

УДК 517.977

А.А. Кабанов, аспирант*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: patronne@mail.ru***РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО ПРИВЕДЕНИЯ В НОЛЬ**

Рассматривается задача асимптотически точного терминального управления непрерывной сингулярно возмущенной системой. Асимптотика решения задачи строится на основе «прямой схемы». Доказано, что в нулевом приближении прямая схема приводит к такому же результату, что и асимптотический анализ соответствующего уравнения Риккати. Приводятся примеры применения предлагаемого подхода в Matlab.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, асимптотика, редуцированный регулятор, равномерная сходимост, прямая схема, уравнение Риккати.

Задачи синтеза оптимальных управлений, приводящих систему в малую окрестность заданного положения за определенное время, являются одними из наиболее актуальных в классе задач управления подвижными объектами. Существующие методы их решения, основанные на описании объектов в виде систем дифференциальных уравнений, позволяют строить регуляторы, приводящие состояние системы в требуемое положение с заданной асимптотической точностью [1–3]. Эти результаты получены без учета возможного влияния на объект сингулярных возмущений. Такие возмущения, представленные в уравнениях объекта малым параметром при старших производных, могут исказить движение и сделать ошибку приведения большой. Поэтому возникает вопрос о равномерной малости ошибки по этому малому параметру на интервале управления. В [4] этот вопрос рассматривался с позиции асимптотического анализа соответствующего уравнения Риккати, вытекающего из условий оптимальности управления.

В настоящей работе асимптотика решения сингулярно возмущенной непрерывной задачи асимптотически точного терминального управления исследуется на основе «прямой схемы», т.е. когда малым параметром пренебрегаем в самом описании системы, а не в соответствующем уравнении Риккати. Такой подход позволяет разделить исходную задачу на две подзадачи меньшей размерности, при этом решение исходной задачи определяется как асимптотическая композиция решений двух последних.

1. Постановка задачи

Рассматриваем линейную сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} &= A_{11}(t)\tilde{x}_1(t) + A_{12}(t)\tilde{x}_2(t) + B_1(t)\tilde{u}(t), \quad \tilde{x}_1(t_0) = x_1^0, \\ \lambda \frac{d\tilde{x}_2}{dt} &= A_{21}(t)\tilde{x}_1(t) + A_{22}(t)\tilde{x}_2(t) + B_2(t)\tilde{u}(t), \quad \tilde{x}_2(t_0) = x_2^0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tilde{x}_1 \in R^{n_1}$, $\tilde{x}_2 \in R^{n_2}$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1^T, \tilde{x}_2^T)^T$; $A_{11} - n_1 \times n_1$, $A_{12} - n_1 \times n_2$, $A_{21} - n_2 \times n_1$, $A_{22} - n_2 \times n_2$, $B_1 - n_1 \times r$, $B_2 - n_2 \times r$ – матрицы указанных размерностей; $\lambda > 0$ – малый параметр; T – знак транспонирования. Здесь и далее волной сверху будем обозначать зависимость от λ .

Пусть выход системы равен $\tilde{y}(t) = H_1\tilde{x}_1(t)$, $H_1 - m_1 \times n$ матрица. На движениях системы (1) определим квадратичный критерий качества:

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2\lambda_f} \tilde{y}^T(t_f)F\tilde{y}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\tilde{x}^T(t)Q(t)\tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t)R(t)\tilde{u}(t))dt. \quad (2)$$

Здесь $\lambda_f > 0$ – другой малый параметр, а матрицы штрафов в критерии удовлетворяют условию:

I. Матрица $Q(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) & Q_3(t) \\ Q_3^T(t) & Q_2(t) \end{pmatrix}$ – неотрицательно определенная $n \times n$ матрица, $R(t)$ –

положительно определенная $r \times r$ матрица, F – постоянная положительно определенная $m \times m$ матрица для $t \in [t_0, t_f]$.

Пусть для задачи (1), (2) также соблюдается требование:

II. Матрицы $A_{ij}(t)$, $B_i(t)$, $i, j = 1, 2$, $Q(t)$, $R(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов для $t \in [t_0, t_f]$, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_*]$ и $\lambda_f \in [\lambda_{f0}, \lambda_{f*}]$.

