + B_t \dot{f}[x_t, t], \quad (14)$$

получаемого в результате дифференцирования (1) по параметру p_λ . При этом формирование $r_B = B_t \tilde{f}$ и $r_{\dot{B}} = \dot{B}_t \tilde{f}$ сводится лишь к формальной замене каждого из ненулевых скалярных компонентов $f[x_j, j \in \mathfrak{S}_{\tilde{n}}]$ функции $f[x_t, t]$ его линеаризованным представлением вида

$$\tilde{f}_1 = \bar{f}, \quad \tilde{f}_2 = f_i + \sum_{j \in \mathfrak{S}_{\tilde{n}}} k_j x_j \quad \text{или} \quad \tilde{f}_3 = f_i^\mu + \sum_{j \in \mathfrak{S}_{\tilde{n}}} k_j^\mu x_j, \quad (15)$$

$r'_{\dot{B}} = B_t f'$ – его линеаризованным представлением

$$f'_2 = \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} k_j x_j, \quad (16)$$

а $\dot{r}_B = B_t \dot{f}$ – каждого из ненулевых скалярных компонентов $\dot{f}[x_j, j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}]$ функции $\dot{f}[x_t, t]$ представлением вида

$$\dot{f}_1 = \dot{\tilde{f}} \text{ или } \dot{f}_2 = \dot{f}_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} \dot{k}_j x_j, \quad (17)$$

где $\mathcal{S}_{\tilde{n}} \subseteq \mathcal{S}_n$ – подмножество размером $\tilde{n}$ множества $\mathcal{S}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ индексов компонентов вектора состояния x_t , составляющих векторный аргумент функции; $\mu = \overline{1, n}$. Представления $\tilde{f}_1, \dot{f}_1, \tilde{f}_2$ и $f'_2, \dot{f}_2$ определяют способ линеаризации для уравнений $m_t, \dot{m}_t, D_t$ и $\dot{D}_t$ соответственно, $\tilde{f}_3$ – для уравнения M_k , а $i = \overline{1, n}$ – номер этапа процедуры вычисления по столбцам матричных составляющих правых частей уравнений $D_t, \dot{D}_t, M_k$.

Формулы для коэффициентов $\tilde{f}, f_i, k_j, f_i^\mu, k_j^\mu$ представлений (15), (16) приведены в [2], для коэффициентов $\dot{\tilde{f}}, \dot{f}_i, \dot{k}_j$ (16) – в [1]. Они получены из $\tilde{f}, F, K$ (4), F_μ, K_μ (7) и $\dot{\tilde{f}}$ (10), $\dot{F}, \dot{K}$ (11) соответственно с учётом структуры множества $\mathcal{S}_{\tilde{n}}$.

5. Уравнение блока $\dot{M}_k$. Уравнение получим, продифференцировав (6) по компоненту p_λ в виде

$$\frac{d}{dt} \dot{M}_k = \dot{R}_k + \dot{R}_k^T + \sum_{i=1}^n \{e_i \otimes [e_k^T \dot{R}_i]\}, \quad (18)$$

где $\dot{R}_\mu = \dot{A}_t M_\mu + A_t \dot{M}_\mu + \dot{B}_t \bar{R}_\mu + B_t \dot{\bar{R}}_\mu, \quad \dot{\bar{R}}_\mu = \dot{F}_\mu + \dot{K}_\mu D_t + K_\mu \dot{D}_t, \quad \mu \in \{k, i\}$. Для эффективной алгоритмизации полученное представление $\dot{R}_\mu$ запишем как $\dot{R}_\mu = \sum_{i=1}^4 \dot{R}_\mu^i$, где

$$\dot{R}_\mu^1 = \dot{A}_t M_\mu + \dot{B}_t \bar{R}_\mu, \quad \dot{R}_\mu^2 = B_t (\dot{F}_\mu + \dot{K}_\mu D_t), \quad \dot{R}_\mu^3 = A_t \dot{M}_\mu, \quad \dot{R}_\mu^4 = B_t K_\mu \dot{D}_t. \quad (19)$$

