

УДК 621.391.27:62.50

**В.К. Маригодов, профессор, д-р техн. наук,****Г.А. Тихонов, доцент, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ**

*Рассмотрена возможность решения обратной вариационной задачи, состоящей в определении исходного функционала по результатам найденного максимума оценки эффективности предсказания сигнала.*

**Ключевые слова:** функционал, вариационная задача, сигнал, помеха, дополнительное условие, амплитудно-частотная характеристика, фильтр.

В условиях автоматизированного производства, а также в измерительных информационных системах и системах дистанционного обучения возникает задача помехоустойчивости передачи информации, которая предназначена для управления и контроля [1, 2]. Для повышения помехоустойчивости и реализации пропускной способности каналов связи широкое применение нашли методы оптимального предсказания и корректирования сигналов [3 – 5]. Для этих целей в передающий тракт системы передачи информации (СПИ) включается предсказывающий фильтр, предназначенный для формирования требуемой формы энергетического спектра сигнала на входе канала связи. В приемный тракт СПИ (на выходе канала) включают корректирующий фильтр для ослабления мощности помех, действующих в канале связи, а также для восстановления формы спектра оптимально предсказанного сигнала.

На рисунке 1 изображена структурная схема СПИ с предсказанием и корректированием сигналов. АЧХ предсказывающего и корректирующего фильтров  $|K(j\omega)|$  и  $1/|K(j\omega)|$  выбираются взаимнообратными для исключения искажения передаваемых сигналов.

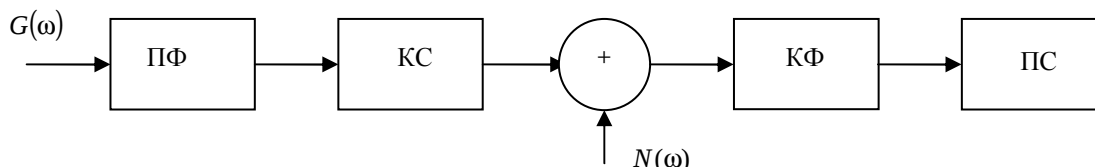


Рисунок 1 – Структурная схема системы передачи информации: ПФ – предсказывающий фильтр; КС – канал связи; КФ – корректирующий фильтр; ПС – приемник сигнала;  $G(\omega)$ ,  $N(\omega)$  – спектральные плотности мощности соответственно сигнала и аддитивной помехи

В соответствии с энергетическим критерием оценки эффективности оптимального предсказания и корректирования выигрыш в помехоустойчивости  $S_{\max}$  определяется известной формулой В.М. Штейна [3]

$$S_{\max} = \frac{\int_{\Delta\omega} G(\omega) d\omega \int_{\Delta\omega} N(\omega) d\omega}{\left[ \int_{\Delta\omega} \sqrt{G(\omega)N(\omega)} d\omega \right]^2}, \quad (1)$$

где  $\Delta\omega$  – эффективная полоса частот канала связи. Аналогичная формула была получена применением теоретико-игрового подхода к решению конфликтной ситуации между операторами СПИ и системы радиопомех [5].

Целью статьи является задача нахождения по  $S_{\max}$  исходного функционала, являющимся выбранным в качестве критерия оценки эффективности предсказания и корректирования.

В известной авторам литературе такая задача до сих пор решения не находила. Таким образом, если *прямая вариационная задача* формулируется как нахождение минимума мощности помех на входе приемника сигнала (рисунок 1) при фиксации мощности предсказанного сигнала на входе канала связи, то *обратная вариационная задача* состоит в определении возможного увеличения мощности предсказанного сигнала на входе канала при фиксации мощности аддитивной помехи на входе приемника. Для этой цели предсказывающий фильтр необходимо выполнять на активном RC-фильтре

либо включать последовательно с пассивным предсказывающим фильтром дополнительный усилитель с идеальной АЧХ.

Обратная вариационная задача заключается в минимизации  $S_{\max}$  в (1) путем нахождения энергетических спектров  $G(\omega)_{\max}$ ,  $N(\omega)_{\max}$ , которые максимизируют функционал знаменателя (1). В соответствии с этим  $N(\omega)_{\max}$  находится варьированием знаменателя (1) по  $N(\omega)$  при дополнительных условиях

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\omega} \frac{N(\omega)}{|K(j\omega)|^2} d\omega = P'_\Pi = \text{const}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\omega} G(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega = P_{cp}, \quad (3)$$

где  $P'_\Pi$  – фиксированная средняя мощность аддитивной помехи на входе приемника;

$P_{cp}$  – средняя мощность переданного сигнала на входе канала связи.

Уравнение Эйлера – Лагранжа запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial N(\omega)} \left[ \sqrt{G(\omega)N(\omega)} - \lambda \frac{N(\omega)}{|K(j\omega)|^2} \right] = 0, \quad (4)$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа, который находится из (2).