В условиях сделанных предположений решение задачи (1), (2) в виде обратной связи по состоянию имеет вид [1,2]:

$$\tilde{u}(t) = \tilde{G}(t)\tilde{x}(t), \quad \tilde{G}(t) = -R^{-1}(t)\tilde{B}^T(t)\tilde{P}(t). \quad (3)$$

В последнем выражении матрица Риккати $\tilde{P}(t)$ определяется как

$$\tilde{P}(t) = \tilde{K}(t) + \tilde{W}^T(t)(\tilde{M}(t) + \lambda_f F^{-1})^{-1}\tilde{W}(t),$$

где матрицы $\tilde{K}(t)$, $\tilde{W}(t)$ и $\tilde{M}(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}}{dt} &= -\tilde{A}^T(t)\tilde{K} - \tilde{K}\tilde{A}(t) - Q(t) + \tilde{K}\tilde{B}(t)R^{-1}(t)\tilde{B}^T(t)\tilde{K}, \quad \tilde{K}(t_f) = 0, \\ \frac{d\tilde{W}}{dt} &= -\tilde{W}(\tilde{A}(t) - \tilde{B}(t)R^{-1}(t)\tilde{B}^T(t)\tilde{K}(t)), \quad \tilde{W}(t_f) = (H_1 \quad 0), \\ \frac{d\tilde{M}}{dt} &= -\tilde{W}(t)\tilde{B}(t)R^{-1}(t)\tilde{B}^T(t)\tilde{W}^T(t), \quad \tilde{M}(t_f) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

а матрицы $\tilde{A}(t)$ и $\tilde{B}(t)$ в соответствии с (1) равны

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ \lambda^{-1}A_{21}(t) & \lambda^{-1}A_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \lambda^{-1}B_2(t) \end{pmatrix}.$$

Нужно построить асимптотическое приближение решения задачи (1), (2) при одновременной малости параметров λ и λ_f . В [4] такая асимптотика регулятора найдена путем асимптотического анализа уравнений (3), (4), при этом решения уравнений (4) искались в виде:

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1 & \lambda\tilde{K}_3 \\ \lambda\tilde{K}_3^T & \lambda\tilde{K}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{W} = (\tilde{W}_1 \quad \lambda\tilde{W}_2). \quad (5)$$

В настоящей работе асимптотику регулятора (3) при одновременной малости параметров λ и λ_f будем искать на основе асимптотического анализа самой системы (1). Такой подход принято называть «прямой схемой» [5,6].

2. Построение асимптотического приближения

В соответствии с прямой схемой примем в (1) $\lambda = 0$, получим вырожденную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= A_{11}(t)x_1(t) + A_{12}(t)x_2(t) + B_1(t)u(t), \quad x_1(t_0) = x_1^0, \\ 0 &= A_{21}(t)x_1(t) + A_{22}(t)x_2(t) + B_2(t)u(t). \end{aligned} \quad (6)$$

При условии

III. Матрица $A_{22}(t)$ – невырожденная для $t \in [t_0, t_f]$;

из второго уравнения системы (6) можно выразить «быстрый» компонент $x_2(t)$:

$$x_2(t) = -A_{22}^{-1}(t)(A_{21}(t)x_1(t) + B_2(t)u(t)). \quad (7)$$

Подставив это выражение в первое уравнение (6), приходим к «медленной» подсистеме:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= A_s(t)x_s(t) + B_s(t)u_s(t), \quad x_s(t_0) = x_1^0, \\ y_s(t) &= H_1(t)x_s(t), \end{aligned} \quad (8)$$

$$A_s(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t), \quad B_s(t) = B_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t).$$

Критерий качества для подсистемы (8) определим из (2), используя выражение (7). Запишем его в виде

$$\rho = \frac{1}{2\lambda_f} y_s^T(t_f) F y_s(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x_s^T(t) Q_s(t) x_s(t) + 2u_s^T(t) D_s x_s(t) + u_s^T(t) R_s(t) u_s(t)) dt,$$

$$Q_s(t) = Q_1(t) - Q_3(t) A_{22}^{-1}(t) A_{21}(t) - (Q_3(t) A_{22}^{-1}(t) A_{21}(t))^T + A_{21}^T(t) A_{22}^{-T}(t) Q_2(t) A_{22}^{-1}(t) A_{21}(t), \quad (9)$$

$$R_s(t) = R(t) + B_2^T(t) A_{22}^{-T}(t) Q_2(t) A_{22}^{-1}(t) B_2(t), D_s = -B_2^T(t) A_{22}^{-T}(t) (Q_3^T(t) + Q_2(t) A_{22}^{-1}(t) A_{21}(t)).$$

В условиях I-III матрица $Q_s(t)$ – неотрицательно определенная, матрица $R_s(t)$ – положительно определенная [5]. Тогда решение задачи (8), (9) можно записать в виде [1,2]

$$u_s(t) = G_s(t) x_s(t), \quad G_s(t) = -R_s^{-1}(t) (B_s^T(t) P_s(t) + D_s(t)), \quad (10)$$

$$P_s(t) = K_s(t) + W_s^T(t) (M_s(t) + \lambda_f F^{-1})^{-1} W_s(t),$$

где матрицы $K_s(t)$, $W_s(t)$ и $M_s(t)$ удовлетворяют уравнениям вида (4), в которых вместо матриц $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$, $Q(t)$ и $(H_1 \ 0)$ стоят соответственно матрицы $A_0(t) = A_s(t) - B_s(t) R_s^{-1}(t) D_s(t)$, $B_s(t)$, $R_s(t)$, $Q_0(t) = Q_s(t) - D_s^T(t) R_s^{-1}(t) D_s(t)$ и H_1 .

