

УДК 669.169

В.Я. Копп, профессор, д-р техн. наук,**М.В. Заморёнов, ассистент,****А.И. Песчанский, доцент, канд. ф-м. наук,****О.В. Филипович, доцент, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: ps@sevntu.com.ua***ОСОБЕННОСТИ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ
СИНХРОННОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ЛИНИИ
СО СВОБОДНЫМ РИТМОМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ**

Рассмотрена полумарковская модель синхронной автоматизированной линии со свободным ритмом функционирования при использовании законов распределения случайных величин ограниченных конечными пределами.

Ключевые слова: синхронная линия, полумарковская модель, случайная величина, закон распределения, технологическая ячейка, время обслуживания.

В настоящее время переналаживаемые автоматизированные линии находят все большее применение в мелкосерийном производстве. Важным параметром, характеризующим функционирование таких линий, наряду с их надежностью и производительностью при полной загрузке, является время обслуживания партии продукции, включая начальный период заполнения и конечный – опорожнения линии. В условиях мелкосерийного производства эти два периода по длительности становятся сравнимы, а в некоторых случаях могут и превышать, длительность работы линии при полной загрузке. В машино-приборостроении под синхронной понимают линию, в которой технологические ячейки (ТЯ), входящие в ее состав, непосредственно соединены друг с другом и не разделены между собой межоперационными накопителями. Существуют три стратегии управления функционированием синхронными линиями (СЛ): линии с жестким циклом передачи продукции от ячейки к ячейке, с рефлекторным управлением и со свободным ритмом. В данной работе рассматриваются СЛ со свободным ритмом. В них передача каждой единицы продукции от ячейки к ячейке производится при наличии такой возможности (свободной последующей ТЯ) и при условии окончания данной операции. Построение моделей первых двух типов СЛ не вызывают трудностей. Гораздо сложнее математически описывается функционирование СЛ со свободным ритмом, когда времена обслуживания продукции на ячейках являются случайными величинами (СВ), имеющими распределения общего вида. Такая задача решена в настоящее время только для двухфазной системы.

В работе [1] построена модель трехфазной системы, а на ее базе и многофазной, на основе нового подхода, заключающегося в моделировании прохождения двух заявок: сначала первой и второй, затем второй и третьей и т.д. Такой подход позволяет моделировать многофазную СЛ со свободным ритмом не только в стационарном режиме, но и в переходном.

СЛ функционирует следующим образом: происходит последовательное обслуживание изделия сначала на первой ячейке (ТЯ₁), затем на второй (ТЯ₂), а затем на третьей (ТЯ₃). Передача изделия, обслуженного на предыдущей ячейке к последующей, происходит сразу при наличии свободной последующей ячейки.

Структура трехфазной СЛ изображена на рисунке 1.

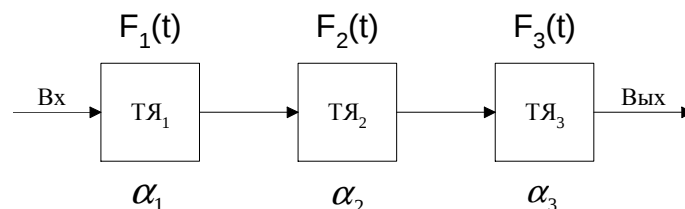


Рисунок 1 – Структура трёхфазной системы

Времена обслуживания изделия (заявки) на ТЯ_i, $i=1,3$ – СВ α_i с функциями распределения (ФР) $F_i(t)$, являющимися исходными данными для моделирования. СВ α_1 , α_2 и α_3 имеют распределения

$F_1(t)$, $F_2(t)$ и $F_3(t)$ общего вида. В общем случае ФР времен обслуживания различных заявок на одних и тех же ячейках могут отличаться.

