

УДК 531.12

А.В. Неменко, доцент, канд. техн. наук,**М.М. Никитин, инженер***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ КРИВОЙ ВЫНОСЛИВОСТИ ЗА ПРЕДЕЛЫ ДИАПАЗОНА ИЗМЕРЕНИЙ**

Предложен метод оценки поведения кривой выносливости при неограниченном увеличении количества циклов.

Ключевые слова: кривая выносливости, цикл нагружения, экстраполяция

Явление усталостного разрушения деталей, подверженных циклическим значительно меньшим допустимым нагрузкам, необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации большинства машин и механизмов. Точной физической модели явления к настоящему времени не существует и поэтому применяются эмпирические закономерности.

Одним из применяемых методов исследования является проведение испытаний образцов циклической нагрузкой до их разрушения, причем результатом испытания образца является осуществленное количество циклов N . По результатам испытания серии образцов строится кривая выносливости – зависимость N от среднего значения нормальных σ (или касательных τ) напряжений в образце.

Рассмотрим кривую выносливости по нормальным напряжениям в виде $\sigma = \sigma(N)$. В большинстве случаев прямое моделирование эксплуатационных нагрузок оказывается затруднительным вследствие требуемой большой длительности эксперимента. Возникает задача оценки поведения усталостной кривой при больших значениях N .

В настоящее время [1] кривая выносливости аппроксимируется заранее заданными функциями кусочно-линейного, степенного или экспоненциального типа, что хорошо отражает её поведение с качественной стороны. Точность экстраполяции данных на большее количество циклов оказывается недостаточной и требует прямых измерений. Препятствием применения методов авторегрессии и скользящего среднего к прогнозированию получаемого ряда является [2] его нестационарность, так как напряжение в зависимости от числа циклов меняется аperiодически. Для точного построения аппроксимирующей кривой практически достаточно нескольких значений напряжений (в зависимости от времени), что обычно оказывается на несколько порядков меньше количества производимых испытаний. В случае отклонения кривой от измеренных значений, точность измерений, обеспеченная инструментально, оказывается не востребованной при математической обработке результатов эксперимента. В случае повторяемости значительного разброса точек относительно результирующей кривой приходится говорить о недостаточном соответствии математической модели физическим процессам.

Поскольку рассмотренное явление принципиально неустранимо, существуют различные количественные критерии адекватности математических моделей. Однако задача экстраполяции данных за пределы диапазона измерений в настоящее время не имеет однозначного решения.

При принятии некоторых допущений относительно свойств кривой выносливости оказывается возможным формализовать процесс построения её математической модели. Согласно теории аналитических продолжений степенного ряда, все свойства функции аналитической в некоторой точке определяются коэффициентами её разложения [3].

Применяемые аппроксимации кривой выносливости являются кусочно-аналитическими функциями, гладкость которых зависит от способа описания. Аналитическое представление функции в этом случае, по меньшей мере, для действительных последовательных значений количества циклов $N \in (0, \infty)$ имеет вид

$$\sigma = \sigma(N), \quad (1)$$

где N – непрерывная величина. Вторым предположением будет существование у функции (1) асимптотического разложения вида

$$\sigma(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{N^n}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (2)$$

В данной работе рассмотрена задача нахождения коэффициентов k_n по заданной выборке значений $\sigma(N)$ при сделанных допущениях. Согласно [4] достаточным условием существования разложения (2) является существование асимптотического разложения

$$\sigma(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k'_n}{(N+1)^n}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Коефіцієнти в (2) определяются по заданным коэффициентам (3) с помощью формул:

$$\begin{cases} k_0 = k'_0, \\ k_1 = k'_1, \\ k_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+i} \cdot \binom{n-1}{i-1} \cdot k'_i, \end{cases} \quad (4)$$

где $\binom{n-1}{i-1}$ – биномиальный коэффициент степени $(n-1)$ порядка $(i-1)$. Справедлива зависимость

$$\binom{n-1}{i-1} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}. \quad (5)$$

Известно [4], что достаточным условием существования разложения (2) является аналитичность в точке $(x=1)$ функции $u(x)$, заданной соотношением

$$u(N) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* \cdot x^n, \quad (6)$$

$$\begin{cases} c_0^* = c_0, \\ c_1^* = c_1, \\ c_n^* = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} \cdot c_{n-s} = \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n-1}{s-1} \cdot c_s, \end{cases} \quad (7)$$

где c_n – коэффициенты разложения функции $\sigma(N)$ в ряд

$$\sigma(N) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot N^n. \quad (8)$$