Известно [3], что решение (10) задачи (8), (9) при условии полной управляемости системы (8) по выходу при $\lambda_f \rightarrow 0$ стремится к решению задачи минимизации критерия качества

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x_s^T(t) Q_s(t) x_s(t) + 2u_s^T(t) D_s x_s(t) + u_s^T(t) R_s(t) u_s(t)) dt \quad (11)$$

на траекториях системы (8) с дополнительными начальными условиями в терминальный момент времени $y_s(t_f) = 0$, т.е. для всех $t \in [t_0, t_f]$ справедливы оценки [3]

$$u_s(t) = \bar{u}_s(t) + O(\lambda_f), \quad G_s(t) = \bar{G}_s(t) + O(\lambda_f), \quad (12)$$

где $u_s(t)$ – определено в (10), а $\bar{u}_s(t)$ – суть решение задачи (8), (11), которое можно записать следующим образом:

$$\bar{u}_s(t) = \bar{G}_s(t) x_s(t), \quad \bar{G}_s(t) = -R_s^{-1}(t) (B_s^T(t) \bar{P}_s(t) + D_s(t)), \quad (13)$$

$$\bar{P}_s(t) = K_s(t) + W_s^T(t) M_s^{-1}(t) W_s(t).$$

Ясно, что в момент времени t_f коэффициенты регулятора $\bar{G}_s(t)$ неограниченно растут, поскольку в этот момент времени матрица $M_s(t_f)$ вырождена, следовательно, матрица $\bar{G}_s(t)$ существует и ограничена только на любом подынтервале $[t_0, t_1]$, $t_1 < t_f$, причем, чем ближе t_1 к t_f , тем точнее точность терминального приведения выхода в ноль. Выражения (12), (13) определяют матрицу «медленного» регулятора при $\lambda_f \rightarrow 0$.

Для выделения «быстрого» компонента, в систему (1) введем замену $\tilde{x}_2(t) = x_2(t) + \tilde{x}_f(t)$. Полагая, что «медленные» компоненты не изменяются, получим «быструю» подсистему [4]:

$$\lambda \frac{d\tilde{x}_f}{dt} = A_{22}(t) \tilde{x}_f(t) + B_2(t) \tilde{u}_f(t), \quad \tilde{x}_f(t_0) = x_2^0 - x_2(t_0). \quad (14)$$

Квадратичный критерий качества для системы (14) выберем таким:

$$\tilde{\rho}_f = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\tilde{x}_f^T(t) Q_2(t) \tilde{x}_f(t) + \tilde{u}_f^T(t) R(t) \tilde{u}_f(t)) dt. \quad (15)$$

Решение «быстрой» подзадачи (14), (15) известно и имеет вид [1,2]

$$\tilde{u}_f(t) = \tilde{G}_f(t) \tilde{x}_f(t), \quad \tilde{G}_f(t) = -R^{-1}(t) B_2^T(t) \tilde{K}_f(t), \quad (16)$$

а матрица $\tilde{K}_f(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати:

$$\lambda \frac{d\tilde{K}_f}{dt} = -A_{22}^T(t) \tilde{K}_f - \tilde{K}_f A_{22}(t) - Q_2(t) + \tilde{K}_f B_2(t) R^{-1}(t) B_2^T(t) \tilde{K}_f, \quad \tilde{K}_f(t_f) = 0.$$

IV. Пара матриц $\{A_{22}(t), B_2(t)\}$ управляема, а пара $\{A_{22}(t), C_2(t)\}$, где $C_2(t)C_2^T(t) = Q_2(t)$, наблюдаема для всех $t \in [t_0, t_f]$.

В соответствии с результатами [6] при условии IV для всех $t \in [t_0, t_1]$, $t_1 < t_f$ при $\lambda \rightarrow 0$ справедлива оценка $\tilde{K}_f(t) = K_f(t) + O(\lambda)$, где $K_f(t)$ является решением алгебраического уравнения Риккати

$$0 = -A_{22}^T(t)K_f - K_f A_{22}(t) - Q_2(t) + K_f B_2(t)R^{-1}(t)B_2^T(t)K_f. \quad (17)$$

Подставляя оценку для матрицы $\tilde{K}_f(t)$ в формулу (16), получаем асимптотику для «быстрого» регулятора при $\lambda \rightarrow 0$.