Матричные коэффициенты $\dot{F}_\mu, \dot{K}_\mu$ линеаризованного относительно D_t и $\dot{D}_t$ представления $\dot{\bar{R}}_\mu$ в силу (7) определяются как

$$\dot{F}_\mu = \sum_{j=1}^n (\dot{d}_{j\mu} \frac{\partial F}{\partial m_j} + d_{j\mu} \frac{\partial \dot{F}}{\partial m_j}) + \sum_{i=1}^n \{e_i^T \otimes [\sum_{\sigma[v]=1} (\dot{m}_{v+i+\mu} \tilde{f}_e^{[v]} + m_{v+i+\mu} \dot{\tilde{f}}_e^{[v]}) / \Pi[v!]]\}, \quad (20)$$

$$\dot{K}_\mu = \sum_{i=1}^n (\dot{d}_{i\mu} \frac{\partial K}{\partial m_i} + d_{i\mu} \frac{\partial \dot{K}}{\partial m_i}) + \sum_{\sigma[v]=2} (\dot{m}_{v+\mu} K_e^{[v]} + m_{v+\mu} \dot{K}_e^{[v]}).$$

6. Вычисление правой части уравнения $\dot{M}_k$. Матричные составляющие $\dot{R}_\mu$ уравнений $\dot{M}_k$ (18) также целесообразно вычислять на основе скалярных представлений составляющих (12). При этом скалярная форма позволяет исключить умножение на нулевые компоненты как матриц коэффициентов A_t, B_t модели (13), так и матричных коэффициентов $\dot{F}_\mu, \dot{K}_\mu$ линеаризованных представлений $\dot{R}_\mu^1, \dot{R}_\mu^2, \dot{R}_\mu^3$ (19). В результате вычисление $\dot{R}_\mu^1$ удаётся свести к вычислению скалярных представлений составляющих $r_A = \dot{A}_t x_t$ и $r_B = \dot{B}_t \tilde{f}$, $\dot{R}_\mu^2$ – составляющей $\dot{r}_B = B_t \dot{f}$, $\dot{R}_\mu^3$ – $r_A = A_t \dot{x}_t$, а $\dot{R}_\mu^4$ – составляющей $r'_B = B_t f'$. Вариант линеаризации $\tilde{f}$ ненулевых компонентов $f[x_t, t]$ определен в (15) как $\tilde{f}_3$, вариант f' – представлением

$$f'_3 = \sum_{j \in \mathcal{S}_{\tilde{n}}} k_j^\mu x_j, \quad (21)$$

а вариант линеаризации $\dot{f}$ ненулевых компонентов $\dot{f}[x_t, t]$ – как

$$\dot{f}_3 = \dot{f}_i^\mu + \sum_{j \in \mathcal{Z}_{\tilde{n}}} \dot{k}_j^\mu x_j. \quad (22)$$

Формулы коэффициентов $\dot{f}_i^\mu$, $\dot{k}_j^\mu$ получаются из $\dot{F}_\mu$, $\dot{K}_\mu$ (20) соответственно с учётом структуры множества $\mathcal{Z}_{\tilde{n}}$.

Из представлений (20) следует, что вид формул коэффициентов $\dot{f}_i^\mu$, $\dot{k}_j^\mu$ не зависит от вида нелинейной функции $f[x_j, j \in \mathcal{Z}_{\tilde{n}}]$ и параметра p_λ , а определяется лишь размером множества $\mathcal{Z}_{\tilde{n}}$. Очевидно, что для большинства приложений потребуются варианты формул, соответствующие нелинейной функции одного, двух, максимум трёх скалярных аргументов ($\tilde{n} = 1, 2, 3$).

При этом представления для входящих в формулы частных производных по компонентам вектора МО m_t и параметрам p_λ получаются в результате дифференцирования известных аналитических представлений коэффициентов статистической линеаризации в гауссовском приближении типовых нелинейностей [3].

Формулы для коэффициентов $\dot{f}$, $\dot{f}_i$, $\dot{k}_j$ и $\dot{f}_i^\mu$, $\dot{k}_j^\mu$ скалярной функции $f[x_j, j \in \mathcal{Z}_{\tilde{n}}]$ одного, двух и трёх скалярных аргументов будут приведены в другой работе. Сейчас же, в качестве примера, получим представления этих коэффициентов линеаризованных приближений нелинейной функции $f[x_j]$ одного аргумента $x_j, j \in \mathcal{Z}_n$.