Допущения: СВ α_i предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания и дисперсии; у ФР $F_i(t)$ существуют плотности $f_i(t)$; продукция на вход СЛ постоянно поступает, с выхода постоянно удаляется, а передача изделия от ячейки к ячейке происходит мгновенно; состоянием, при котором 2-ая и 3-я ячейки закончили обслуживание, а первая ещё обслуживает заявку, пренебрегается, как маловероятным.

В работе [1] построена модель, предназначенная для определения характеристик многофазных СЛ, как в переходном, так и в стационарном режимах. Наибольшую сложность при ее построении представляло получение выражения для распределения $\psi_{22}(t)$ времени пребывания второй заявки на второй ячейке с учетом блокировки со стороны первой заявки. На основании составления и решения уравнений Марковского восстановления в [1] получено следующее выражение для $\psi_{22}(t)$ и входящих в него функций:

$$\psi_{22}(t) = \left[\int_0^\infty F_{21}(t) f_{12}(t) dt \right] \cdot F_{22}(t) F_{13}(t) + \left[\int_0^\infty F_{12}(t) f_{21}(t) \right] \cdot F_{22}(t) F_{011\gamma}(t); \quad (1)$$

$$F_{011\gamma}(t) = \frac{\int_0^\infty [F_{13}(t+y) - F_{13}(y)] f_{1z01}(y) dy}{\int_0^\infty \bar{F}_{13}(y) f_{1z01}(y) dy}; \quad F_{1z01}(t) = \frac{\int_0^\infty [F_{21}(t+y) - F_{21}(y)] f_{12}(y) dy}{\int_0^\infty \bar{F}_{21}(y) f_{12}(y) dy}. \quad (2)$$

Здесь $F_{12}(t)$, $f_{12}(t)$ – функция и плотность распределения времени обслуживания 1-ой заявки на 2-ой ячейке (СВ α_2); $F_{13}(t)$ – функция распределения времени обслуживания 1-ой заявки на 3-ей ячейке (СВ α_3); $F_{21}(t)$, $f_{21}(t)$ – функция и плотность распределения времени обслуживания 2-ой заявки на 1-ой ячейке (СВ β_1); $F_{22}(t)$ – функция распределения времени обслуживания 2-ой заявки на 2-ой ячейке (СВ β_2); $F_{011\gamma}$ – функция распределения остаточного времени обслуживания 1-ой заявки на 3-ей ячейке (СВ γ); F_{1z01} , f_{1z01} – функция и плотность распределения остаточного времени обслуживания 2-ой заявки на 1-ой ячейке (СВ z).

Для четырехфазной системы решаются две задачи, полностью аналогичные рассмотренной выше: прохождение двумя заявками трех ячеек из состояний S_{011} и $S_{011\gamma}$. Определяются вероятности перехода в состояния S_{011} , $S_{011\gamma}$ – P_{110}^{011} и $P_{110}^{011\gamma} = P_{110}^{1z01}$ для первой и второй задач соответственно.

При решении первой задачи, ФР времен обслуживания заявок без учета блокировок на второй, третьей и четвертой ячейках, для первой и второй заявок соответственно равны $F_{12}(t)$, $F_{13}(t)$, $F_{14}(t)$, $F_{22}(t)$, $F_{23}(t)$, $F_{24}(t)$ и совпадают с соответствующими $F_i(t)$, $i = \overline{2,4}$.

При решении второй задачи отличие состоит в том, что ФР времени обслуживания первой заявки на третьей ячейке равна $F_{011\gamma}(t)$, а не $F_3(t)$. В остальном, задачи полностью совпадают.

Основным результатом решения этих задач является определение ФР времени пребывания вторых заявок на третьей ячейке – $\psi_{23}^1(t)$ и $\psi_{23}^2(t)$ для первой и второй задач. Тогда ФР времени пребывания второй заявки на третьей ячейке в целом равна:

$$\psi_{23}(t) = P_{110}^{011} \psi_{23}^1(t) + P_{110}^{011\gamma} \psi_{23}^2(t). \quad (3)$$

После определения $\psi_{23}(t)$ по (3) расчет времен прохождения двумя заявками четырех ячеек не вызывает трудностей. Далее рассматривается прохождение через систему пар – вторая, третья и третья четвертая заявки. Расчет выполняется по тем же формулам только теперь в паре «два – три» вторая заявка считается первой, а третья – второй, а в паре «три – четыре» третья заявка считается первой, а четвертая – второй. Процедура продолжается до тех пор, пока колебания времен обслуживания заявок с учетом блокировок от шага к шагу не станут меньше заданной точности вычислений.