Зная решения «быстрой» и «медленной» подзадач при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda_f \rightarrow 0$, решение полной задачи (1),(2) определим как их асимптотическую композицию [6,7]:

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \bar{u}_s(t) + u_f(t) = G_c(t)x(t), \quad G_c(t) = (G_{c1}(t) \quad G_{c2}(t)), \\ G_{c2}(t) &= G_f(t), \quad G_{c1}(t) = (I + G_f(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t))\bar{G}_s(t) + G_f(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Теорема. При выполнении условий I-IV, а также при условии полной управляемости системы (8) по выходу, оптимальное решение $\tilde{G}(t)$ задачи (1), (2), аппроксимируется в нулевом приближении равномерной асимптотической композицией вида (18) решений $\bar{G}_s(t)$ и $G_f(t)$ задач (8), (11), и (14),(15),(17) соответственно, что означает существование равномерно по $t \in [t_0, t_1]$, $t_1 < t_f$ предела

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda_f \rightarrow 0} \tilde{G}(t) = G_c(t) = (G_{c1}(t) \quad G_{c2}(t)),$$

где $G_{c2}(t) = G_f(t)$, $G_{c1}(t) = (I + G_f(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t))\bar{G}_s(t) + G_f(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$.

Доказательство теоремы проведем в три этапа.

1. Покажем, что в условиях теоремы композиционную матрицу $G_c(t)$, определенную в (16), можно представить в виде (далее зависимость от времени в промежуточных выкладках опускаем для упрощения):

$$G_c = -R^{-1}(B_1^T \quad \lambda^{-1}B_2^T) \left[\begin{pmatrix} K_s & 0 \\ \lambda K_m^T & \lambda K_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_s^T \\ \lambda W_m^T \end{pmatrix} M_s^{-1} (W_s \quad 0) \right], \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} K_m(t) &= K_m = [K_s(B_1 R^{-1} B_2^T K_f - A_{12}) - (A_{21}^T K_f + Q_3)](A_{22} - B_2 R^{-1} B_2^T K_f)^{-1}, \\ W_m(t) &= W_m = W_s(B_1 R^{-1} B_2^T K_f - A_{12})(A_{22} - B_2 R^{-1} B_2^T K_f)^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Действительно, раскрыв в (19) скобки, после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} G_c &= (G_{c1} \quad -R^{-1}B_2^T K_f), \\ G_{c1} &= -R^{-1}B_1^T (K_s + W_s^T M_s^{-1} W_s) + R^{-1}B_2^T (K_m^T + W_m^T M_s^{-1} W_s). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение равенство:

$$(A_{22} - B_2 R^{-1} B_2^T K_f)^{-1} = (A_{22} + B_2 G_{c2})^{-1} = A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} B_2 N G_{c2} A_{22}^{-1}, \quad N = (I + G_{c2} A_{22}^{-1} B_2)^{-1} \quad (21)$$

В условиях теоремы матрица $N(t)$ и $N^{-1}(t)$ являются невырожденными, и при этом справедливы выражения

$$\begin{aligned} N R^{-1} N^T &= R_s^{-1}, \\ I - N G_{c2} A_{22}^{-1} B_2 &= I - G_{c2} A_{22}^{-1} B_2 N = N, \quad G_{c2} A_{22}^{-1} B_2 N = N G_{c2} A_{22}^{-1} B_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (21) в (20), используя затем равенства (22), приходим к соотношению (18) для композиционной матрицы $G_c(t)$.

2. Запишем точное решение задачи (1), (2), используя блочное представление (5):

$$\begin{aligned}\tilde{G} &= -R^{-1}(B_1^T \quad \lambda^{-1}B_2^T) \left[\begin{pmatrix} \tilde{K}_1 & \lambda\tilde{K}_3 \\ \lambda\tilde{K}_3^T & \lambda\tilde{K}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{W}_1^T \\ \lambda\tilde{W}_2^T \end{pmatrix} (\tilde{M} + \lambda_f F^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{W}_1 & \lambda\tilde{W}_2 \end{pmatrix} \right] = (\tilde{G}_1 \quad \tilde{G}_2), \\ \tilde{G}_1 &= -R^{-1}B_1^T (\tilde{K}_1 + \tilde{W}_1^T (\tilde{M} + \lambda_f F^{-1})^{-1} \tilde{W}_1) + B_2^T (\tilde{K}_3^T + \tilde{W}_2^T (\tilde{M} + \lambda_f F^{-1})^{-1} \tilde{W}_1), \\ \tilde{G}_2 &= -R^{-1}[B_2^T \tilde{K}_2 + \lambda[B_2^T \tilde{W}_2^T (\tilde{M} + \lambda_f F^{-1})^{-1} \tilde{W}_1 + B_1^T (\tilde{K}_3 + \tilde{W}_1^T (\tilde{M} + \lambda_f F^{-1})^{-1} \tilde{W}_2)]]).\end{aligned}$$

При $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda_f \rightarrow 0$ из последнего выражения получим:

$$\begin{aligned}G &= (G_1 \quad G_2), \\ G_1 &= -R^{-1}(B_1^T (K_1 + W_1^T M^{-1} W_1) + B_2^T (K_3^T + W_2^T M^{-1} W_1)), \quad G_2 = -R^{-1}B_2^T K_2,\end{aligned}\tag{23}$$