7. Коэффициенты $\dot{f}_i^\mu$, $\dot{k}_j^\mu$ нелинейной функции $f[x_j]$. В силу справедливых в этом случае равенств

$$\tilde{v} = v_j e_j, \quad \sigma[\tilde{v}] = v_j, \quad \bar{f}_z^{[\tilde{v}]} = \bar{f}_z^{(v_j)}, \quad \Pi[\tilde{v}] = v_j! \quad (23)$$

формулы для коэффициентов $\dot{f}_i^\mu$, $\dot{k}_j^\mu$ получаются из (20) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{f}_i^\mu &= \alpha_{i3}^\mu \bar{f}_z^{(3)} + \alpha_{i1}^\mu \bar{f}_z^{(1)} + \alpha_{i3}^\mu \dot{\bar{f}}_z^{(3)} + \alpha_{i1}^\mu \dot{\bar{f}}_z^{(1)}, \\ \dot{k}_j^\mu &= \beta_{j5}^\mu \bar{f}_z^{(5)} + \beta_{j3}^\mu \bar{f}_z^{(3)} + \beta_{j2}^\mu \bar{f}_z^{(2)} + \beta_{j5}^\mu \dot{\bar{f}}_z^{(5)} + \beta_{j3}^\mu \dot{\bar{f}}_z^{(3)} + \beta_{j2}^\mu \dot{\bar{f}}_z^{(2)}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\alpha_{i3}^\mu = \frac{1}{2}(\dot{d}_{j\mu} m_{jji} + d_{j\mu} \dot{m}_{jji})$, $\alpha_{i1}^\mu = \dot{m}_{ji\mu}$, $\alpha_{i3}^\mu = \frac{1}{2} d_{j\mu} m_{jji}$, $\alpha_{i1}^\mu = m_{ji\mu}$, $\beta_{j5}^\mu = \frac{1}{6}(\dot{d}_{j\mu} m_{jjj} + d_{j\mu} \dot{m}_{jjj})$, $\beta_{j3}^\mu = \frac{1}{2} \dot{m}_{jj\mu}$, $\beta_{j2}^\mu = \dot{d}_{j\mu}$, $\beta_{j5}^\mu = \frac{1}{6} d_{j\mu} m_{jjj}$, $\beta_{j3}^\mu = \frac{1}{2} m_{jj\mu}$, $\beta_{j2}^\mu = d_{j\mu}$,

а $m_{ji\mu} = e_j^T M_\mu e_i$, $\dot{m}_{ji\mu} = e_j^T \dot{M}_\mu e_i$.

8. Коэффициенты $\dot{f}$, $\dot{f}_i$, $\dot{k}_j$ нелинейной функции $f[x_j]$. Формулы для коэффициентов $\dot{f}$, $\dot{f}_i$, $\dot{k}_j$ в силу (10), (11) и те же равенств (23) определяются в виде:

$$\dot{f} \cong \dot{\bar{f}}_z + \beta_j \bar{f}_z^{(3)} + \beta_j \dot{\bar{f}}_z^{(3)}, \quad \dot{f}_i = \dot{\alpha}_i \bar{f}_z^{(2)} + \alpha_i \dot{\bar{f}}_z^{(2)}, \quad \dot{k}_j = \dot{\bar{f}}_z^{(1)} + \beta_j \bar{f}_z^{(4)} + \beta_j \dot{\bar{f}}_z^{(4)}, \quad (25)$$

где $\beta_j = \frac{1}{6} \dot{m}_{jjj}$, $\beta_j = \frac{1}{6} m_{jjj}$, $\dot{\alpha}_i = \frac{1}{2} \dot{m}_{jji}$, $\alpha_i = \frac{1}{2} m_{jji}$.