Выше были рассмотрены допущения, при которых была построена рассматриваемая первая модель. Для расширения ее функциональных возможностей в [1] разработана вторая модель, в которой третье допущение о том, что 2-ая заявка не может задержаться на 1-ой ячейке после того, как 1-ая уже обслужилась на 3-ей было снято. В этом случае выражение для $\psi_{22}(t)$ имеет вид

$$\Psi_{22}(t) = F_{22}(t)F_{13}(t)P_{110}^{011}\{\beta_1 < \alpha_2\} + F_{22}(t)\int_0^\infty f_{12}(u)du \int_0^\infty f_{21}(u+z)F_{13}(t+z)dz, \quad (4)$$

$$\text{где } P_{110}^{011}\{\beta_1 < \alpha_2\} = \int_0^\infty F_{21}(t)f_{12}(t)dt.$$

Данные модели были распространены на системы с произвольным числом фаз. В целом модель многофазной СЛ основана на многократном использовании формул (1) – (4).

Основной сложностью при моделировании СЛ с использованием приведенных формул является следующее. При подстановке реальных законов распределения в полученные выражения в ходе итерационного процесса получаются громоздкие выражения. Причем в выражение для определения $F_{011\gamma}(t)$ входит $F_{1201}(t)$, определяемая по аналогичной формуле. Поэтому после ряда преобразований требуется аппроксимация полученных выражений. Для аппроксимации [1] использовались законы Эрланга, что в целом достаточно удобно. Однако при малых дисперсиях времен обслуживания порядок этих законов настолько возрастает, что моделирование становится крайне затруднительным. В этом случае целесообразно использовать закон распределения, например, равномерный, при котором случайная величина ограничена конечными пределами, что вызывает определенные трудности из-за ограничения случайной величины. Сложность возникает при использовании выражений для $F_{011\gamma}(t)$ и $F_{1201}(t)$, входящих в выражение для $\Psi_{22}(t)$. Необходимо получить ряд формул, в которые преобразуются выражения для $F_{011\gamma}(t)$ и $F_{1201}(t)$ при подстановке в них указанного закона распределения в зависимости от соотношения СВ α_{13} и z , а также α_{21} и α_{12} .

Целью статьи является расширение применимости моделей САЛ.

Рассмотрим в общем виде поставленную задачу, для чего переобозначим переменные в указанных выражениях и запишем формулу в следующем виде:

$$F_8(t) = \frac{\int_0^\infty (F_1(t+y) - F_1(y))f_2(y)dy}{\int_0^\infty \bar{F}_1(y)f_2(y)dy} = \frac{\int_0^\infty F_1(t+y)f_2(y)dy - \int_0^\infty F_1(y)f_2(y)dy}{1 - \int_0^\infty F_1(y)f_2(y)dy}. \quad (5)$$

Здесь $F_1(t)$ – ФР СВ α_1 , а $f_2(t)$ – плотность распределения СВ α_2 . Сама $F_8(t)$ является ФР СВ $[\alpha_1 - \alpha_2]^+$, представляющей собой разность СВ α_1 и α_2 при условии, что $\alpha_1 > \alpha_2$ [2]. СВ α_1 и α_2 ограничены конечными пределами, а общий вид их ФР следующий:

$$F_1(y) = \begin{cases} 0, & y < a_1; \\ \Phi_1(y), & a_1 < y < a_2; \\ 1, & y > a_2; \end{cases} \quad (6)$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \varphi_2(y), & y \in (b_1, b_2); \\ 0, & y \notin (b_1, b_2). \end{cases} \quad (7)$$

Графическая интерпретация выражений (6), (7) изображена на рисунках 1, а, б.