При выполнении условия коэффициенты разложения (3) могут быть определены так [4]

$$\begin{cases} k'_0 = u(1), \\ k'_1 = -\frac{d}{dx} \cdot u(x) \Big|_{x=1}, \\ k'_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot u(x) \Big|_{x=1}. \end{cases} \quad (9)$$

Для вычислений коэффициентов функции (6) по формулам (7) необходимо знать коэффициенты ряда (8). В случае выборки значений σ , полученных интерполяцией зависимости $\sigma(N)$ при значениях количества циклов $N = N_0, N_1, \dots, N_i$, с интервалом ΔN , формула для их приближенного вычисления принимает вид

$$c_n \approx \frac{\sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot \sigma(N_{n-i})}{n! \cdot (\Delta N)^n}. \quad (10)$$

Для повышения точности определения коэффициентов можно использовать выборку с неравномерно отстоящими значениями и применять для определения c_n формулы численного дифференцирования Чебышева. Аналитическими продолжениями (6) являются разложения функции $u(x)$ в степенные ряды

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a) \cdot (x-a)^n, \quad (11)$$

где a – некоторое произвольное значение. Взаимное соответствие между коэффициентами разных аналитических продолжений ряда (6) может быть установлено по формуле

$$\begin{cases} c_n^*(a + \Delta a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(a) \cdot \Delta a^n, \\ c_k^*(a + \Delta a) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n^*(a) \cdot \binom{n}{k} \cdot \Delta a^{n-k}, \end{cases} \quad (12)$$

где $c_k^*(a + \Delta a)$ – коэффициент порядка k разложения функции $u(x)$ в ряд

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(a + \Delta a) \cdot (x - a - \Delta a)^n, \quad (13)$$

$c_k^*(a)$ – коэффициент порядка k разложения

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(a) \cdot (x - a)^n. \quad (14)$$

Суммирование ограничим номером коэффициента n , для которого выполняется

$$c_n(x) \cdot \binom{n}{k} \cdot \Delta x^{n-k} < \alpha, \quad (15)$$

где α – некоторое наперед заданное число. Выберем шаг изменения центра сходимости аналитических продолжений $\Delta a = 1/n$, где n – целое число.

Последовательно применяя формулы (12) к ряду (6), получим рекуррентный вычислительный процесс, в ходе которого коэффициенты (9) могут быть вычислены следующим образом

$$\begin{cases} u(1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^*(1 - \Delta a) \cdot \Delta a^n, \\ \frac{1}{k!} \cdot \frac{d}{dx} \cdot u(1) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n^*(1 - \Delta a) \cdot \binom{n}{k} \cdot \Delta a^{n-k}. \end{cases} \quad (16)$$

Путем подстановки (16) в (9) и (4) получим искомые коэффициенты и, следовательно, формула $\sigma(N)$ для экстраполяции записывается в виде

$$\sigma(N) = k_0 + \frac{k_1}{N} + \frac{k_2}{N^2} + \frac{k_3}{N^3} + \dots \quad (17)$$

Выводы

Предложен алгоритм экстраполяции кривой выносливости её асимптотическим разложением (1) при неограниченном возрастании аргумента. Расчетные зависимости определены формулами (4), (6), (7), (9) и (16). Согласно свойствам асимптотического разложения, при достаточно больших значениях N возможно применять приближенную формулу

$$\sigma(N) = k_0 + \frac{k_1}{N}, \quad (18)$$

то есть рассмотренный закон переходит в известный закон обратной пропорциональности. Величина k_0 в данном случае является расчетным значением предела усталости.

Направлением дальнейших исследований представляется применение алгоритма к задачам определения усталостных характеристик с помощью неразрушающих методов контроля [4].

Библиографический список

1. Терентьев В.Ф. Усталость металлических материалов / В.Ф. Терентьев. — М.: Наука, 2002. — 248 с.
2. Бокс Дж. Анализ временных рядов, прогноз и управление (ч. 1) / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. — М.: Наука, 1974. — 405 с.
3. Биберах Л. Аналитическое продолжение. Пер. с нем. / Л. Биберах. — М.: Наука, 1967. — 240 с.
4. Nikitin M.M. Asymptotic expansion of a function defined by power series / M.M. Nikitin // arXiv.math/1006.0178
5. Неменко А.В. Оценка эксплуатационной повреждаемости деталей механических систем по явлениям, сопровождающим их структурные изменения / А.В. Неменко, В.П. Сердобольская // Проблемы качества и долговечности зубчатых передач редукторов, их деталей и узлов: матер. межд. науч.-техн. конф., Севастополь, 1-4 сент. 2004 г. — Севастополь, 2004. — С. 145–148.

Поступила в редакцию 26.05.2010 г.