где $K_1(t), K_2(t), K_3(t), W_1(t), W_2(t)$ и $M(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{dK_1}{dt} &= -A_{11}^T K_1 - K_1 A_{11} - K_3 A_{21} - A_{21}^T K - Q_1 + K_1 B_1 R^{-1} B_1^T K_1 + \\ &+ K_3 B_2 R^{-1} B_2^T K_3^T + K_1 B_1 R^{-1} B_2^T K_3^T + K_3 B_2 R^{-1} B_1^T K_1, \quad K_1(t_f) = 0,\end{aligned}\tag{24}$$

$$0 = -(K_3 A_{22} + K_1 A_{12} + A_{21}^T K_2 + Q_3) + K_1 B_1 R^{-1} B_2^T K_2 + K_3 B_2 R^{-1} B_2^T K_2,$$

$$0 = -A_{22}^T K_2 - K_2 A_{22} - Q_2 + K_2 B_2 R^{-1} B_2^T K_2,$$

$$\frac{dW_1}{dt} = -W_1(A_{11} - B_1 R^{-1} B_1^T K_1 - B_1 R^{-1} B_2^T K_3^T) - W_2(A_{21} - B_2 R^{-1} B_1^T K_1 - B_2 R^{-1} B_2^T K_3^T), \quad W_1(t_f) = (H_1 \quad 0),$$

$$0 = -W_1(A_{12} + B_1 G_2) - W_2(A_{22} + B_2 G_2),\tag{25}$$

$$\frac{dM}{dt} = -(W_1 B_1 R^{-1} B_1^T W_1^T + W_2 B_2 R^{-1} B_1^T W_1^T + W_1 B_1 R^{-1} B_2^T W_2^T + W_2 B_2 R^{-1} B_2^T W_2^T), \quad M(t_f) = 0,$$

Понятно, что матрица $G(t)$ в (23) является асимптотическим приближением для матрицы $\tilde{G}(t)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$, $t_1 < t_f$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda_f \rightarrow 0$ [4].

3. Покажем теперь, что $G(t)$ и $G_c(t)$ совпадают с точностью до $O(\lambda, \lambda_f)$. Сравнивая (23), (24) с (16), (17), становится ясно, что $K_2(t) \equiv K_f(t)$, а, следовательно, и $G_2(t) \equiv G_{c2}(t) = G_f(t)$.

Теперь докажем, что $G_1(t) \equiv G_{c1}(t)$. Для этого сначала докажем равенство $K_1(t) \equiv K_s(t)$. В силу условия IV последнее уравнение в (24) имеет единственное положительно определенное решение $K_2(t)$, подставляя которое во второе уравнение системы (24), для блока $K_3(t)$ получим:

$$K_3(t) = K_3 = -[K_1(B_1 G_2 + A_{12}) + A_{21}^T K_2 + Q_3](A_{22} + B_2 G_2)^{-1},$$

или, учитывая (22),

$$K_3 = -[K_1(B_1 G_2 + A_{12}) + A_{21}^T K_2 + Q_3](A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} B_2 N G_2 A_{22}^{-1}).\tag{26}$$

Подставив (26) в первое уравнение (24), после ряда преобразований получим $K_1(t) \equiv K_s(t)$. Подробно доказательство этого утверждения изложено в [8]. Поскольку $K_2(t) \equiv K_f(t)$ и $K_1(t) \equiv K_s(t)$, то из (26) следует, что $K_3(t) \equiv K_m(t)$.

Перейдем теперь к системе (25), из второго уравнения которой выразим $W_2(t)$:

$$W_2 = -W_1(A_{12} + B_1 G_2)(A_{22} + B_2 G_2)^{-1} = -W_1(A_{12} + B_1 G_2)(A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} B_2 N G_2 A_{22}^{-1}).\tag{27}$$

Зная $W_2(t)$, перепишем первое уравнение системы (25):

$$\begin{aligned}\frac{dW_1}{dt} &= -W_1(A_{11} - B_1 R^{-1} B_1^T K_1 - B_1 R^{-1} B_2^T K_3^T) + \\ &+ W_1(A_{12} + B_1 G_2)(A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} B_2 N G_2 A_{22}^{-1})(A_{21} - B_2 R^{-1} B_1^T K_1 - B_2 R^{-1} B_2^T K_3^T),\end{aligned}$$

раскрыв скобки и выполнив ряд преобразований, получим

$$\frac{dW_1}{dt} = -W_1(A_s - B_s N R^{-1} B_1^T K_1 - B_s N R^{-1} B_2^T K_3^T - B_s N G_2 A_{22}^{-1} A_{21}),$$

далее, подставляя формулу (26) вместо матрицы $K_3(t)$, приходим к уравнению

$$\frac{dW_1}{dt} = -W_1(A_s - B_s NR^{-1} N^T B_s^T K_1 + B_s NR^{-1} N^T B_2^T A_{22}^{-T} Q_3^T + B_s NR^{-1} (N^T B_2^T A_{22}^{-T} K_2 - B_2^T K_2 A_{22}^{-1}) A_{21}).$$