Из (4) находим

$$N(\omega)_{\max} = \frac{G(\omega) |K(j\omega)|^4}{4\lambda^2}; \quad (5)$$

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{G(\omega)}{N(\omega)}}; \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P_{cp}}{P'_\Pi}}. \quad (7)$$

С учетом (7) из (5) получаем:

$$N(\omega)_{\max} = \frac{G(\omega) P'_\Pi |K(j\omega)|^4}{P_{cp}}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в знаменатель функционала (1), находим

$$\left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\omega} \sqrt{G(\omega)N(\omega)} d\omega \right]^2 = P_{cp} \cdot P'_\Pi. \quad (9)$$

Покажем, что такой же результат получится, если определить наиболее неблагоприятный энергетический спектр полезного сигнала  $G(\omega)_{\max}$ . Для этого варьировем знаменатель (1) по  $G(\omega)$  при использовании дополнительного условия (3):

$$\frac{\partial}{\partial G(\omega)} \left[ \sqrt{G(\omega)N(\omega)} - \mu G(\omega) |K(j\omega)|^2 \right] = 0. \quad (10)$$

В уравнении Эйлера – Лагранжа (10)  $\mu$  – лагранжев множитель, который находится из (3).

Из решения (10) с учетом (3) находим:

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{N(\omega)}{G(\omega)}}, \quad (11)$$

$$G(\omega)_{\max} = \frac{N(\omega)}{4\mu^2 |K(j\omega)|^4}; \quad (12)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P'_\Pi}{P_{cp}}}; \quad (13)$$

$$G(\omega)_{\max} = \frac{N(\omega)P_{cp}}{P'_{\Pi}|K(j\omega)|^4}. \quad (14)$$

Если подставить наиболее неблагоприятный энергетический спектр сигнала (14) в знаменатель (1), то получится выражение (9).

Задачу максимизации функционала знаменателя (1) можно также решить путем отыскания АЧХ оптимального предсказывающего фильтра  $|K(j\omega)|_{opt}$ . При этом получаем

$$\frac{\partial}{\partial |K(j\omega)|^2} \left[ \frac{N(\omega)}{|K(j\omega)|^2} - \delta G(\omega)|K(j\omega)|^2 \right] = 0, \quad (15)$$

где использованы дополнительные условия (2) и (3), а  $\delta$  – лагранжев множитель, находящийся из (3).

Из решения уравнения (15) находим:

$$|K(j\omega)|_{opt}^4 = \frac{N(\omega)}{\delta G(\omega)}, \quad (16)$$

$$\delta = \frac{1}{P_{cp}^2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\omega} \sqrt{G(\omega)N(\omega)} d\omega \right)^2. \quad (17)$$

Используя (16) и (17), получаем формулу (9).

Таким образом, искомый функционал равен

$$S = \frac{P_C \cdot P_{\Pi}}{P_{cp} \cdot P'_{\Pi}}, \quad (18)$$

где  $P_C = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\omega} G(\omega) d\omega$ ,  $P_{\Pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\omega} N(\omega) d\omega$ .

Проанализируем выражение (18). Оно представляет собой безразмерный критерий оценки эффективности оптимального предсказания и корректирования сигнала, который при взаимнообратных АЧХ предсказывающего и корректирующего фильтров равен

$$S = \frac{S_2}{S_1},$$

где  $S_1 = \frac{P_{cp}}{P_{\Pi}}$ ,  $S_2 = \frac{P_C}{P'_{\Pi}}$ .

Заметим, что в некоторых случаях обратная вариационная задача не находит решения. Такая ситуация возникает тогда, когда максимизируемый или минимизируемый функционал содержит постоянные параметры, например, выражение для пропускной способности канала [4].

Таким образом, поставленная задача решена следующими тремя способами: 1) максимизацией энергетического спектра полезного сигнала; 2) максимизацией спектра помехи; 3) оптимизацией АЧХ предсказывающего фильтра.

*Задачей дальнейших исследований* в данном направлении можно считать применение теоретико-игрового подхода к поиску исходных функционалов на основе полученных минимаксных значений решения прямой вариационной задачи.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую признательность д-ру технических наук, профессору А. И. Бохонскому за постановку задачи обратного вариационного исчисления.

#### **Библиографический список**

1. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования: учеб. пособие для вузов / Д.И. Батищев. – М.: Радио и связь, 1984. — 248 с.
2. Стратонович Р.Л. Теория информации / Р.Л. Стратонович. — М.: Сов. радио, 1975. — 423 с.
3. Маригодов В.К. Помехоустойчивая обработка информации: методы оптимального линейного предсказания и корректирования / В.К. Маригодов. — М.: Наука, 1983. — 200 с.
4. Маригодов В.К. Синтез оптимальных радиосистем с адаптивным предсказанием и корректированием сигналов / В.К. Маригодов, Э.Ф. Бабуров. — М.: Радио и связь, 1985. — 248 с.
5. Маригодов В.К. Теоретико-игровая оценка эффективности предсказания и корректирования сигналов / В.К. Маригодов // Радиотехника. — 1981. — Т. 36. — №3. — С. 64–65.

*Поступила в редакцию 26.03.2010 г.*