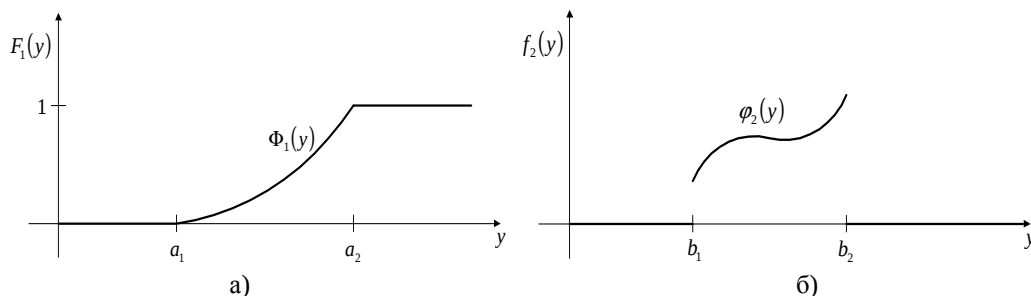


Рисунок 2 – Графическая интерпретация: а) выражения (6), б) выражения (7)

Рассмотрим выражения для различных вариантов соотношений пределов изменений случайных величин α_1 и α_2 . При этом введем обозначения:

$$\begin{cases} A(t) = \int_0^\infty F_1(t+y)f_2(y)dy = \int_t^\infty F_1(s)f_2(s-t)ds = \int_{b_1+t}^{b_2+t} F_1(s)\varphi_2(s-t)ds; \\ I = \int_0^\infty F_1(y)f_2(y)dy. \end{cases} \quad (8)$$

Вариант 1. Соотношение пределов следующее: $0 < b_1 < b_2 < a_1 < a_2$; $b_2 - b_1 < a_2 - a_1$.

В соответствии с указанными пределами и выражением (8) интеграл I равен:

$$I = \int_0^\infty F_1(y)f_2(y)dy = \int_{b_1}^{b_2} F_1(y)\varphi_2(y)dy = 0; \quad P(\alpha_1 > \alpha_2) = 1.$$

3. При $t > 0$ возможны следующие случаи, графическая интерпретация которых показана на рисунке

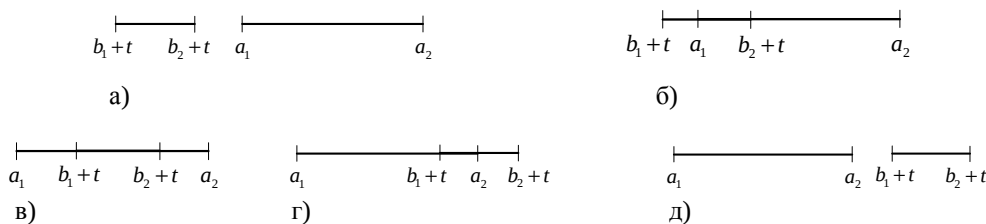


Рисунок 3 – Графическая интерпретация границ изменения случайных величин:
а) $0 < t < a_1 - b_2$; б) $a_1 - b_2 < t < a_1 - b_1$; в) $a_1 - b_1 < t < a_2 - b_2$; г) $a_2 - b_2 < t < a_2 - b_1$;
д) $a_2 - b_1 < t < \infty$

Графическая интерпретация случаев, изображенных на рисунке 2, справедлива также для всех рассмотренных ниже вариантов.

Для каждого из случаев рассматриваемого варианта определим $A(t)$ по формуле (8).

Случай 1. Если $b_2 + t < a_1 \Rightarrow 0 < t < a_1 - b_2$ (рисунок 3,а), то $A(t) = 0$.