Можно показать с помощью третьего уравнения системы (24), что справедливо равенство:

$$N^T B_2^T A_{22}^{-T} K_2 - B_2^T K_2 A_{22}^{-1} = -N^T B_2^T A_{22}^{-T} Q_2 A_{22}^{-1}.$$

Тогда из (22) и из тождества $K_1(t) \equiv K_s(t)$ окончательно получим уравнение для компоненты $W_1(t)$:

$$\frac{dW_1}{dt} = -W_1(A_s - B_s NR^{-1} N^T B_s^T K_s + B_s R_s^{-1} D_s). \quad (28)$$

Сравнивая (28) с уравнением для матрицы $W_s(t)$, устанавливаем равенство $W_1(t) \equiv W_s(t)$, откуда также следует еще одно тождество: $W_2(t) \equiv W_m(t)$.

По аналогии покажем, что $M(t) \equiv M_s(t)$. Из третьего уравнения системы (25) и формулы (27) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = & -W_1 B_1 R^{-1} B_1^T W_1^T + W_1 (A_{12} + B_1 G_2) (A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} B_2 N G_2 A_{22}^{-1}) B_2 R^{-1} B_1^T W_1^T + \\ & + W_1 B_1 R^{-1} B_2^T (A_{22}^{-T} - A_{22}^{-T} G_2^T N^T B_2^T A_{22}^{-T}) (A_{12}^T + G_2^T B_1^T) W_1^T - \\ & - W_1 (A_{12} + B_1 G_2) (A_{22}^{-1} - A_{22}^{-1} B_2 N G_2 A_{22}^{-1}) B_2 R^{-1} B_2^T (A_{22}^{-T} - A_{22}^{-T} G_2^T N^T B_2^T A_{22}^{-T}) (A_{12}^T + G_2^T B_1^T) W_1^T = \\ = & -W_1 (B_s + A_{12} A_{22}^{-1} B_2 N G_2 A_{22}^{-1} B_2 - B_1 G_2 A_{22}^{-1} B_2 N) R^{-1} (B_s + A_{12} A_{22}^{-1} B_2 N G_2 A_{22}^{-1} B_2 - B_1 G_2 A_{22}^{-1} B_2 N)^T W_1^T = \\ = & -W_1 B_s NR^{-1} N^T B_s^T W_1^T = -W_1 B_s R_s^{-1} B_s^T W_1^T = -W_s B_s R_s^{-1} B_s^T W_s^T. \end{aligned}$$

Последние выкладки показывают, что $M(t) \equiv M_s(t)$.

Из вышеуказанных выводов следует, что матрица $G(t)$ равна матрице $G_c(t)$, и следовательно, обладает такими же асимптотическими свойствами. Теорема доказана.

Замечание 1. Использовать прямую схему можно при условии, что матрица состояния «быстрой» подсистемы невырожденная. Если это условие не выполняется, то устранить данный недостаток, можно, например, введя в систему (1) предварительную обратную связь по «быстрым» компонентам состояния. При это получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1}{dt} = & A_{11}(t)\tilde{x}_1(t) + \hat{A}_{12}(t)\tilde{x}_2(t) + B_1(t)\tilde{u}(t), \quad \tilde{x}_1(t_0) = x_1^0, \\ \lambda \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = & A_{21}(t)\tilde{x}_1(t) + \hat{A}_{22}(t)\tilde{x}_2(t) + B_2(t)\tilde{u}(t), \quad \tilde{x}_2(t_0) = x_2^0, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\hat{A}_{12} = A_{12} + B_1 K_2$, $\hat{A}_{22} = A_{22} + B_2 K_2$, K_2 – матрица обратной связи, такая что $\det(A_{22} + B_2 K_2) \neq 0$. Система (29) уже удовлетворяет условию IV, следовательно, к ней уже можно применить теорему 1.

Замечание 2. Предельный композиционный регулятор (18) имеет следующую особенность: в момент времени t_f , его коэффициенты при $t \rightarrow t_f$ стремятся к бесконечности, то есть в окрестности конечной токи $t = t_f$ такой регулятор реализован быть не может. Данную проблему можно решить разными способами. Можно, например, отказавшись от абсолютно точного терминального приведения, потребовать лишь, чтобы терминальная ошибка была достаточно мала с инженерной точки зрения, и добиваться этого подбором параметра λ_f [3]. С другой стороны, можно воспользоваться одним из методов устранения особенности предельного регулятора (18) в конечной точке $t = t_f$. Частично такие методы представлены в [9].

Теперь приведем примеры использования вышеописанного алгоритма. В первом примере для устранения особенности регулятора в конечной точке будем использовать метод «замораживания» [10]. Во втором примере – будем использовать метод подбора малого параметра λ_f для получения требуемой точности.