9. Коэффициенты $\bar{f}$, f_i , k_j , f_i^μ , k_j^μ нелинейной функции $f[x_j]$. Для рассмотрения примера реализации предложенного метода понадобятся представления и для этих коэффициентов, полученные в [2]:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \bar{f}_z + \beta_j \bar{f}_z^{(3)}, \quad f_i = \alpha_i \bar{f}_z^{(2)}, \quad k_j = \bar{f}_z^{(1)} + \beta_j \bar{f}_z^{(4)}, \\ f_i^\mu &= \alpha_{i3}^\mu \bar{f}_z^{(3)} + \alpha_{i1}^\mu \bar{f}_z^{(1)}, \quad k_j^\mu = \beta_{j5}^\mu \bar{f}_z^{(5)} + \beta_{j3}^\mu \bar{f}_z^{(3)} + \beta_{j2}^\mu \bar{f}_z^{(2)}. \end{aligned} \quad (26)$$

10. Пример. Рассмотрим основные аспекты реализации предложенного в работе метода корреляционного синтеза в негауссовском приближении для параметризации регулятора системы автоматического управления необратимой двухступенчатой химической реакцией $R_1 \xrightarrow{2} R_2 \xrightarrow{\frac{1}{2}} R$, происходящей в изотермическом химическом реакторе с постоянным перемешиванием реагентов. Реакция $R_1 \rightarrow R_2$ имеет порядок 2, реакция $R_2 \rightarrow R$ – порядок $\frac{1}{2}$. Модель состояния изотермической

химической реакции после введения безразмерных переменных принимает вид системы обыкновенных стохастических нелинейных стационарных дифференциальных уравнений [5]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_{1t} = -x_{1t} - D_1 x_{1t}^2 + u_{1t} + \omega_{1t} \\ \frac{d}{dt} x_{2t} = D_1 x_{1t}^2 - x_{2t} - D_2 x_{2t}^{\frac{1}{2}} + u_{2t} + \omega_{2t} \end{cases}, \quad (27)$$

где x_{1t}, x_{2t} и u_{1t}, u_{2t} – безразмерные концентрации реагентов R_1, R_2 на выходе и входе соответственно, суть неотрицательные величины, причём по определению $0 \leq x_{1t} \leq 1, 0 \leq x_{2t} \leq 1$; D_1 и D_2 – числа Дамкелера, соответствующие первой и второй ступеням реакции соответственно; ω_{1t}, ω_{2t} – случайные возмущения, обуславливающие отклонения безразмерных концентраций x_{1t}, x_{2t} от заданных значений, суть независимые гауссовские белые шумы с нулевыми средними и интенсивностями $q_1 = E\{\omega_{1t}^2\}, q_2 = E\{\omega_{2t}^2\}$ соответственно. Как и прежде индексом t обозначена соответствующая функциональная зависимость.

Модель (27) соответствует предположению о возможности измерения обоих координат её вектора состояния – концентраций x_{1t}, x_{2t} , а характер нелинейностей $x_{1t}^2, x_{2t}^{\frac{1}{2}}$ модели обуславливает асимметрию совместной плотности вероятности $p(x_{1t}, x_{2t})$.

Задача регулирования процесса в изотермическом химическом реакторе с постоянным перемешиванием состоит в поддержании выходных концентраций x_{1t}, x_{2t} на заданных уровнях $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ с помощью изменения входные концентрации u_{1t}, u_{2t} реагентов R_1, R_2 соответственно. Оптимизируемые параметры $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ – коэффициенты структурно заданного пропорционального регулятора $u_{1t} = -(k_{11}\tilde{x}_{1t} + k_{12}\tilde{x}_{2t}), u_{2t} = -(k_{21}\tilde{x}_{1t} + k_{22}\tilde{x}_{2t})$, критерий –

$$J = E \int_{t_0}^{t_f} \{\tilde{x}_{1t}^2 + \alpha \tilde{x}_{2t}^2 + \beta u_{2t}^2\} dt, \quad (28)$$

где $\tilde{x}_{it} = x_{it} - \bar{x}_i, i = \overline{1,2}$; α, β – весовые коэффициенты. Параметризация регулятора выполняется с учётом двух дополнительных ограничений: $0 \leq u_{1t} \leq 2$ и $0 \leq u_{2t} \leq 1$. Включение последнего слагаемого в подынтегральное выражение критерия (28) обусловлено высокой стоимостью подачи в реактор реагента R_2 .