Случай 2. Если $\begin{cases} b_1 + t < a_1 \\ b_2 + t > a_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 - b_2 < t < a_1 - b_1$ (рисунок 3,б), то

$$A(t) = \int_{a_1}^{b_2+t} \Phi_1(s)\varphi_2(s-t)ds = \int_{a_1-t}^{b_2} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy.$$

Случай 3. Если $\begin{cases} a_1 < b_1 + t \\ b_2 + t < a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 - b_1 < t < a_2 - b_2$ (рисунок 3,в), то

$$A(t) = \int_{b_1+t}^{b_2+t} \Phi_1(s)\varphi_2(s-t)ds = \int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy.$$

Случай 4. Если $\begin{cases} b_1 + t < a_2 \\ a_2 < b_2 + t \end{cases} \Rightarrow a_2 - b_2 < t < a_2 - b_1$ (рисунок 3,г), то

$$A(t) = \int_{b_1+t}^{a_2} \Phi_1(s)\varphi_2(s-t)ds + \int_{a_2}^{b_2+t} \varphi_2(s-t)ds = \int_{b_1}^{a_2-t} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy + \int_{a_2-t}^{b_2} \varphi_2(y)dy.$$

Случай 5. Если $a_2 < b_1 + t \Rightarrow t > a_2 - b_1$ (рисунок 3,д), то

$$A(t) = \int_{b_1+t}^{b_2+t} \varphi_2(s-t)ds = \int_{b_1}^{b_2} \varphi_2(y)dy = 1.$$

Исходя из приведенных случаев, выражение (5) принимает вид

$$F_8(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, a_1 - b_2); \\ \int_{a_1-t}^{b_2} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy, t \in (a_1 - b_2, a_1 - b_1); \\ \int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy, t \in (a_1 - b_1, a_2 - b_2); \\ \int_{b_1}^{a_2-t} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy + \int_{a_2-t}^{b_2} \varphi_2(y)dy, t \in (a_2 - b_2, a_2 - b_1); \\ 1, t \in (a_2 - b_1, \infty). \end{cases} \quad (9)$$

Вариант 2. Соотношение пределов следующее:

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2; \quad b_2 - b_1 < a_2 - a_1.$$

Интеграл I равен:

$$I = \int_0^\infty F_1(y)f_2(y)dy = \int_{b_1}^{b_2} F_1(y)\varphi_2(y)dy = \int_{a_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy.$$

Случай 1 (рисунок 3,а). Если $b_2 + t < a_1 \Rightarrow 0 < t < a_1 - b_2$, то $A(t) = 0$.

Случай 2 (рисунок 3,б). Если $\begin{cases} b_1 + t < a_1 \\ b_2 + t > a_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 - b_2 < t < a_1 - b_1$, то

$$A(t) = \int_{a_1-t}^{b_2} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy.$$

Случай 3 (рисунок 3,в). Если $\begin{cases} a_1 < b_1 + t \\ b_2 + t < a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 - b_1 < t < a_2 - b_2$, то

$$A(t) = \int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy.$$

Случай 4 (рисунок 3,г). Если $\begin{cases} b_1 + t < a_2 \\ a_2 < b_2 + t \end{cases} \Rightarrow a_2 - b_2 < t < a_2 - b_1$, то

$$A(t) = \int_{b_1}^{a_2-t} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy + \int_{a_2-t}^{b_2} \varphi_2(y)dy.$$

Случай 5 (рисунок 3,д). Если $a_2 < b_1 + t \Rightarrow t > a_2 - b_1$, то $A(t) = \int_{b_1}^{b_2} \varphi_2(y)dy = 1$.