Пример 1. Рассмотрим задачу наведения летательного аппарата (ЛА) на неподвижную цель в горизонтальной плоскости. Запишем линеаризованную математическую модель процесса наведения ЛА [10] в виде:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = X,$$

где вектор состояния имеет компонентами (соответственно) линейное отклонение от линии прямолинейного равномерного движения к неподвижной цели, м; угол скольжения, град, угловую скорость, град/с, и угол рысканья, град; угол отклонения руля направления, град:

$$x = \text{col}(z, \beta, w_y, \phi, \delta),$$

$$x_1 = \text{col}(z, \beta), x_2 = \text{col}(w_y, \phi, \delta).$$

Матрицы состояния системы запишутся в виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & -a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Критерий качества имеет вид (2), где

$$H_1 = (1 \ 0), H_2 \equiv 0, Q_1 \equiv 0, Q_3 \equiv 0, Q_2 = \text{diag}(1, 0, 0), R = 1.$$

Терминальный момент времени $t_f = 6$ с, момент замораживания $t_1 = 4,5$ с. Результаты моделирования показаны на рисунке 1.

Из рисунка 1 видно, что регулятор (24) с «замороженными» коэффициентами в момент $t_1 = 4,5$ с к терминальному моменту $t_f = 6$ с приводит выход (координата $z(t)$) не точно в ноль, ошибка наведения примерно 4 м, но уже к 7 секунде ошибка наведения имеет порядок 10^{-5} м, при этом дальнейшую стабилизацию в окрестности нуля можно продолжать сколь угодно долго с помощью построенного регулятора.

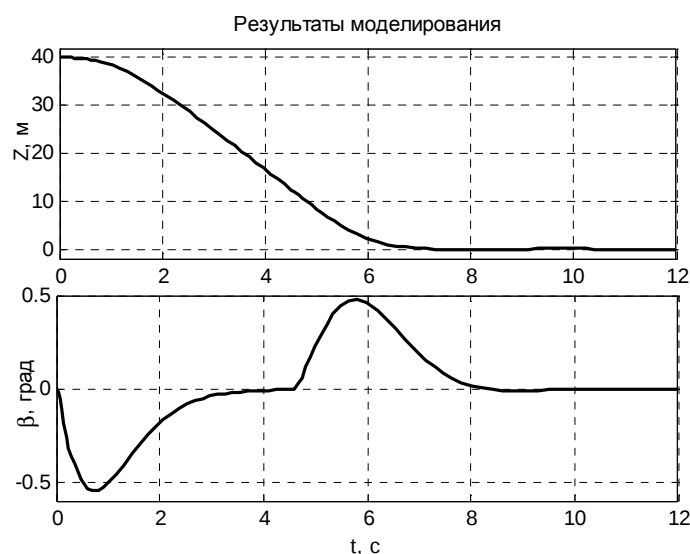


Рисунок 1 – График зависимости «медленных» переменных от времени

Пример 2. Рассмотрим задачу терминального управления материальной точкой, кинетические уравнения движения которой имеют вид:

$$\frac{dX(t)}{dt} = V(t), \frac{dV(t)}{dt} = a(t), \frac{da(t)}{dt} = u(t).$$

Здесь $X(t), V(t), a(t)$ соответственно перемещение, скорость и ускорение движения материальной точки, $u(t)$ – управление. Ставится задача привести координату $X(t)$, скорость $V(t)$ точно в ноль за 0,5 секунды из начального состояния, $X(0) = 20$ м, $V(0) = 0$ м/с.

Введем в последнее уравнение данной системы малый параметр, получим следующую математическую модель, где «медленными» компонентами будем считать перемещение и скорость, «быстрыми» — ускорение, т.е. в наших обозначениях $x_1(t) = (X(t), V(t))$, $x_2(t) = (a(t))$:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{1}{\lambda} A_{21} & \frac{1}{\lambda} A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\lambda} B_2 \end{pmatrix} u,$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{22} = 0, B = \lambda.$$

В данной задаче не выполняется условие невырожденности матрицы A_{22} , следовательно, чтобы применить теорему 1, нужно вводить предварительную обратную связь. Поскольку выполняется условие управляемости матриц (A_{22}, B_2) , то матрицу предварительной обратной связи можно выбрать как решение задачи об оптимальном стационарном регуляторе. При таком выборе K_2 матрица замкнутой «быстрой» подсистемы $\hat{A}_{22} = A_{22} + B_2 K_2$ будет гурвицевой, и следовательно, невырожденной [1,2]. Теперь можно применить теорему 1. Результаты моделирования при $\lambda_f = 10^{-3}$ и разных значениях малого параметра λ изображены ниже (рисунок 2).