Критерий (8) с учётом $\tilde{x}_{it} = x_{it}^0 + m_{it} - \bar{x}_i, i = 1,2$ для системы (27) определится как

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{(1 + \beta k_{21}^2)(d_{11} + \tilde{m}_1^2) + (\alpha + \beta k_{22}^2)(d_{22} + \tilde{m}_2^2) + 2\beta k_{21}k_{22}(d_{12} + \tilde{m}_1\tilde{m}_2)\} dt,$$

где $\tilde{m}_i = m_{it} - \bar{x}_i, i = 1,2$.

Скалярные представления равенств (12) для вычисления матричных правых частей при численном интегрировании уравнений (2), (6) для системы (27) принимают вид:

$$\begin{cases} r_1^A = (k_{11} - 1)x_{1t} + k_{12}x_{2t} \\ r_2^A = k_{21}x_{1t} + (k_{22} - 1)x_{2t} \end{cases}, \quad \begin{cases} r_1^B = -D_1\tilde{f}_t \\ r_2^B = D_1\tilde{f}_t - D_2\tilde{\phi}_t \end{cases}, \quad \begin{cases} r_1^C = \omega_{1t} \\ r_2^C = \omega_{2t} \end{cases}, \quad \begin{cases} r_1^E = 0 \\ r_2^E = 0 \end{cases},$$

где $\tilde{f}_t = \bar{f} \cup (f_i + k_1 x_{1t}) \cup (f_i^\mu + k_1^\mu x_{1t}), \tilde{\phi}_t = \bar{\phi} \cup (\phi_i + \kappa_1 x_{1t}) \cup (\phi_i^\mu + \kappa_1^\mu x_{1t}),$ а $\bar{f}, f_i, k_1, f_i^\mu, k_1^\mu, \bar{\phi}, \phi_i, \kappa_1, \phi_i^\mu, \kappa_1^\mu$ определены в (26). При этом гауссовские составляющие представлений (26) для нелинейности $f(x_{1t}) = x_{1t}^2$ системы (27) определяются как

$$\bar{f}_e = m_{1t}^2 + d_{11t}, \bar{f}_e^{(1)} = 2m_{1t}, \bar{f}_e^{(2)} = 2, \bar{f}_e^{(i)} = 0, i = 3,4,5, \quad (29)$$

а нелинейности $\phi(x_{2t}) = x_{2t}^{\frac{1}{2}}$ – в виде

$$\bar{\phi}_e = (m_2^2 - d_{22})^{\frac{1}{4}}, \bar{\phi}_e^{(1)} = \lambda_3 m_2, \bar{\phi}_e^{(2)} = \lambda_3 - \lambda_7 m_2^2, \bar{\phi}_e^{(3)} = -3\lambda_7 m_2 + \lambda_{11} m_2^3, \quad (30)$$

$$\bar{\phi}_e^{(4)} = -3\lambda_7 + 6\lambda_{11}m_2^3 - \lambda_{13}m_2^4, \quad \bar{\phi}_e^{(5)} = 15\lambda_{11}m_2 - (4\lambda_{13} + \lambda_{15})m_2^3 + \lambda_{17}m_2^5.$$

Здесь

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\bar{\phi}_e^{-3}, \quad \lambda_7 = \frac{3}{4}\bar{\phi}_e^{-7}, \quad \lambda_{11} = \frac{21}{8}\bar{\phi}_e^{-11}, \quad \lambda_{13} = \frac{231}{16}\bar{\phi}_e^{-13}, \quad \lambda_{15} = \frac{693}{8}\bar{\phi}_e^{-15}, \quad \lambda_{17} = \frac{3003}{32}\bar{\phi}_e^{-17}. \quad (31)$$