Исходя из приведенных случаев, выражение (5) принимает вид:

$$F_8(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, 0); \\ \frac{\int_{a_1-t}^{b_2} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy - \int_{a_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy}{1 - \int_{a_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy}, t \in (0, a_1 - b_1); \\ \frac{\int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy - \int_{a_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy}{1 - \int_{a_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy}, t \in (a_1 - b_1, a_2 - b_2); \\ \frac{\int_{b_1}^{a_2-t} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy + \int_{a_2-t}^{b_2} \varphi_2(y)dy - \int_{a_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy}{1 - \int_{a_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy}, t \in (a_2 - b_2, a_2 - b_1); \\ 1, t \in (a_2 - b_1, \infty). \end{cases} \quad (10)$$

Вариант 3. Соотношение пределов следующее:

$$a_1 < b_1 < b_2 < a_2; \quad b_2 - b_1 < a_2 - a_1.$$

Интеграл I равен:

$$I = \int_0^\infty F_1(y)f_2(y)dy = \int_{b_1}^{b_2} F_1(y)\varphi_2(y)dy = \int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy.$$

Случай 1 (рисунок 3,а). Если $b_2 + t < a_1 \Rightarrow 0 < t < a_1 - b_2$.

Данный случай не возможен, т.к. $t > 0$.

Случай 2 (рисунок 3,б). Если $\begin{cases} b_1 + t < a_1 \\ b_2 + t > a_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 - b_2 < t < a_1 - b_1$.

Данный случай не возможен, т.к. $t > 0$.

Случай 3 (рисунок 3,в). Если $\begin{cases} a_1 < b_1 + t \\ b_2 + t < a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 - b_1 < t < a_2 - b_2$, то

$$A(t) = \int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy.$$

Случай 4 (рисунок 3,г). Если $\begin{cases} b_1 + t < a_2 \\ a_2 < b_2 + t \end{cases} \Rightarrow a_2 - b_2 < t < a_2 - b_1$, то

$$A(t) = \int_{b_1}^{a_2-t} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy + \int_{a_2-t}^{b_2} \varphi_2(y)dy.$$

Случай 5 (рисунок 3,д). Если $a_2 < b_1 + t \Rightarrow t > a_2 - b_1$, то $A(t) = \int_{b_1}^{b_2} \varphi_2(y)dy = 1$.

Исходя из приведенных случаев, выражение (5) принимает вид:

$$F_{\delta}(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, 0); \\ \frac{\int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy - \int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy}{1 - \int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy}, t \in (0, a_2 - b_2); \\ \frac{\int_{b_1}^{a_2-t} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy + \int_{a_2-t}^{b_2} \varphi_2(y)dy - \int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy}{1 - \int_{b_1}^{b_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy}, t \in (a_2 - b_2, a_2 - b_1); \\ 1, t \in (a_2 - b_1, +\infty). \end{cases} \quad (11)$$

Вариант 4. Соотношение пределов следующее:

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2; b_2 - b_1 < a_2 - a_1.$$

Интеграл I равен:

$$I = \int_0^{\infty} F_1(y)f_2(y)dy = \int_{b_1}^{b_2} F_1(y)\varphi_2(y)dy = \int_{b_1}^{a_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy + \int_{a_2}^{b_1} \varphi_2(y)dy.$$

Случай 1 (рисунок 3,а). Если $b_2 + t < a_1 \Rightarrow 0 < t < a_1 - b_2$.

Данный случай не возможен, т.к. $t > 0$.

Случай 2 (рисунок 3,б). Если $\begin{cases} b_1 + t < a_1 \\ b_2 + t > a_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 - b_2 < t < a_1 - b_1$.

Данный случай не возможен, т.к. $t > 0$.

Случай 3 (рисунок 3,в). Если $\begin{cases} a_1 < b_1 + t \\ b_2 + t < a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 - b_1 < t < a_2 - b_2$.

Данный случай не возможен, т.к. $t > 0$.

Случай 4 (рисунок 3,г). Если $\begin{cases} b_1 + t < a_2 \\ a_2 < b_2 + t \end{cases} \Rightarrow a_2 - b_2 < t < a_2 - b_1$, то

$$A(t) = \int_{b_1}^{a_2-t} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy + \int_{a_2-t}^{b_2} \varphi_2(y)dy.$$

Случай 5 (рисунок 3,д). Если $a_2 < b_1 + t \Rightarrow t > a_2 - b_1$, то $A(t) = \int_{b_1}^{b_2} \varphi_2(y)dy = 1$.