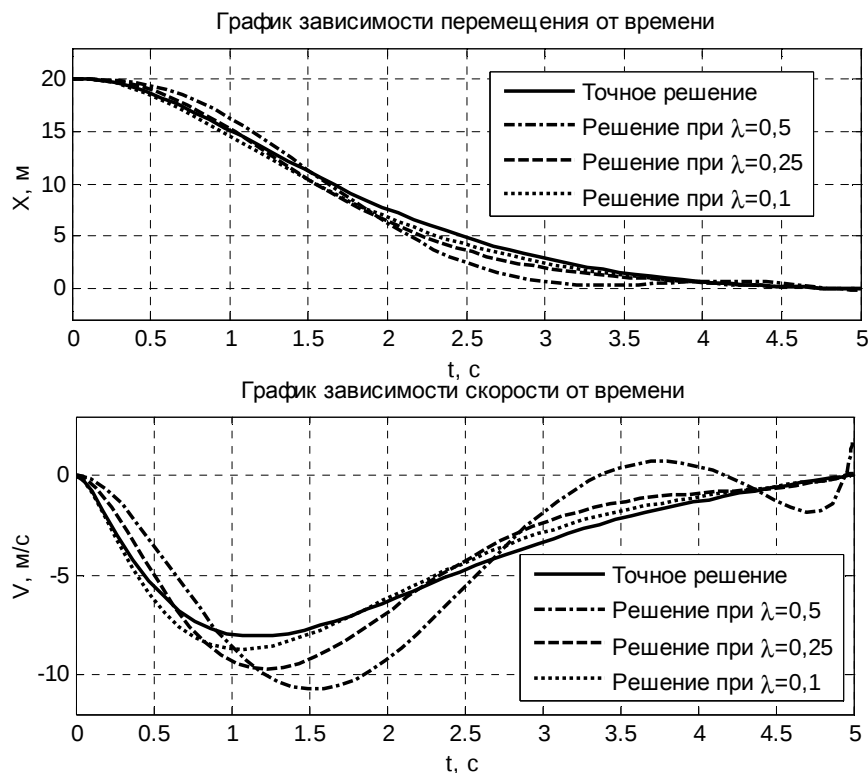


Рисунок 2 – Графики зависимости «медленных» переменных от времени.

Из рисунка 2 видно, что по мере уменьшения параметра λ повышается качество аппроксимации точного решения приближенным, полученным с помощью регулятора (23). Что касается качества приведения в ноль, то при выбранном значении $\lambda_f = 10^{-3}$ и при $\lambda = 0,1$ точный регулятор дает ошибку наведения по перемещению $0,19 \cdot 10^{-5}$ м, и по скорости $1 \cdot 10^{-5}$ м/с, а приближенный регулятор $7 \cdot 10^{-5}$ м, и $6 \cdot 10^{-3}$ м/с соответственно.

Замечание 3. Из приведенных примеров видно, что предлагаемые регуляторы, являясь равномерным асимптотическим приближением точного решения лишь на некотором внутреннем интервале $[t_0, t_1]$, $t_1 < t_f$ управления, тем не менее, дают приемлемые результаты в случае «медленного» выхода. Дальнейшие исследования в данной области могут быть нацелены на построение асимптотики, равномерной на всем интервале управления $[t_0, t_1]$ при одновременной малости двух параметров λ и λ_f , что позволит получить приемлемые результаты по приведению в ноль «быстрого» выхода.

Библиографический список

1. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Ю-ши Хо — М.: Мир, 1972. — 544 с.
2. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 456 с.
3. Козырев В.Г. Терминальная ошибка почти точного оптимального приведения в ноль / В.Г. Козырев // Динамические системы. — 2001. — Вып.17. — С. 18–22.
4. Козырев В.Г. Об асимптотике оптимального терминального регулятора разнотемпового объекта / В.Г. Козырев // Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. — Севастополь, 2003. — Вып. 49. — С. 69–79.
5. Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М.Г. Дмитриев, Г.А. Курина // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
6. Kokotovic P.V. Singular perturbation methods in control: analysis and design / P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, J. O'Reilly. — Academic Press: Orlando, 1986. — 371 p.
7. Kokotovic P.V. A decomposition of near-optimum regulators for systems with slow and fast modes / P.V. Kokotovic, J.H. Chow // IEEE Trans. On Automatic Control. — 1976. — Vol. 21. — P. 701–706.
8. Kokotovic P.V. Note on singular perturbation of linear state regulators / P.V. Kokotovic, A.H. Haddad // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1971. — Vol. 16. — P. 279–281.
9. Батенко А.П. Управление конечным состоянием движущихся объектов / А.П. Батенко. — М.: Сов. радио, 1977. — 256 с.
10. Дубовик С.А. Метод «замораживания» в задачах терминального управления многомерными системами / С.А. Дубовик // Вестник СевГТУ. Сер. Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. — Севастополь, 2002. — Вып. 5. — С. 72–79.

Поступила в редакцию 01.04.2010 г.