Представление коэффициента $\bar{f}_e$ (29) статистической линеаризации по методу Казакова нелинейности $f(y) = y^2$, $y \geq 0$ приведено в [3]. Представление $\bar{\phi}_e$ (30) функции $\phi(y) = y^{\frac{1}{2}}$, $y \geq 0$ получается на основе двух равенств: $m_y = \bar{\phi}_e^2 + D_\phi$ и $D_y = k_e^2 D_\phi$. Здесь $k_e^2 = 2(D_\phi + 2\bar{\phi}_e^2)$ – квадрат коэффициента статистической линеаризации нелинейности $y = \phi^2$, соответствующий критерию равенства дисперсий функции y и её вероятностной аппроксимации $\tilde{y} = E\{\phi^2\} + k_e(\phi - \bar{\phi})$, а $D_\phi = E\{(\phi - \bar{\phi})^2\}$ – одно из вещественных решений квадратного уравнения $D_\phi^2 + 2\bar{\phi}_e^2 D_\phi - \frac{1}{2} D_y = 0$, т.к. дискриминант $\bar{\phi}_e^4 + \frac{1}{2} D_y \geq 0$. Оба равенства получаются из одного представления $y = \phi^2$ функции, обратной $\phi = y^{\frac{1}{2}}$.

Скалярные представления равенств (13) для вычисления матричных правых частей при численном интегрировании уравнений $\dot{m}_t$, $\dot{D}_t$ [2] и $\dot{M}_k$ (18) для системы (27) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{r}_1^A = \dot{k}_{11}x_1 + \dot{k}_{12}x_2, \\ \dot{r}_2^A = \dot{k}_{21}x_1 + \dot{k}_{22}x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r}_1^B = -D_1\tilde{f} \\ \dot{r}_2^B = D_1\tilde{f} - D_2\tilde{\phi} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{r}_1'^B = -D_1\dot{k}_1x_1 \\ \dot{r}_2'^B = D_1\dot{k}_1x_1 - D_2\dot{k}_2x_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dot{r}_1^B = 0 \\ \dot{r}_2^B = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{r}_1^C = 0 \\ \dot{r}_2^C = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{r}_1^{\dot{}} = 0 \\ \dot{r}_2^{\dot{}} = 0 \end{cases},$$

где $\tilde{f} = \dot{f} \cup (\dot{f}_i + \dot{k}_1x_1) \cup (\dot{f}_i^\mu + \dot{k}_1^\mu x_1)$, $\tilde{\phi} = \dot{\phi} \cup (\dot{\phi}_i + \dot{k}_2x_2) \cup (\dot{\phi}_i^\mu + \dot{k}_2^\mu x_2)$, а $\dot{f}, \dot{f}_i, \dot{k}_1, \dot{\phi}, \dot{\phi}_i, \dot{k}_2$ и $\dot{f}_i^\mu, \dot{k}_1^\mu, \dot{\phi}_i^\mu, \dot{k}_2^\mu$ определены соотношениями (25), (24) соответственно. Для системы (27) их гауссовские составляющие определяются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{f}_e &= 2m_1\dot{m}_1 + \dot{d}_{11}, \quad \dot{f}_e^{(1)} = 2\dot{m}_1, \quad \dot{f}_e^{(i)} = 0, \quad i = \overline{2,5}, \\ \dot{\phi}_e &= \frac{1}{4}\bar{\phi}_e^{-3}(2m_2\dot{m}_2 - \dot{d}_{22}), \quad \dot{\phi}_e^{(1)} = \dot{\lambda}_3m_2 + \lambda_3\dot{m}_2, \quad \dot{\phi}_e^{(2)} = \dot{\lambda}_3 - \dot{\lambda}_7m_2^2 - \lambda_72m_2\dot{m}_2, \\ \dot{\phi}_e^{(3)} &= -3\dot{\lambda}_7m_2 - 3\lambda_7\dot{m}_2 + \dot{\lambda}_{11}m_2^3 + 3\lambda_{11}m_2^2\dot{m}_2, \\ \dot{\phi}_e^{(4)} &= -3\dot{\lambda}_7 + 6\dot{\lambda}_{11}m_2^3 + 18\lambda_{11}m_2^2\dot{m}_2 - \dot{\lambda}_{13}m_2^4 - 4\lambda_{13}m_2^3\dot{m}_2, \\ \dot{\phi}_e^{(5)} &= 15(\dot{\lambda}_{11}m_2 + \lambda_{11}\dot{m}_2) - (4\dot{\lambda}_{13} + \dot{\lambda}_{15})m_2^3 - 3(4\lambda_{13} + \lambda_{15})m_2^2\dot{m}_2 + \dot{\lambda}_{17}m_2^5 + 5\lambda_{17}m_2^4\dot{m}_2. \end{aligned}$$