Исходя из приведенных случаев, выражение (5) принимает вид:

$$F_{\delta}(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, 0), \\ \frac{\int_{b_1}^{a_2-t} \Phi_1(t+y)\varphi_2(y)dy + \int_{a_2-t}^{b_2} \varphi_2(y)dy - \int_{b_1}^{a_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy - \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(y)dy}{1 - \int_{b_1}^{a_2} \Phi_1(y)\varphi_2(y)dy - \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(y)dy}, t \in (0, a_2 - b_1). \\ 1, t \in (a_2 - b_1, +\infty) \end{cases} \quad (12)$$

Вариант 5. Соотношение пределов следующее: $a_1 < a_2 < b_1 < b_2; b_2 - b_1 < a_2 - a_1$.

Данный вариант невозможен, так как $P(\alpha_1 > \alpha_2) = 0$ и $[\alpha_1 - \alpha_2]^+ \equiv \emptyset$.

Выражения (9) – (12) описывают в общем виде ФР СВ $[\alpha_1 - \alpha_2]^+$ для случая, когда СВ α_1 и α_2 ограничены конечными пределами. Для случаев, при которых $b_2 - b_1 > a_2 - a_1$ выражения получаются аналогично и из-за ограниченного объема статьи здесь не приводятся.

Приведем примеры моделирования САЛ при полиномиальном и равномерном законах распределения времен обслуживания продукции на всех ТЯ.

При аппроксимации полиномиальным законом ФР $F(t)$ СВ ξ принималась следующей:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < c_1; \\ d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4 + d_5 t^5 + d_6 t^6 + d_7 t^7, & c_1 \leq t \leq c_2; \\ 0, & t > c_2, \end{cases}$$

где d_i , $(i = \overline{0,7})$ – коэффициенты полинома, c_1 , c_2 – заданные пределы изменения СВ ξ , имеющей плотность $f(t)$ математическое ожидание $m\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Указанные коэффициенты выбирались из следующих условий:

$$F(c_1) = 0; F(c_2) = 1; F\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right) = F_3\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right); f(c_1) = f_3(c_1); f(c_2) = f_3(c_2);$$

$$f\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right) = f_3\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right); m\xi = \int_{c_1}^{c_2} t f(t) dt = m_3; D\xi = \int_{c_1}^{c_2} t^2 f(t) dt = D_3.$$

Здесь $F_3\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right)$; $f_3\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right)$; m_3 ; D_3 – заданные значения аппроксимируемой ФР $F(t)$ и плотности $f(t)$ в середине интервала $[c_1, c_2]$, ее математическое ожидание и дисперсия.

При аппроксимации равномерным законом параметры c_1 , c_2 ФР $F(t)$ СВ ξ из следующих условий: $D_3 = \frac{(c_2 - c_1)^2}{12}$; $m_3 = \frac{c_2 + c_1}{2}$.

Пример. Исходные данные для моделирования приведены в таблице 1. Результаты моделирования при использовании полиномиального закона приведены в таблице 2 и на рисунке 4,а, а равномерного – в таблице 3 и на рисунке 4,б. В таблицах 2, 3 приведены математические ожидания времен пребывания заявок на ячейках ТЯ₁, ТЯ₂, ТЯ₃. На рисунках 4,а,б линии 1, 2, 3 соответствуют законам распределения времен пребывания заявки на ТЯ₁, ТЯ₂, ТЯ₃.