Здесь $\dot{\lambda}_3 = -\frac{3}{2}\bar{\phi}_e^{-4}\dot{\phi}_e$, $\dot{\lambda}_7 = -\frac{21}{4}\bar{\phi}_e^{-8}\dot{\phi}_e$, $\dot{\lambda}_{11} = -\frac{231}{8}\bar{\phi}_e^{-12}\dot{\phi}_e$, $\dot{\lambda}_{13} = -\frac{3003}{16}\bar{\phi}_e^{-14}\dot{\phi}_e$, $\dot{\lambda}_{15} = -\frac{10395}{8}\bar{\phi}_e^{-16}\dot{\phi}_e$, $\dot{\lambda}_{17} = -\frac{51051}{32}\bar{\phi}_e^{-18}\dot{\phi}_e$, а $\lambda_3, \lambda_7, \lambda_{11}, \lambda_{13}, \lambda_{15}, \lambda_{17}$ определены в (31).

Реализация предложенного метода корреляционного синтеза для параметризации регулятора стационарной системы (27) при критерии (28) была выполнена на базе пакета MatLab при следующих значениях параметров модели (27): $D_1 = 1$, $D_2 = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\bar{x}_1 = 0,618$, $\bar{x}_2 = 0,0308$, $q_1 = 0$, $q_2 = 4 \cdot 10^{-4}$. Рассматривался следующий вариант постановки задачи Коши решения системы (27): $x_{1t_0} = 0$, $x_{2t_0} = 0$. В результате оптимальные значения параметров регулятора определились как $k_{11} = 4,10$, $k_{12} = 0,35$, $k_{21} = 0,21$, $k_{22} = 2,80$. Следует отметить, что эти значения параметров близки к полученным на основе упрощённого уравнения ФПК [3] для установившегося режима стационарной системы (27): $k_{11} = 3,85$, $k_{12} = 0,39$, $k_{21} = 0,22$, $k_{22} = 2,61$. В противоположность этому, параметризация системы (27) на основе гауссовского приближения приводит к значительно отличающимся значениям параметров $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ регулятора. Заметим, что это полностью согласуется с результатами при корреляционной параметризации в негауссовском приближении нелинейной системы автоматического

регулювання с нечётной нелинейностью, приведёнными в [1], т.е. для случая симметрии плотности вероятности вектора состояния.

Заключение. Предложенный способ построения алгоритма параметрической оптимизации многомерных нелинейных дифференциальных систем в негауссовском приближении основывается на варианте ДДМ системы при асимметрии плотности вероятности и детерминированных градиентных численных методах. Предложенный метод алгоритмизации вычисления правых частей матричных уравнений ДДМ в негауссовском приближении и уравнений соответствующих частных производных по компонентам вектора параметров позволяет снизить вычислительные затраты на его реализацию до уровня затрат при скалярном представлении решаемых уравнений. Направление дальнейших исследований будет связано с проблематикой параметрической оптимизации многомерных нелинейных стохастических дифференциальных систем на основе квадратичных градиентных методов.

Бібліографічний список

1. Захаров В.В. Корреляционный синтез нелинейных дифференциальных систем управления в негауссовском приближении при симметрии плотности вероятности на основе градиентных методов / В.В. Захаров // Вестн. СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. — Севастополь, 2009. — Вып. 95. — С. 116–123.
2. Захаров В.В. Дисперсионная модель нелинейной дифференциальной системы в негауссовском приближении при асимметрии плотности вероятности / В.В. Захаров // Вестн. СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. — Севастополь, 2007. — Вып. 83. — С. 96–104.
3. Пугачёв В.С. Теория стохастических систем: учеб. пособие / В.С. Пугачёв, И.Н. Сеницын. — М.: Логос Пресс, 2005. — 999 с.
4. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
5. Рей У. Методы управления технологическими процессами / У. Рей. — М.: Мир, 1983. — 368 с.

Поступила в редакцию 15.10.2009 г.