Таблица 1 – Исходные данные для моделирования

Ячейка	ТЯ ₁	ТЯ ₂	ТЯ ₃	ТЯ ₄
Математические ожидания времен обслуживания заявок на ячейках	2,0	2,0	2,0	2,0
Дисперсии времен обслуживания на ячейках	0,2	0,2	0,2	0,2

Таблица 2 – Выходные данные моделирования при аппроксимация полиномиальным распределением

№ заявки		2	3	4	5	6	7	8
Ячейка	1	2,2581	2,3447	2,3843	2,4004	2,4056	2,4103	2,4107
	2	2,1812	2,2554	2,2903	2,2926	2,3011	2,2963	2,3022
	3	2,1286	2,1858	2,1726	2,1954	2,1770	2,1963	2,1775

Таблица 3 – Выходные данные моделирования при аппроксимация равномерным законом распределения

№ заявки	2	3	4	5	6	7	8	
Ячейка	1	2,2582	2,3444	2,3900	2,4054	2,4101	2,4115	2,4119
	2	2,1827	2,2622	2,2879	2,2957	2,2979	2,2987	2,2989
	3	2,1493	2,1805	2,1891	2,1916	2,1923	2,1925	2,1926

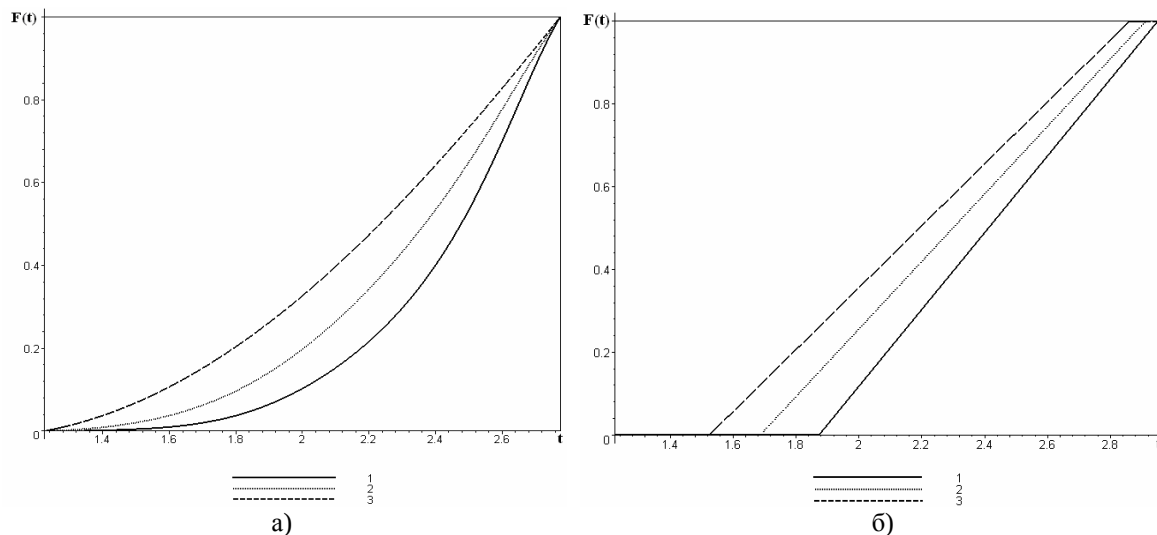


Рисунок 4 – ФР времен обслуживания на ТЯ i , ($i = \overline{1,3}$) в примере 1 при аппроксимация распределением:
а) полиномиальным; б) равномерным

В результате проведенных исследований решены специфические вопросы реализации разработанных моделей на основе аппроксимации функций распределения времен пребывания в состояниях и времен обслуживания функциями распределения случайных величин, ограниченных конечными пределами. В качестве аппроксимирующих использовались полиномиальное и равномерное распределения.

Дальнейшие исследования будут связаны с исследованием возможности использования других законов распределения случайных величин.

Библиографический список

1. Загорёнов М.В. Полумарковская модель синхронной автоматизированной линии со свободным ритмом функционирования / М.В. Загорёнов, В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, Д.В. Загорёнова // Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. — Севастополь, 2009. — Вып. 95. — С. 73–88.
2. Королук В.С. Математические основы фазового укрупнения сложных систем / В.С. Королук, А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1978. — 217 с.

Поступила в редакцию 24.09.2009 г.